

TESI DI DOTTORATO IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE, NAVALE E DELLA QUALITÀ
CICLO XVII

Sviluppi nelle tecniche PIV stereoscopiche

**Errori di allineamento ed applicazioni allo studio termo-fluidodinamico
di un getto che si immette in un flusso trasversale**

di
FRANCESCO GIANLUCA NESE



DETEC, Facoltà di Ingegneria
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Napoli, Italia 2004

TESI DI DOTTORATO IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE, NAVALE E DELLA QUALITÀ
CICLO XVII

Sviluppi nelle tecniche PIV stereoscopiche

**Errori di allineamento ed applicazioni allo studio termo-fluidodinamico
di un getto che si immette in un flusso trasversale**

di
FRANCESCO GIANLUCA NESE

Il presente lavoro è stato svolto presso il laboratorio di gasdinamica del Dipartimento di Energetica, Termofluidodinamica applicata e Condizioni ambientali della Facoltà di Ingegneria.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

TUTORI: PROF. ING. GIOVANNI MARIA CARLOMAGNO
DOTT. ING. TOMMASO ASTARITA

COORDINATORE: PROF. ING. ANTONIO MOCCIA

Napoli, 2004

*Non semper ea sunt, quae videntur; decipit
Frons prima multos: rara mens intelligit
Quod interiore condidit cura angulo.*

Phaedrus, IV, 1

Nell'intraprendere uno studio scientifico, non sempre si è in grado di realizzare quanto ci si era proposti e, non di rado, i risultati non rispecchiano le proprie aspettative ed ancor meno quelle del lettore che casualmente si imbatta nella lettura del lavoro. È doveroso, pertanto, fare sin d'ora le scuse a quanti non trovino di loro gradimento il presente lavoro di tesi e non traggano giovamento dalla lettura. È mio dovere anche esprimere il mio rincrescimento non solo per i numerosi errori di stampa e di battitura presenti nella tesi, ma anche per tutti gli errori concettuali che i limiti di tempo e la non abbastanza adeguata preparazione non mi hanno permesso di ridurre o eliminare. Non ho intenzione di annoiare l'impavido lettore che si interessi in maniera fortuita non solo al lavoro, ma anche alla prefazione dell'autore e, perciò, cercherò di sintetizzare al massimo le considerazioni che sovengono alla fine dell'ennesimo ciclo del proprio percorso formativo.

La prassi consolidata, in queste circostanze, imporrebbe un elenco di persone ed enti da ringraziare. Contravvenendo alle canoniche forme di ringraziamento, non esprimerò giudizi di valore sulle singole persone, ma mi limiterò a menzionare quanti abbiano partecipato o abbiano avuto un ruolo nella realizzazione del presente lavoro. I giudizi personali su ciascuno, che non mi sento di esprimere senza diritto di replica, li terrò gelosamente custoditi, anche perché credo che in fondo ognuno sia consapevole del proprio contributo.

In primo luogo, elenco gli strutturati dell'università il cui ordine, per non far torto a nessuno, segue la scala gerarchica dei ruoli ricoperti da ciascuno: prof. ing. G. M. Carlomagno, prof. ing. G. Cardone, dott. ing. T. Astarita, dott. ing. C. Meola, G. Sicardi. Di seguito riporto l'elenco degli studenti (spesso dimenticati) che negli anni hanno collaborato, più o meno spontaneamente, alla realizzazione dello studio; l'ordine con cui è stato redatto l'elenco è puramente cronologico e, nel caso di contemporaneità della permanenza in laboratorio da parte di diversi studenti, come criterio è stato scelto l'ordine alfabetico dei cognomi: Matteo Bellucci, Domenico Frontoso Silvestri, Melania Agliano, Ciro Amitrano, Daniela Bory, Valentina Panizza, Angelo Lamboglia, Fabio De Marino, Davide Di Natale, Corrado Natale, Antonio Ventriglia, Valeria Romano. Ovviamente, non è dato sapere la misura con cui ringrazio ciascuna delle persone citate. Infine, un sentito ringraziamento va al prof. A. Moccia, sempre gentile e disponibile. Uno strappo alla regola dei ringraziamenti mi sia concesso a causa del diverso ruolo della persona.

Oltre alle già citate persone, mi piacerebbe menzionare tutti coloro che sono stati presenti nel periodo del dottorato, tra cui i parenti, gli amici, i conoscenti, i colleghi di lavoro, i ragazzi (amici) del treno, i colleghi universitari, ecc. Non cito i nomi di tutti poiché l'elenco sarebbe lunghissimo e certamente ne dimenticherei tanti, ma non è mia intenzione offendere qualcuno. Nonostante i buoni propositi, qualche eccezione mi sia concessa nuovamente. Oltre ai ringraziamenti, peraltro scontati, ai genitori e a mia sorella, il mio ricordo va alle persone che non ci sono più e per le quali ci si accorge troppo tardi di non riuscire a fare abbastanza: i nonni Elvira, Francesco, Giulia e zia Maria.

Non mi resta che augurare una buona lettura a chi si accinge a sfogliare con curiosità ed interesse il presente lavoro, nella speranza che si risolvano i mali oscuri della ricerca italiana, che vanno dalle carenze strutturali alla svendita della cultura, passando per i fantasmi (tra cui l'autore della tesi) che di volta in volta la popolano.

Salerno, 30-11-2004

Francesco Gianluca Nese

INDICE

INDICE	I
INTRODUZIONE	1
1. ASPETTI FISICI E TECNICI DELLA TECNICA PIV.....	5
1.1. PARTICELLE TRACCIANTI	5
1.1.1. Proprietà meccaniche del fluido	5
1.1.2. Proprietà di diffusione della luce delle particelle traccianti	6
1.1.3. Generazione ed iniezione di particelle traccianti	9
1.2. SORGENTI DI LUCE.....	10
1.2.1. Laser	10
1.2.2. Generazione del fascio di luce piano.....	15
1.3. GENERAZIONE E REGISTRAZIONE DI IMMAGINI PIV	16
1.3.1. Formazione dell'immagine PIV	17
1.3.2. Strumenti e tecniche di registrazione delle immagini	21
1.4. METODI DI VALUTAZIONE DELLE IMMAGINI PIV	26
1.4.1. Metodi di valutazione ottici.....	28
1.4.2. Metodi di valutazione digitali	31
2. FONDAMENTI TEORICI DI PIV DIGITALE	35
2.1. ACQUISIZIONE	35
2.1.1. Campo di spostamento	35
2.1.2. Campione tracciante	36
2.1.3. Proprietà statistiche delle particelle traccianti.....	37
2.1.4. Generazione dell'immagine	38
2.2. INTERROGAZIONE.....	40
2.2.1. Correlazione spaziale	40
2.2.2. Gradienti di velocità ed errori di bias.....	41
2.2.3. Conversione analogico/numerica	42
2.3. ANALISI DIGITALE	44
2.3.1. Correlazione spaziale discreta.....	44
2.3.2. Stima dello spostamento.....	45
2.3.3. Stima degli errori.....	48
3. METODI DI INTERROGAZIONE AVANZATI ED ELABORAZIONE DEI DATI.....	55
3.1. RANGE DINAMICO DI VELOCITÀ E DI RISOLUZIONE SPAZIALE	55
3.1.1. Calcolo delle espressioni dei range dinamici	55
3.1.2. Ottimizzazione dei parametri ottici	57
3.2. VERIFICA E CONTROLLO STATISTICO DEI DATI.....	58
3.2.1. Modello del segnale PIV	58
3.2.2. Criterio di identificazione dei vettori spuri	59
3.2.3. Test della media globale.....	60
3.2.4. Test della media locale.....	61
3.2.5. Test della mediana locale	61
3.3. STIMA DI QUANTITÀ DIFFERENZIALI ED INTEGRALI	62
3.3.1. Schemi di differenziazione	63
3.3.2. Stima della vorticità	63
3.4. METODI DI INTERROGAZIONE AVANZATI.....	65
3.4.1. Metodi con spostamento delle finestre.....	65

3.4.2. Metodi con deformazione delle finestre.....	67
3.4.3. Metodi iterativi con deformazione dell'immagine (WIDIM).....	68
3.4.4. Accuratezza dei metodi con correzione locale del campo di spostamento	69
3.4.5. Correzione degli errori con la correlazione.....	72
4. MISURE CON TECNICA PIV STEREOSCOPICA	75
4.1. DISPOSIZIONE DELLE OTTICHE NELLE REGISTRAZIONI STEREOSCOPICHE.....	75
4.1.1. Metodo con traslazione	75
4.1.2. Metodo con spostamento angolare.....	76
4.1.3. Condizione di Scheimpflug.....	77
4.2. CORREZIONE DEGLI ERRORI PROSPETTICI.....	78
4.2.1. Correzione mediante l'ottica geometrica	78
4.2.2. Correzione mediante polinomi del secondo ordine.....	79
4.3. METODI PER LA RICOSTRUZIONE DELLE TRE COMPONENTI DEL CAMPO DI MOTO.....	80
4.3.1. Metodi di ricostruzione geometrica	80
4.3.2. Metodo con mappatura tridimensionale.....	85
4.3.3. Metodo con stima locale della deformazione	90
4.4. ANALISI DELL'ERRORE NELLE TECNICHE PIV STEREOSCOPICHE	93
4.4.1. Derivazione delle formule teoriche dell'errore.....	93
4.4.2. Analisi degli errori	95
5. ERRORI DI ALLINEAMENTO NELLE MISURE STEREOSCOPICHE	99
5.1. CAMPO DI MOTO UNIFORME	99
5.1.1. Traslazione del piano di misura	99
5.1.2. Rotazione del piano di misura nel piano xz	104
5.1.3. Rotazione del piano di misura nel piano yz	107
5.1.4. Errore di allineamento generico	108
5.2. CAMPO DI MOTO NON UNIFORME.....	110
5.2.1. Formule generali dell'errore	110
5.2.2. Campo di moto rotatorio	115
5.3. CORREZIONE DEGLI ERRORI DI ALLINEAMENTO	117
5.3.1. Metodo con ricostruzione geometrica.....	118
5.3.2. Metodo con mappatura tridimensionale.....	120
6. TECNICHE DI MISURA DEI FLUSSI TERMICI	121
6.1. SCAMBIO TERMICO PER CONVEZIONE.....	121
6.2. SENSORI DI FLUSSO TERMICO	123
6.2.1. Flussi instazionari	123
6.2.2. Flussi quasi stazionari	124
6.2.3. Flussi stazionari.....	124
6.3. ELEMENTI DI TERMOGRAFIA ALL'INFRAROSSO.....	127
6.3.1. Scambio termico per irraggiamento.....	127
6.3.2. Caratteristiche dei sensori	129
6.3.3. Calibrazione	131
7. ANALISI TERMOFLUIDODINAMICHE SU GETTI IN UN FLUSSO TRASVERSALE	135
7.1. INTRODUZIONE.....	135
7.2. STUDI SUI CAMPI DI MOTO E SULLA TURBOLENZA	137
7.3. STUDI SULLO SCAMBIO TERMICO.....	145
8. APPARATO SPERIMENTALE E SISTEMI DI MISURA	147

8.1. CARATTERISTICHE GENERALI DELL' APPARATO SPERIMENTALE	147
8.1.1. Galleria del vento e sezione di prova	148
8.1.2. Attrezzature utilizzate per le prove in galleria del vento	149
8.2. MISURE CON SISTEMA PIV	149
8.2.1. Generazione delle immagini.....	150
8.2.2. Registrazione delle immagini.....	152
8.2.3. Elaborazione delle immagini.....	153
8.3. SISTEMA DI ACQUISIZIONE DELLE IMMAGINI TERMOGRAFICHE.....	153
8.3.1. Caratteristiche tecniche del sistema termografico.....	153
8.3.2. Elaborazione delle immagini.....	155
9. VERIFICHE SPERIMENTALI SUGLI ERRORI DI ALLINEAMENTO	157
9.1. INCERTEZZE NELLE MISURE	157
9.2. CAMPO DI SPOSTAMENTO UNIFORME.....	161
9.2.1. Errore di traslazione del piano di misura	161
9.2.2. Errore di rotazione del piano di misura.....	163
9.3. CAMPO DI SPOSTAMENTO ROTATORIO	166
9.3.1. Errore di traslazione del piano di misura	166
9.3.2. Errore di rotazione del piano di misura.....	171
10. RISULTATI DELLE MISURE PIV	177
10.1. CARATTERISTICHE GENERALI DEL CAMPO DI MOTO.....	177
10.1.1. Vortici stazionari	178
10.1.2. Vortici instazionari	179
10.1.3. Traiettoria	184
10.2. STATISTICHE DEL FLUSSO.....	186
10.2.1. Misure nel piano di simmetria del getto ($y/D = 0$)	186
10.2.2. Misure nei piani paralleli alla parete	190
11. RISULTATI DELLE MISURE TERMOGRAFICHE.....	203
11.1. CARATTERISTICHE PRINCIPALI DELLE MAPPE DI SCAMBIO TERMICO.....	203
11.2. INFLUENZA DEL NUMERO DI REYNOLDS	207
11.3. INFLUENZA DEL RAPPORTO DI INIEZIONE.....	209
12. CONCLUSIONI	217
APPENDICE A: STATISTICHE DI INSIEME DEL CAMPIONE TRACCIANTE	219
APPENDICE B: STATISTICHE DI INSIEME DELLE IMMAGINI PIV	220
B.1. MEDIA	220
B.2. AUTOCOVARIANZA	220
B.3. MUTUA COVARIANZA	221
APPENDICE C: ANALISI DIGITALE DI IMMAGINI PIV	223
C.1. STATISTICHE DELLE IMMAGINI PIV DISCRETE	223
C.2. STIMA DELL'INTENSITÀ MEDIA DELL'IMMAGINE	224
C.3. STIMA DELLA MUTUA COVARIANZA.....	224
C.4. FUNZIONI DI PESO	226
C.5. STIMA DELLA SCALA INTEGRALE DELLA LUNGHEZZA DI COVARIANZA	227
APPENDICE D: ERRORI DI ALLINEAMENTO NELLA PIV STEREOSCOPICA.....	229
D.1. ESPRESSIONE GENERALE DELL'ERRORE PER UN CAMPO DI SPOSTAMENTO UNIFORME.....	229
D.2. ROTAZIONE NEL PIANO XZ.....	230

D.3. PIANO DI MISURA IN POSIZIONE QUALUNQUE.....	232
D.4. COEFFICIENTI CORRETTIVI PER UN CAMPO DI MOTO NON UNIFORME	233
D.5. COEFFICIENTI CORRETTIVI PER UN CAMPO DI MOTO ROTATORIO	234
BIBLIOGRAFIA.....	239
LISTA DEI SIMBOLI.....	243
Caratteri romani maiuscoli.....	243
Caratteri romani minuscoli.....	246
Caratteri greci.....	249
Simboli speciali.....	251
LISTA DELLE ABBREVIAZIONI	252

INTRODUZIONE

Sin dagli albori della propria storia l'essere umano si è sempre interessato all'osservazione della natura ed, in particolare, allo studio dei corpi in moto in un fluido. Anche semplici apparati sperimentali realizzati in fiumi o cascate hanno consentito di ottenere stime grossolane della velocità e di visualizzare le strutture che si originano in un flusso quali vortici, scie a valle di un ostacolo, pozzi, sorgenti, ecc. Basandosi soltanto sull'osservazione, *Leonardo Da Vinci* (vedi Raffel et al., 1998) fu in grado di fornire disegni dettagliati delle strutture che si formano nei flussi d'acqua. All'inizio del '900, utilizzando particelle in sospensione sulla superficie dell'acqua, *Ludwig Prandtl* (vedi Raffel et al., 1998) effettuò studi su flussi stazionari ed instazionari attorno a cilindri, prismi ed ali. Anche in questo caso, però, l'inadeguatezza degli strumenti di misura non permise a Prandtl di ottenere misure quantitative dei campi di moto.

I progressi fatti negli ultimi 20 anni nei campi dell'ottica, dell'elettronica, dell'informatica e delle apparecchiature video hanno consentito di sviluppare una nuova tecnica adatta contemporaneamente a visualizzazioni qualitative di flussi ed a misure quantitative di complessi campi di velocità istantanei. Detta tecnica, il cui studio e le cui applicazioni sono oggetto del presente lavoro di tesi, prende il nome di *Particle Image Velocimetry* (PIV). Per ottenere misure di velocità con tale tecnica, occorre inserire nel flusso in esame delle piccole particelle traccianti che seguano fedelmente il moto del fluido. Con un fascio di luce laser impulsivo si illuminano le particelle traccianti appartenenti ad una sezione piana in due istanti di tempo successivi. La misura della velocità si basa sulla stima dello spostamento delle particelle in un determinato intervallo di tempo; generalmente per valutare lo spostamento si registrano le immagini delle particelle, nei due istanti di tempo distinti (doppia esposizione), con una telecamera digitale.

In Figura 0.1 è riportato un tipico apparato sperimentale per la registrazione di immagini PIV in galleria del vento, ma uno schema analogo è utilizzabile anche per flussi non confinati. Il piano di misura è illuminato due volte da un fascio piano di luce laser e le immagini della luce diffusa dalle particelle traccianti sono acquisite con un sensore CCD e registrate sulla memoria di un computer in tempo reale. Per l'analisi delle visualizzazioni di flusso ottenute mediante tecnica PIV digitale si suddivide ciascuna immagine in aree di piccole dimensioni dette finestre o celle di interrogazione, sulle quali si assume che lo spostamento sia costante. Lo spostamento locale per ciascuna finestra di interrogazione è calcolato con strumenti statistici (auto o mutua correlazione), la proiezione del vettore velocità sul piano di misura, invece, si ottiene in maniera indiretta conoscendo l'intervallo di tempo tra i due impulsi di luce laser.

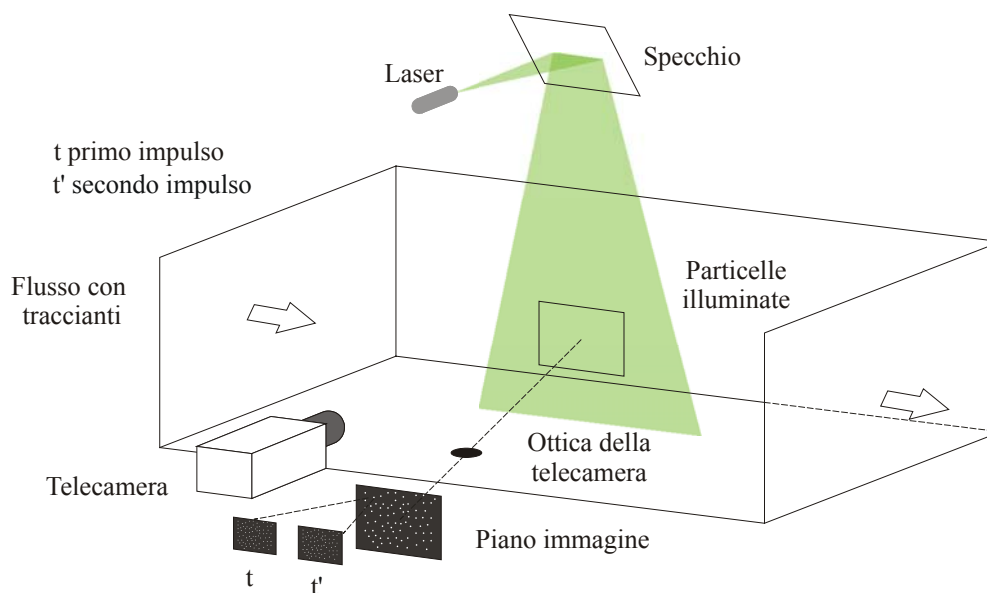


Figura 0.1. Tipico apparato sperimentale per la Particle Image Velocimetry in una galleria del vento.

Già in questa fase introduttiva, senza dilungarsi nei dettagli tecnici, è indispensabile sottolineare alcuni aspetti fondamentali della tecnica PIV. Al contrario delle tecniche anemometriche che impiegano sonde, la PIV, utilizzando metodi ottici, è una tecnica non-intrusiva e consente di ottenere misure anche nel caso di flussi con velocità elevate. Al contrario delle tecniche di misura puntuali, la PIV fornisce la misura di mille o più vettori nello stesso istante di tempo, rendendo più agevole l'individuazione di strutture vorticosi anche in moti non stazionari.

La necessità di avere particelle piccole che seguano fedelmente il flusso è in contrasto con la capacità di produrre un'elevata diffusione della luce che consenta di distinguere le particelle sulle immagini registrate e, per tale motivo, in molte applicazioni è necessario giungere ad un compromesso. La durata dell'impulso di luce deve essere abbastanza piccola da evitare la riproduzione di scie nell'immagine; al contrario, l'intervallo di tempo tra le due esposizioni deve essere abbastanza lungo da poter determinare lo spostamento delle particelle e allo stesso tempo abbastanza breve da evitare che le particelle con componente di velocità ortogonale al piano di misura abbandonino il fascio di luce. Per quanto riguarda la densità delle particelle traccianti, al fine di ottenere immagini PIV ad alta qualità è necessario che il numero di particelle sia distribuito in maniera uniforme sull'immagine e che la densità non sia né troppo elevata né troppo bassa. Le dimensioni delle aree di interrogazione devono essere, invece, abbastanza piccole da permettere di individuare i gradienti di velocità presenti nel fluido in esame. Infine, per quanto concerne l'acquisizione di sequenze temporali di immagini PIV, i limiti tecnici nelle frequenze di acquisizione delle telecamere e dei sistemi laser pulsati non permettono, nella maggior parte dei casi, di seguire la scala temporale dei flussi¹.

Il limite principale della tecnica PIV si riscontra nelle misure di flussi fortemente tridimensionali; in tal caso, infatti, essendo presente anche la componente del flusso ortogonale al piano di misura, la PIV oltre a non essere in grado di misurare detta componente, può fornire grossi errori nella valutazione delle componenti di velocità nel piano di misura a causa degli errori prospettici indotti. Per superare tale limite si fa ricorso alla PIV stereoscopica, conosciuta anche come 3C-PIV (PIV a tre componenti). Utilizzando due telecamere inquadranti lo stesso piano secondo angoli diversi è possibile misurare le componenti di velocità secondo prospettive diverse e, da queste, risalire alle tre componenti reali della velocità. Per ottenere tale risultato sono stati sperimentati in letteratura numerosi sistemi, alcuni dei quali costituiscono l'oggetto di indagine del presente lavoro di tesi. I dettagli relativi a questi metodi verranno illustrati accuratamente nei successivi capitoli del presente lavoro, in questa fase è utile, però, mettere in luce alcune delle problematiche che si riscontrano nella realizzazione di tali apparati.

Nella messa a punto di apparati per PIV stereoscopica, bisogna tenere in debito conto innanzitutto la maggiore complessità del layout del sistema di misura e delle attrezzature: dovendo utilizzare due telecamere, spesso si possono avere problemi di interfaccia ottica e di ingombri che, come vedremo in seguito, possono inficiare la qualità della misurazione. Inoltre, dovendosi generalmente realizzare una rotazione della lente rispetto al piano del sensore delle telecamere (rispettando la condizione di Scheimpflug), sono richiesti per la configurazione stereoscopica supporti più flessibili e costosi. Un altro inconveniente che si riscontra è collegato all'accuratezza della misura; come sarà dimostrato per via analitica, l'errore di misura della componente normale al piano è sempre superiore rispetto a quello relativo alle componenti nel piano e soltanto per alcuni angoli di vista tende a diventare lo stesso. Ciò ovviamente riduce notevolmente la flessibilità dell'apparato e rischia di compromettere la bontà della misura.

Un ulteriore problema nella realizzazione di un sistema 3C-PIV, risiede nella necessità di effettuare un'accurata calibrazione preliminare per tener conto degli errori prospettici causati dalla non ortogonalità tra il piano di misura e l'asse delle telecamere. Il ricorso alla calibrazione rende i metodi adottati molto sensibili agli errori di allineamento tra il fascio di luce ed il piano su cui è

¹ Di recente, l'utilizzo di telecamere ad elevata frequenza di acquisizione ha consentito di migliorare notevolmente la capacità, da parte dei sistemi PIV, di seguire le strutture vorticosi.

fatta la calibrazione; per di più, l'elevata sensibilità del sistema agli errori angolari rende particolarmente lunghe e laboriose le operazioni preliminari alla realizzazione delle misure (allineamenti accurati, calibrazioni, ecc.), oltre a rendere necessaria l'implementazione di software più complicati per l'elaborazione delle immagini. Quest'ultimo inconveniente può comportare un notevole allungamento dei tempi di elaborazione delle immagini acquisite.

Tutti i problemi cui si è appena fatto cenno sono stati risolti in maniera più o meno definitiva con metodi diversi a seconda del tipo di procedura adottata, tuttavia sono senz'altro da preferire le tecniche che permettono di realizzare gli approcci più semplici e robusti. Uno degli scopi che ci si è prefissati nell'affrontare il presente lavoro di tesi è stato quello di indagare in maniera più approfondita l'influenza degli errori di allineamento tra il piano di misura e quello di calibrazione al fine di ottenere misure più accurate.

Da un punto di vista più strettamente applicativo, essendo la tecnica relativamente recente, i campi su cui sono state fatte indagini PIV accurate non sono molto numerosi. Tra le tante fenomenologie oggetto di studio negli ultimi anni, si è scelto di utilizzare le tecniche stereoscopiche per determinare le caratteristiche fluidodinamiche di un getto che si immette in un flusso trasversale. Questo tipo di fenomenologia riveste un ruolo di primo piano in numerose applicazioni ingegneristiche sia in campo ambientale, sia in ambito aeronautico ed industriale. In ambito ambientale ogni qualvolta un flusso venga espulso nell'atmosfera attraverso ciminiera o venga immesso nei fiumi attraverso scarichi ci si trova in presenza di un getto immesso in un flusso trasversale. L'immissione di carburante in camera di combustione, la dinamica del flusso nei voli di transizione di velivoli V/STOL e il raffreddamento delle pale di turbine con film cooling costituiscono un esempio tipico di applicazioni nel settore meccanico ed aeronautico. In ambito industriale, invece, sono frequenti le situazioni in cui il flusso proveniente da un condotto venga immesso lateralmente in un altro condotto.

Anche se la fenomenologia del getto che si immette in un flusso trasversale è piuttosto complessa, la realizzazione di un apparato finalizzato al suo studio non è particolarmente complicata. In letteratura sono presenti numerosi studi sperimentali e simulazioni numeriche del campo fluidodinamico e, per quanto riguarda l'applicazione al film cooling, sono presenti diverse indagini sperimentali sullo scambio termico alla parete da cui fuoriesce il getto effettuate con diverse tecniche di misura.

Per meglio collegare gli aspetti inerenti al raffreddamento della parete con le caratteristiche fluidodinamiche in prossimità di esse, si è deciso di effettuare un'analisi comparata tra il campo di moto e le statistiche turbolente, misurate con la tecnica PIV stereoscopica, e lo scambio termico misurato utilizzando il sensore di flusso termico *heated thin foil* ed associato alle misure della temperatura superficiale mediante termografia all'infrarosso. Quest'ultima tecnica, rispetto alle tecniche tradizionali, permette di ottenere misure bidimensionali non intrusive ad elevata risoluzione spaziale. Inoltre, acquisendo immagini termiche digitali, la tecnica presenta tutti i vantaggi derivanti da un'elaborazione al calcolatore.

Il lavoro che segue è articolato nella seguente maniera. Nella prima parte della tesi saranno richiamati gli aspetti fondamentali riguardanti la PIV a due componenti riassumendo, per quanto possibile, lo stato dell'arte in cui si trova la tecnica. Successivamente saranno introdotte le tecniche stereoscopiche più utilizzate e saranno riportati i risultati derivanti dall'analisi teorica effettuata sugli errori di allineamento nelle suddette metodologie di misura. Nella seconda parte, dopo aver introdotto brevemente la tecnica termografica e le indagini sperimentali effettuate da altri autori sul getto in un flusso trasversale, sarà descritto l'apparato sperimentale e saranno riportati i maggiori risultati ottenuti nella sperimentazione, sia nella parte riguardante le verifiche sperimentali sugli errori di allineamento, sia nella parte riguardante le misure sul getto in un flusso trasversale.

1. ASPETTI FISICI E TECNICI DELLA TECNICA PIV

In questo capitolo sono analizzati in maniera sintetica gli aspetti fisici principali che sono coinvolti quando si effettuano misure con tecnica PIV. Essi riguardano per lo più le caratteristiche fisiche ed ottiche dei traccianti ed il processo di formazione dell'immagine PIV così come viene registrata su fotogramma o in forma digitale. Un rapido cenno è fornito in merito agli aspetti tecnici di base concernenti le apparecchiature fondamentali utilizzate. Le specifiche relative alle apparecchiature usate nel presente lavoro di tesi verranno fornite successivamente. La maggior parte delle informazioni fornite nel capitolo sono state tratte da Raffel et al. (1998).

1.1. Particelle traccianti

Come già osservato, il principio alla base della PIV, al contrario dell'anemometria a filo caldo e delle tecniche utilizzanti sonde di pressione, si basa sulla misura diretta delle grandezze fondamentali della velocità: spazio e tempo. Al contempo, la tecnica di misura è indiretta in quanto si misura la velocità delle particelle anziché quella del fluido e, per tale ragione, è indispensabile analizzare contemporaneamente sia le proprietà meccaniche che quelle ottiche del fluido. Come già anticipato e come verrà illustrato nei prossimi paragrafi, le dimensioni delle particelle da utilizzare sono un compromesso tra la capacità di seguire il flusso, che richiede dimensioni piccole, e la necessità di una sufficiente diffusione della luce incidente che richiede dimensioni elevate.

1.1.1. Proprietà meccaniche del fluido

Indipendentemente dalla natura del fenomeno indagato, le particelle traccianti devono essere costituite da sostanze chimicamente inerti al fluido in esame e devono rispettare, per ovvi motivi di sicurezza, le condizioni di non tossicità e non corrosività. Oltre a questi vincoli, la scelta delle particelle traccianti è fortemente influenzata dal fatto che, dovendo fornire informazioni sul flusso, è indispensabile che seguano le medesime leggi di moto del fluido. Pertanto, esse devono avere proprietà tali da rendere trascurabile l'effetto delle forze cui sono sottoposte. Se si indicano con \underline{U}_p la velocità delle particelle traccianti e con \underline{U} quella della corrente, l'errore che si commette, detto errore di scorrimento, è definito come:

$$\varepsilon_s = \frac{|\underline{U}_p| - |\underline{U}|}{|\underline{U}|}. \quad (1.1)$$

Quando il fluido ed il tracciante hanno densità diverse, una prima fonte di errore deriva dalle forze gravitazionali. Sebbene nella maggior parte dei casi gli effetti gravitazionali siano trascurabili, è utile richiamare la velocità \underline{U}_g indotta da detti effetti per introdurre il comportamento delle particelle in presenza di una generica accelerazione \underline{a} del flusso. Per particelle di dimensioni sufficientemente piccole, come nel caso in esame, è lecito assumere per esse una forma sferica. Per numeri di Reynolds molto piccoli (minori dell'unità se si prende come lunghezza di riferimento il diametro della particella) e supponendo che il numero di particelle per unità di volume sia sufficientemente basso da poter trascurare le interazioni mutue, si può utilizzare la legge di resistenza di Stokes ottenendo l'espressione:

$$\underline{U}_g = d_p^2 \frac{(\rho_p - \rho)}{18\mu} \underline{g} \quad (1.2)$$

in cui \underline{g} è l'accelerazione di gravità, μ è la viscosità dinamica del fluido, ρ_p e ρ sono la densità delle particelle traccianti e del fluido rispettivamente e d_p è il diametro della particella. Analogamente all'equazione (1.2), nel caso di una particella in un fluido animato da moto uniformemente accelerato si ottiene per la velocità di scorrimento \underline{U}_s la seguente espressione:

$$\underline{U}_s = \underline{U}_p - \underline{U} = d_p^2 \frac{(\rho_p - \rho)}{18\mu} \underline{a}. \quad (1.3)$$

Per valutare la capacità delle particelle di seguire il flusso anche in presenza di fenomeni instazionari come le onde d'urto, si può calcolare la risposta al gradino di \underline{U}_p . Se la densità della particella è molto maggiore di quella del fluido, sotto le stesse ipotesi adottate finora, la risposta al gradino segue tipicamente una legge esponenziale:

$$\underline{U}_p(t) = \underline{U} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right) \right] \quad (1.4)$$

con un tempo di rilassamento τ_s dato da:

$$\tau_s = d_p^2 \frac{\rho_p}{18\mu}. \quad (1.5)$$

Se l'accelerazione del fluido non è costante o se non si è nelle condizioni di validità della legge di Stokes, le equazioni del moto delle particelle non sono facilmente risolvibili e la legge di decadimento non è semplicemente esponenziale; il tempo di rilassamento rimane comunque uno strumento utile alla stima della tendenza delle particelle a seguire il campo di moto imposto dal fluido. La risposta al gradino di particelle di diverso diametro immerse in aria sottoposta a forte decelerazione è mostrata in Figura 1.1 dalla quale si evince che particelle con diametro minore seguono meglio il comportamento del fluido in presenza di forti discontinuità nel capo di moto. Dall'equazione (1.3) si può vedere che, se la differenza di densità tra il fluido ed le particelle traccianti è significativa, il diametro delle particelle deve essere abbastanza piccolo per ottenere una misura attendibile del campo di moto. Nel caso di applicazioni con liquidi è relativamente semplice trovare particelle con densità simile a quella del fluido e, di solito, il problema si risolve utilizzando particelle solide in sospensione nel liquido.

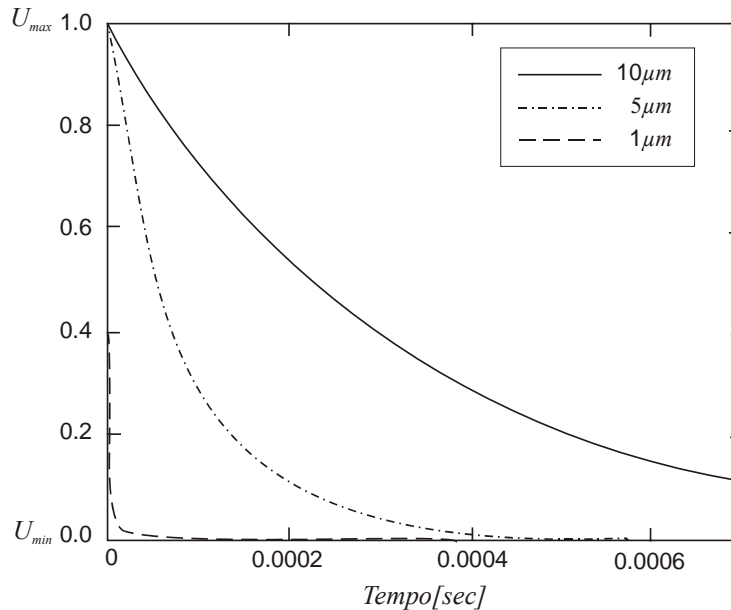


Figura 1.1 Andamento della risposta a gradino in funzione del tempo per particelle d'olio in un flusso d'aria sottoposto ad una forte decelerazione (Raffel et al., 1998).

1.1.2. Proprietà di diffusione della luce delle particelle traccianti

Oltre alle caratteristiche meccaniche sono molto importanti anche le caratteristiche ottiche del tracciante, in quanto, come si vedrà nel seguito, per migliorare l'affidabilità della misura è necessario avere immagini ad elevato contrasto. Poiché l'intensità luminosa delle immagini delle particelle è di conseguenza il contrasto nelle immagini PIV è direttamente proporzionale al potere di diffusione della luce, spesso è più efficace ed economico aumentare l'intensità luminosa delle immagini scegliendo particelle con un potere riflettente più elevato piuttosto che aumentare la potenza del laser. In generale, si può affermare che l'intensità della luce diffusa dalle particelle è funzione del rapporto tra l'indice di rifrazione delle particelle e quello del mezzo circostante, del-

le dimensioni, della forma e dell'orientazione delle particelle, della polarizzazione e dell'angolo di osservazione. Per particelle sferiche con un diametro maggiore della lunghezza d'onda della luce incidente, si può utilizzare la teoria di Mie (van de Hulst, 1957) sulla diffusione della luce (*scattering*).

La Figura 1.2 (Raffel et al., 1998) mostra la distribuzione polare dell'intensità luminosa della luce diffusa da particelle di olio di diametro differente in aria alla lunghezza d'onda $\lambda = 532nm$. L'intensità è diagrammata in scala logaritmica ed è rappresentata in modo che due cerchi adiacenti differiscano di un fattore pari a 100. La diffusione alla Mie può esser caratterizzata da un diametro normalizzato, q , definito come:

$$q = \frac{\pi d_p}{\lambda} \quad (1.6)$$

Se q è maggiore dell'unità, approssimativamente q massimi locali appaiono nella distribuzione angolare all'interno dell'intervallo tra 0° e 180° . Per valori crescenti di q il rapporto tra l'intensità della luce diffusa in avanti rispetto a quella diffusa indietro aumenta rapidamente. In base a quanto detto sarebbe vantaggioso registrare le immagini dal lato verso cui avanza il fascio di luce (180°), ma, a causa delle limitazioni imposte dalla profondità di campo, di solito si effettuano registrazioni a 90° rispetto al fascio di luce. Nel caso si effettuino misure con PIV stereoscopica, poiché si utilizzano due telecamere inquadranti secondo angoli di osservazione diversi, dovendo evitare di orientare ciascuna delle due telecamere verso zone poco illuminate si hanno ulteriori limiti alla scelta dell'angolo di osservazione. Nel caso si utilizzino tecniche che si basano sulla polarizzazione della luce diffusa bisogna tener presente che solo la luce diffusa parassialmente (0° e 180°) è polarizzata nella stessa direzione della luce incidente ed ha efficienza indipendente dalla polarizzazione.

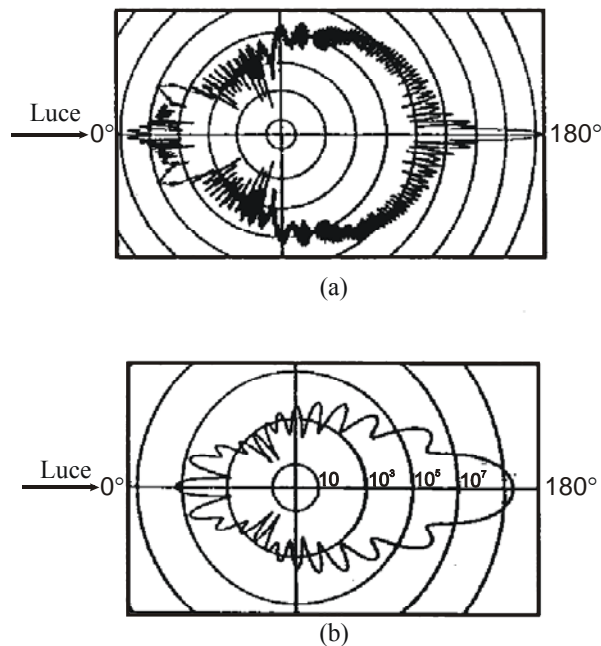


Figura 1.2 Distribuzione polare dell'intensità della luce diffusa da particelle di olio in aria per diversi diametri e per una lunghezza d'onda di $532nm$ secondo la teoria di Mie. (a) Diametro pari a $10 \mu m$. (b) Diametro pari a $1 \mu m$.

Come si è visto, c'è una chiara tendenza dell'intensità della luce diffusa a crescere con il diametro della particella, però al crescere di q cresce rapidamente anche il numero dei massimi e minimi. Ciò può creare qualche problema nelle tecniche che, a partire dall'intensità dell'immagine, calcolano la componente di velocità ortogonale al piano di misura analizzando la posizione delle particelle in un fascio di luce con profilo di intensità noto. Se si media su un intervallo di angoli di vista, che è determinato dalla distanza e dall'apertura delle lenti, le curve di intensità sono più regolari. L'intensità media cresce bruscamente con q^2 , mentre, come già osservato, l'ef-

ficienza della diffusione dipende fortemente dal rapporto tra l'indice di rifrazione delle particelle e quello del mezzo. Poiché l'indice di rifrazione dell'acqua è molto più alto rispetto a quello dell'aria, a parità di dimensione la diffusione delle particelle nell'aria è almeno un ordine di grandezza superiore a quello dell'acqua. Per tale ragione in quest'ultima le particelle devono essere più grandi, cosa possibile dal momento che in questo caso si possono avere densità più simili tra fluido e tracciante. In Figura 1.3 (Raffel et al., 1998) è mostrata, per λ pari a $532nm$, l'intensità della luce diffusa da particelle di vetro in acqua per diversi valori del diametro.

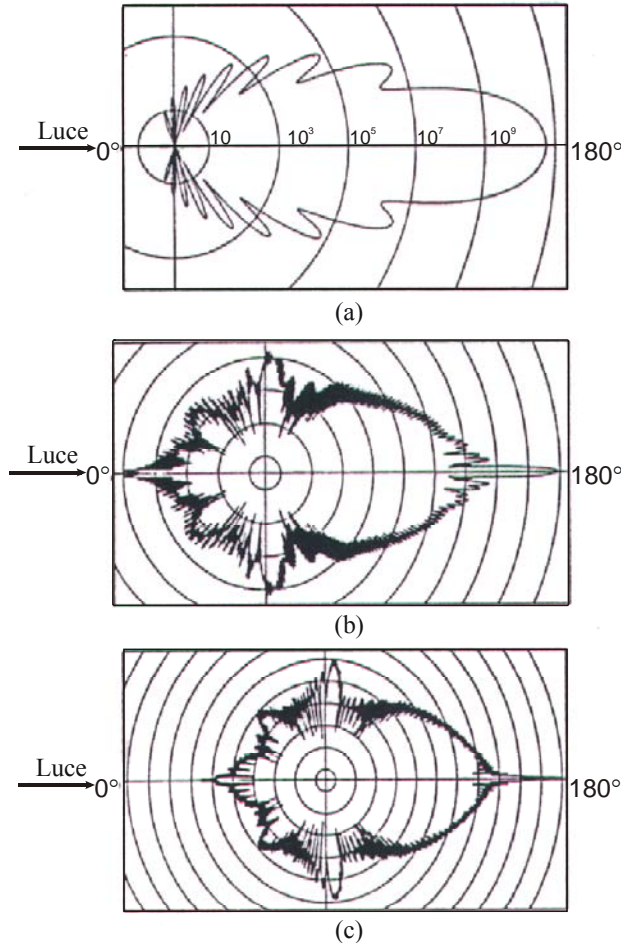


Figura 1.3 Distribuzione polare dell'intensità della luce diffusa da particelle di vetro di in acqua per diversi diametri e per una lunghezza d'onda di $532nm$ secondo la teoria di Mie. (a) $1\mu m$; (b) $10\mu m$; (c) $30\mu m$.

Dai diagrammi di diffusione di Mie si può vedere che l'intensità della radiazione incidente non è bloccata dalle particelle, ma è dispersa in ogni direzione. Le particelle traccianti sono pertanto illuminate oltre che dalla luce diretta anche dalla luce diffusa dal gran numero di particelle presenti nel flusso e ciò contribuisce ad aumentare l'illuminazione di ogni singola particella. Se ne deduce che si può aumentare l'efficienza della diffusione non solo incrementandone le dimensioni, ma anche aumentandone la densità. Due però sono i problemi che limitano l'utilizzo di flussi ad alta densità: il primo è legato all'aumento del rumore di fondo derivante dalla maggiore densità (questo implica che il rumore nelle registrazioni aumenta significativamente); il secondo è dovuto al fatto che, utilizzando, come di solito accade, particelle di diverse dimensioni, non è sicuro che il numero di particelle visibili aumenti semplicemente aumentando quelle di dimensioni più grandi. Dal momento che le immagini delle particelle più grandi dominano chiaramente l'analisi del campo, diventerebbe difficile fare stime accurate sulle dimensioni effettive delle particelle e sul corrispondente errore di scorrimento.

1.1.3. Generazione ed iniezione di particelle traccianti

Nella letteratura tecnica sono state analizzate dettagliatamente le caratteristiche delle particelle traccianti, mentre poca attenzione è stata dedicata alle modalità di immissione nel fluido in esame. A volte, l'utilizzo di traccianti naturali, quali le polveri presenti nell'aria, è accettabile quando il numero di particelle visibili è tale da permettere un calcolo corretto del campo di moto. In quasi tutti gli esperimenti è necessario, invece, aggiungere particelle traccianti in modo da poter ottenere un sufficiente contrasto dell'immagine ed un controllo più preciso delle dimensioni delle particelle. Per la maggior parte dei flussi nei liquidi, questo può essere fatto sospendendo particelle solide nel fluido e mescolandole in modo da ottenere una distribuzione omogenea. Per la visualizzazione di flussi e per le applicazioni PIV, esiste la possibilità di scegliere tra un discreto numero di particelle traccianti. Nel caso di esperimenti in flussi d'acqua ed olio sono molto utilizzate particelle sferiche di vetro con diametro di $10\mu\text{m}$, che offrono una buona diffusione ed una velocità di scorrimento abbastanza bassa. In Tabella 1.1, invece, sono elencati i materiali più utilizzati per gli esperimenti in flussi gassosi.

Tipo	Materiale	Diametro medio in μm
Solido	Polistirene	0.5 – 10
	Alluminio	2 – 7
	Magnesio	2 – 5
	Microsfere di vetro	30 – 100
	Granuli di rivestimenti sintetici	10 – 50
	Diottilfitalato	1 – 10
Fumo		< 1
Liquido	Oli vari	0.5 – 10

Tabella 1.1 Materiali traccianti utilizzati per i flussi gassosi.

Nei flussi gassosi, l'immissione di particelle traccianti è molto spesso più critica sia per la qualità e la fattibilità delle misure, sia per la salute degli operatori che, per esempio in prossimità delle gallerie del vento con camere di prova aperte, respirano la miscela tra aria e particelle traccianti. Le particelle generalmente utilizzate sono difficilmente trattabili, dato che le goccioline liquide tendono ad evaporare piuttosto rapidamente, mentre quelle solide sono difficili da disperdere e tendono facilmente ad agglomerarsi. Per questo motivo le particelle non possono essere immesse molto tempo prima della misura, ma devono essere iniettate nel flusso poco prima che il mezzo fluido attraversi la sezione di prova. L'immissione deve avvenire in maniera tale da non disturbare significativamente il flusso e da ottenere una distribuzione omogenea di particelle. Poiché, spesso, il livello di turbolenza nelle camere di prova non consente un mescolamento sufficiente tra fluido e particelle, queste ultime devono essere iniettate da un numero elevato di aperture praticate su un distributore, che in molti casi è costituito da un tubo dotato di minuscoli fori. A tale scopo sono necessarie particelle che possano essere trasportate all'interno di piccoli tubi.

Molte sono le tecniche utilizzate per generare ed immettere particelle traccianti nei flussi d'aria, ad esempio polvere secca può essere dispersa in letti fluidificati o con getti d'aria. I liquidi possono essere vaporizzati e successivamente condensati nei così detti generatori a condensazione, oppure goccioline di liquido possono essere generate direttamente negli atomizzatori. Atomizzatori possono anche essere utilizzati per disperdere particelle solide sospese in liquidi in fase di vaporizzazione, o per generare minuscole gocce di liquidi ad elevata tensione di vapore (per esempio oli) che sono stati mescolati con liquidi a bassa tensione di vapore (ad esempio alcool) che evaporano prima della sezione di prova. Per la maggior parte delle misure PIV in flussi d'aria sono utilizzati generatori con *ugello Laskin* con olio vegetale (Melling, 1997), le cui particelle offrono il vantaggio di non essere tossiche, di restare sospese in aria per ore e di non cambiare significativamente dimensione al variare delle condizioni esterne. Di seguito è fornita una breve descrizione di questo tipo di atomizzatore, detto anche nebulizzatore, il cui schema è ripor-

tato in Figura 1.4.

Il generatore di aerosol consta di un contenitore cilindrico chiuso con due ingressi per l'aria ed un'uscita per l'aerosol. Quattro condotti per l'immissione di aria sono immersi nell'olio vegetale contenuto nel contenitore e ciascun tubo, collegato all'alimentazione dell'aria per mezzo di un altro tubo, è dotato di una valvola. I condotti sono chiusi all'estremità inferiore e ciascuno è dotato di quattro ugelli Laskin di diametro pari ad 1mm ed uniformemente distanziati lungo la circonferenza. Una piastra impattatrice orizzontale è posizionata all'interno del contenitore in modo da formare una piccola cavità di 2mm tra la piastra circolare e la parte interna delle pareti del contenitore. Il secondo ingresso per l'aria e l'uscita dell'aerosol sono collegati direttamente alla parete superiore del contenitore e, due sonde misurano la pressione all'ingresso degli ugelli ed all'interno del contenitore rispettivamente. L'aria compressa con pressione superiore di $0.5\text{--}1.5\text{ bar}$ rispetto a quella di uscita è iniettata negli ugelli Laskin creando bolle d'aria all'interno del liquido. A causa degli sforzi viscosi generati dai getti sonici, piccole gocce di liquido sono generate e trasportate all'interno delle bolle verso la superficie di separazione dell'olio. Le particelle grandi sono bloccate dalla piastra impattatrice, mentre le particelle piccole passano attraverso la fessura raggiungendo l'uscita dell'aerosol. Il numero di particelle può essere controllato per mezzo delle quattro valvole all'ingresso, la loro concentrazione, invece, può essere diminuita immettendo un maggiore quantitativo di aria dal secondo ingresso. La dimensione delle particelle dipende principalmente dal tipo di liquido utilizzato e, in misura minore, dalla pressione esercitata all'interno degli ugelli. Gli oli maggiormente utilizzati come tracciante sono gli oli vegetali, in quanto la loro inalazione è meno pericolosa di altri tipi di particelle. Siffatti oli producono soluzioni poli-disperse con diametro medio delle particelle di circa $1\mu\text{m}$. In generale, tutte le particelle traccianti che non sono solubili in acqua non dovrebbero essere inalate.

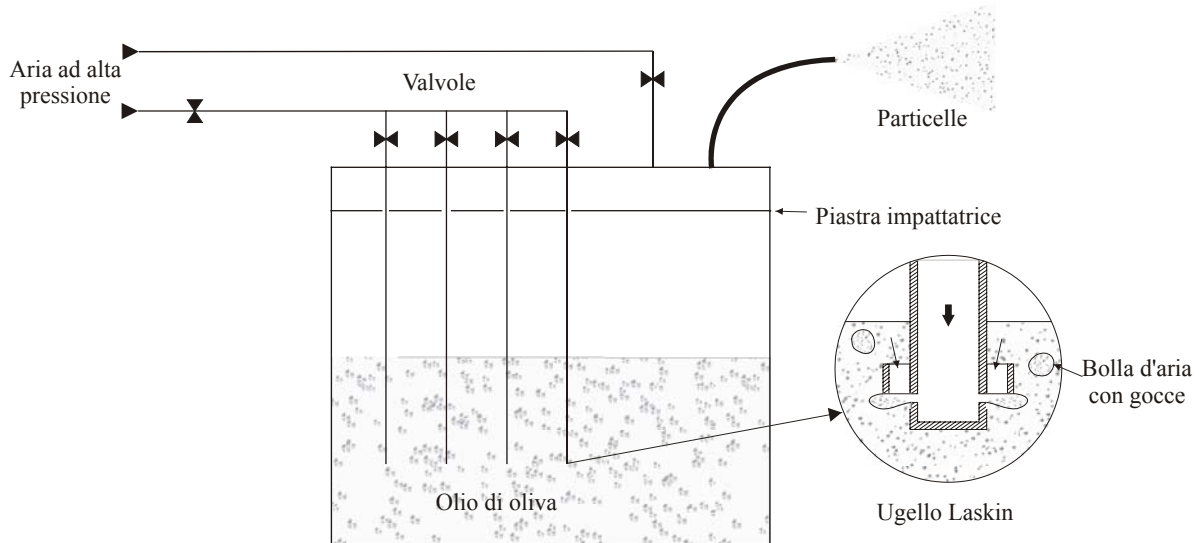


Figura 1.4 Generatore di particelle traccianti di olio con ugelli Laskin.

1.2. Sorgenti di luce

1.2.1. Laser

Il laser, acronimo dell'inglese *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (amplificazione della luce mediante emissione stimolata di radiazione), è largamente utilizzato nelle tecniche PIV per la sua capacità di emettere luce monocromatica, coerente e con una grande densità di energia, che può essere facilmente concentrata in un sottile fascio di luce per illuminare e registrare le particelle traccianti senza aberrazioni cromatiche. Tre sono gli elementi principali costituenti un laser: il "materiale attivo", il sistema di pompaggio ed il risonatore ottico. Il materiale attivo è costituito generalmente da gas atomico o molecolare, da un semiconduttore o da un ma-

teriale solido. Il sistema di pompaggio eccita il materiale attivo per mezzo di energia chimica o elettromagnetica. Il risonatore ottico, generalmente costituito da una serie di specchi, ha la funzione di amplificare la radiazione emessa dal materiale attivo. Di seguito è descritto il principio di funzionamento di un laser a gas che, come già accennato, si basa sull'emissione stimolata della luce.

Dalla meccanica quantistica è noto che un atomo può trovarsi a diversi livelli energetici. Indicando con E_1 il livello energetico di partenza e con E_2 il livello successivo ad energia maggiore, ogni atomo può passare da un livello all'altro soltanto assorbendo o emettendo sotto forma di fotone una quantità discreta di energia data dalla legge di Planck $E_2 - E_1 = h\nu$, in cui h è la costante di Planck pari a $6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ e ν è la frequenza caratteristica del fotone incidente o emesso. Di solito, un atomo eccitato allo stato E_2 ritorna spontaneamente allo stato E_1 emettendo un fotone diretto in maniera casuale; in questo caso si parla di *emissione spontanea*. Quando l'atomo, invece, è investito da un fotone avente energia $h\nu$ possono aver luogo due processi: un atomo allo stadio non eccitato assorbe il fotone passando al livello eccitato (*assorbimento*) oppure un atomo allo stadio eccitato passa allo stadio non eccitato emettendo in fase con il fotone incidente un altro fotone di pari energia; in quest'ultimo caso si parla di *emissione stimolata* e la luce emessa risulta amplificata. Se si considera ora un elevato numero di atomi in equilibrio termodinamico alla temperatura T e si indica con N_1 ed N_2 il numero di atomi delle popolazioni che si trovano nello stato E_1 ed E_2 rispettivamente, in base alla statistica di Boltzmann, si ha che all'equilibrio termico la popolazione a livello energetico minore è sempre più popolata di quella a livello energetico maggiore; se in particolare $E_2 - E_1 \gg kT$ (con k costante di Boltzmann pari a $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$) il numero di atomi presenti allo stato energetico maggiore tende a zero. Inoltre, sottoponendo detto gruppo di atomi ad una radiazione elettromagnetica, si ha che se $h\nu \gg kT$ l'emissione spontanea prevale su quella stimolata.

In base a quanto detto risulta che, per ottenere un'elevata intensità della luce (coerenza di fase), è necessario far prevalere l'emissione stimolata della popolazione di atomi. In base alla statistica di Boltzmann, però, la popolazione ad energia minore prevale su quella ad energia maggiore; di conseguenza, la radiazione incidente ha come risultato l'assorbimento piuttosto che l'emissione stimolata. Per far sì che il secondo processo prevalga sul primo è necessario ottenere un'*inversione della popolazione* in maniera forzata mediante *pompaggio*. Si potrebbe obiettare che alle frequenze ottiche prevalga l'emissione spontanea rispetto a quella stimolata, tuttavia, essendo l'emissione stimolata coerente, quest'ultima risulta notevolmente amplificata rispetto alla prima. Se il sistema è costituito soltanto da due livelli energetici, non è possibile ottenere l'inversione della popolazione, infatti, all'equilibrio, il numero di atomi N_2 uguaglia il numero di atomi N_1 , l'assorbimento e l'emissione risultano ugualmente probabili ed il materiale risulta trasparente alla frequenza $\nu = (E_2 - E_1)/h$. Per tale ragione è indispensabile avere almeno un sistema a tre livelli, in cui il terzo livello (di pompaggio) funge da livello di transizione. Tale concetto è meglio illustrato in Figura 1.5(a). Gli atomi assorbono radiazioni alla frequenza ν_{13} corrispondente alla differenza di energia $E_3 - E_1$ passando dal primo al terzo livello, mentre emettono radiazioni alla frequenza ν_{21} corrispondente alla differenza $E_2 - E_1$. Poiché la transizione dallo stato 3 allo stato 2 avviene in un tempo (t_{32}) minore rispetto alla transizione dallo stato 2 allo stato 1 (t_{21}), nel livello 2 si produce un accumulo di atomi; in tal modo il livello 2 risulta più popolato del livello 1 senza contraddire la statistica di Boltzmann. Si noti che il pompaggio deve avvenire con una radiazione a banda non troppo larga, per migliorare l'efficienza, e ad una frequenza diversa da quella di emissione del laser.

Un sistema a tre livelli non è efficiente perché, per avere emissione stimolata, bisogna eccitare più del 50% degli atomi al livello 1. Un sistema migliore da questo punto di vista è costituito dal sistema a quattro livelli mostrato in Figura 1.5(b). In questo caso il livello verso cui si portano gli atomi in seguito all'emissione stimolata non coincide con il livello base E_1 , ma con il livello E_2 che tende a rimanere vuoto in quanto la transizione dallo stato 2 allo stato 1 avviene in maniera rapida. In definitiva, poiché il livello 3 tende a riempirsi mentre il livello 2 tende a svuotarsi, si

determina un'efficace inversione di popolazione tra i livelli tra i quali avviene l'emissione della radiazione laser. Infine, occorre sottolineare che l'emissione spontanea, avvenendo in tutte le direzioni, produce l'eccitazione degli atomi vicini; ciò fa incrementare l'emissione stimolata inducendo una reazione a catena.

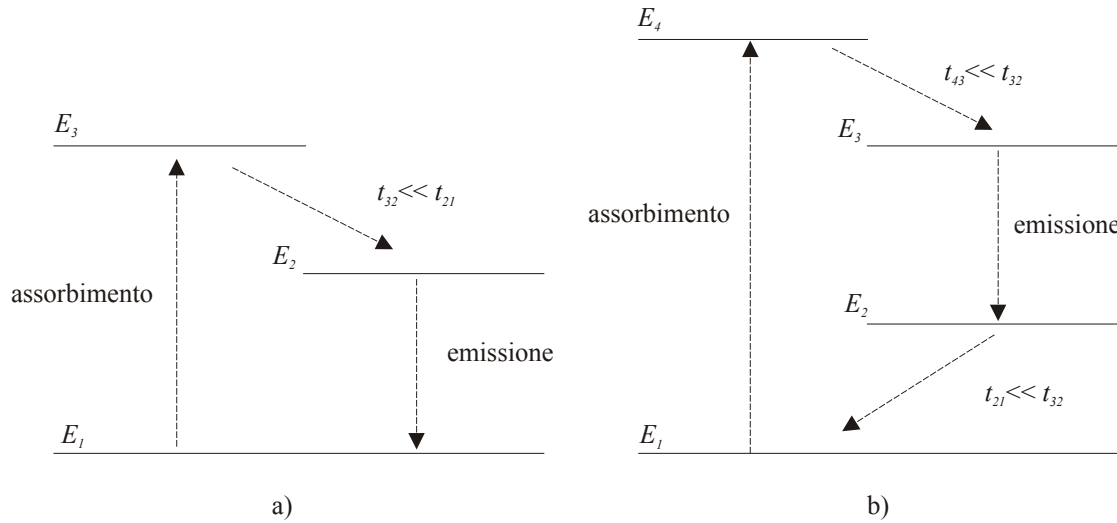


Figura 1.5 Sistema di inversione della popolazione a tre (a) e quattro livelli (b).

Come è stato già accennato, un altro componente fondamentale del laser è il risonatore ottico. Quest'ultimo è generalmente costituito da due specchi posti uno di fronte all'altro alle estremità opposte del mezzo attivo ed ha la funzione di amplificare il fascio di luce laser. La radiazione emessa, infatti, viene riflessa avanti ed indietro dagli specchi e si amplifica ad ogni passaggio nel mezzo attivo fino a raggiungere un processo stazionario. Il risonatore ha anche il compito di amplificare soltanto radiazioni di lunghezze d'onda λ rispettanti la condizione:

$$L = \frac{m\lambda}{2n} \quad (1.7)$$

in cui L è la lunghezza della cavità risonante, n è l'indice di rifrazione del mezzo ed m è un numero intero. A causa della durata finita del processo di emissione di fotoni, lo spettro di emissione non è un impulso di Dirac sulla frequenza ν , ma una distribuzione in frequenza centrata in ν con larghezza di banda $\Delta\nu$ tanto maggiore quanto minore è la durata dell'emissione. Per tale motivo, il risonatore può oscillare secondo diversi modi con frequenze differenti di una quantità $\Delta\nu = c/(2Ln)$, in cui c è la velocità della luce. Inoltre, la sezione trasversale del fascio di luce può presentare modi trasversali diversi con la presenza eventuale di nodi nel fascio a seconda della forma e dell'allineamento del risonatore. Il modo trasversale di ordine minore TEM₀₀ (TEM è l'acronimo di transverse electronic mode; i pedici indicano i modi nelle direzioni X ed Y rispettivamente) è il più usato in quanto genera una distribuzione gaussiana nel fascio.

I laser più diffusi nelle misurazioni con tecnica PIV sono quelli a stato solido come il laser a Rubino ed il laser a Nd:YAG. Soltanto di quest'ultimo verrà fornita una breve descrizione in quanto, oltre ad essere il laser più utilizzato, è anche quello di cui si è fatto uso per effettuare le prove sperimentali del presente lavoro.

Il laser a Nd:YAG (acronimo di Neodimium-Yttrium-Aluminum-Garnet), come già detto, è un laser a stato solido il cui mezzo attivo è costituito da un cristallo di Y₃Al₅O₁₂ (detto comunemente YAG) drogato con ioni Neodimio Nd³⁺ in sostituzione degli ioni Yttrio Y³⁺. È utilizzato soprattutto per le ottime proprietà termiche e meccaniche, per le alte frequenze di ripetizione, per l'elevata amplificazione e per la bassa energia di pompaggio. Quest'ultima proprietà è dovuta al fatto che il sistema è a quattro livelli di energia. L'eccitazione è raggiunta attraverso pompaggio ottico verso bande di energia continue e transizioni non-radiative verso il livello di emissione. Il fatto che il pompaggio avvenga con luce bianca (lampada a Krypton) deriva dalla particolare di-

sposizione del reticolo cristallino; al contrario di quanto accade per i singoli atomi, la disposizione periodica degli atomi porta alla formazione di bande di energia continue piuttosto che discrete. Alle normali temperature di esercizio il laser emette ad una lunghezza d'onda $\lambda = 1064nm$ e l'inversione della popolazione ha inizio appena viene raggiunto un valore di soglia dipendente dalla cavità del laser. In questo modo si possono ottenere numerosi impulsi di luce laser a partire da ogni singolo impulso della lampada. Per ottenere un impulso comandato da trigger è necessario inserire nella cavità risonante un interruttore di qualità (*Q-switch*) che ha l'effetto di alterare le caratteristiche di risonanza della cavità stessa. Se il *Q-switch* è operativo, consentendo alla cavità di risuonare nel punto più energetico del ciclo di pompaggio della lampada, è possibile ottenere un impulso molto potente detto *impulso gigante*. Il *Q-switch* è generalmente costituito da un polarizzatore e da una cella Pockels, la quale cambia la qualità² del risonatore ottico in base al voltaggio della cella. Sebbene il *Q-switch* potrebbe essere usato per generare più di un impulso gigante all'esterno del risonatore, di solito si preferisce evitare detto utilizzo e, poiché il tempo necessario al pompaggio non è sufficientemente basso ($\sim 200\mu s$), si ricorre ad un sistema a doppio oscillatore. Per ottenere luce nella lunghezza d'onda del visibile, si adopera un duplicatore di frequenza che consente di ottenere la metà dell'energia iniziale a $\lambda = 532nm$. Inoltre, poiché le proprietà ottiche della cavità del laser cambiano con la temperatura, soltanto alla frequenza nominale di ripetizione si possono ottenere fasci di luce con proprietà costanti e di buona qualità. Allo scopo è comunque indispensabile raffreddare la cavità del laser per asportare l'energia che non si converte in luce laser.

Di seguito sono analizzati più in dettaglio i componenti principali di un laser ad Nd:YAG, il cui schema è rappresentato in Figura 1.6. Tipicamente questo laser ha una frequenza di ripetizione oscillante tra 10 e 50Hz, una durata dell'impulso da 5 a 10ns ed emette per ogni pulsazione una quantità di energia tra i 2 ed i 1000mJ. Per ottenere le quantità di energia più elevate è necessario, però, adoperare risonatori critici (costituiti da specchi riflettenti piani anziché concavi), i quali hanno lo svantaggio di essere instabili generando anelli e punti caldi nel profilo del fascio laser. Per ovviare a tale inconveniente bisogna utilizzare specchi di uscita con riflettività variabile lungo il raggio. Nonostante ciò, può capitare che il profilo nel fascio non sia perfettamente gaussiano nel campo vicino o in quello lontano e, come verrà meglio analizzato nel capitolo successivo, ciò comporta una perdita di correlazione delle immagini PIV. Se, ad esempio, il profilo di intensità presenta picchi laterali, in corrispondenza dei picchi l'informazione verrà comunque persa, in quanto le piccole componenti di velocità ortogonali al piano di luce sposteranno le particelle presenti in questa zona verso zone poco illuminate, facendo perdere così la traccia nella seconda immagine. Lo schema rappresentato in figura si riferisce ad un sistema laser con risonatori critici.

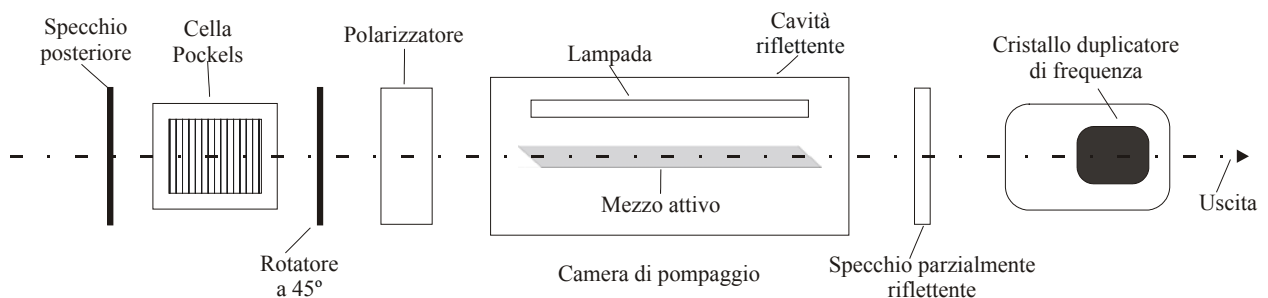


Figura 1.6 Schema di un laser a stato solido.

La *camera di pompaggio* contiene una bacchetta di cristallo Nd:YAG ed una lampada a Krypton lineare. Le estremità della bacchetta sono inclinate di un angolo pari all'angolo di Brewster per minimizzare le riflessioni. Questi due componenti sono circondati da materiale cerami-

² Si ricorda che, in analogia al fattore di qualità dei circuiti risonanti, è possibile definire un fattore di qualità di una cavità risonante come 2π volte il rapporto tra l'energia immagazzinata nel risonatore e quella dissipata in un periodo.

co riflettente in modo da ottenere un efficiente pompaggio ottico, mentre appositi filtri assorbono la radiazione ultravioletta emessa dalla lampada.

Lo *specchio di uscita*, nella maggior parte dei casi, ha la superficie rivolta verso la cavità parzialmente riflettente, mentre la superficie rivolta all'esterno è dotata di rivestimento antiriflettente. Nel caso di risonatori ottici lo specchio ha riflettività decrescente dal centro verso l'esterno. Lo specchio posteriore, invece, ha la superficie rivolta verso l'interno completamente riflettente e, di solito, ha una superficie leggermente curva.

Il *Q-switch* consta di un polarizzatore, un cristallo con cella di Pockels stabilizzato rispetto alla temperatura ed un prisma che cambia la direzione del fascio di luce (rotatore a 45°). Detto componente è comandato da alte differenze di potenziale ai capi della cella e, cambiando rapidamente le condizioni di risonanza della cavità, è utilizzato per rilasciare con un impulso gigante l'energia accumulata nel mezzo attivo. Una cella che sfrutta l'effetto Pockels consiste in un apposito cristallo, al quale, applicando una differenza di potenziale, si induce una variazione dell'indice di rifrazione lungo un asse. Questo a sua volta induce un effetto di birifrangenza proporzionale al voltaggio applicato, creando un sistema in grado di variare il piano di polarizzazione della luce. Con differenza di potenziale nulla ai capi della cella la luce viene bloccata dal polarizzatore, essendo ruotata di 90° dopo il doppio passaggio nel rotatore di polarizzazione. Nella fase iniziale del pompaggio ottico, la cella di Pockels ruota la polarizzazione di 90° . La luce passa attraverso il polarizzatore e, ritornando ruotata di 180° dopo il doppio passaggio nella cella (che avviene in seguito alla riflessione sullo specchio posteriore), viene ugualmente respinta dal polarizzatore. In questo modo non ha luogo alcuna oscillazione e amplificazione. Quando l'energia immagazzinata nel mezzo attivo raggiunge un massimo, il voltaggio ai capi della cella cambia, la cella di Pockels annulla la rotazione del rotatore ed inizia l'oscillazione della luce laser. Occorre sottolineare che, poiché la birifrangenza dipende dalla temperatura, è opportuno utilizzare celle di Pockels con stabilizzazione della temperatura.

Un *generatore di seconda armonica* è un cristallo non lineare utilizzato per la duplicazione della frequenza di emissione del laser e, nel caso in questione, converte la luce dalla lunghezza d'onda dell'infrarosso a quella del visibile corrispondente al verde. Il processo di duplicazione della frequenza ha luogo soltanto quando il fascio di luce è orientato secondo un angolo specifico rispetto alla direzione dell'asse del cristallo (in questo caso si parla di coincidenza di fase). L'angolo di inclinazione generalmente può essere regolato dall'utente, e, inoltre, poiché la coincidenza di fase dipende dalla temperatura, è necessario stabilizzare la temperatura di esercizio del cristallo. Essendo il cristallo igroscopico, il sistema di riscaldamento non dovrebbe essere spento per proteggerlo dall'umidità. Generalmente viene utilizzato il cristallo KD_2PO_4 (KD^*P), il quale può essere tagliato secondo due orientazioni (tipo I e tipo II) a seconda della configurazione del laser. L'orientazione di tipo I richiede in ingresso luce polarizzata linearmente (verticalmente o orizzontalmente) mentre, in uscita, emette la frequenza duplicata con polarizzazione ortogonale a quella incidente. Questo tipo di duplicatore è utilizzato per sistemi laser con due direzioni di polarizzazione. Invece, per generare luce verde di polarizzazione identica di solito si usano cristalli di tipo II. In questo caso la luce in ingresso deve avere due componenti di polarizzazione e la radiazione in uscita avrà la direzione di una delle due componenti a seconda dell'orientazione del cristallo. Per ottenere la radiazione infrarossa con due componenti è sufficiente utilizzare un *rotatore di polarizzazione* a 45° . Quest'ultimo è un cristallo che ruota l'angolo di polarizzazione della luce incidente quando questa lo attraversa. In base al materiale, spessore e lunghezza d'onda si ottengono angoli di rotazione diversi.

Infine, altri componenti di un sistema laser sono il *prisma separatore di armoniche*, avente la funzione di separare la seconda armonica deviando le altre armoniche verso una regione di espulsione, e lo *specchio dicroico*, avente la funzione di riflettere la seconda armonica e lasciarsi attraversare dalle altre.

1.2.2. Generazione del fascio di luce piano

La maggior parte delle indagini PIV vengono effettuate generando un fascio di luce piano monocromatico a partire dal raggio uscente dal laser. Il vantaggio principale della luce monocromatica risiede nella facilità con cui si può collimare il fascio. In questo paragrafo verranno analizzate tre delle combinazioni di lenti generalmente utilizzate, mentre non verranno analizzati i metodi per calcolare lo spessore e l'intensità del fascio. Bisogna tenere presente che, in prima approssimazione, il calcolo può essere eseguito utilizzando le regole dell'ottica geometrica. Inoltre, va ricordato che, per migliorare la flessibilità del sistema, a volte è conveniente utilizzare fibre ottiche per la trasmissione del laser anche se, in tal modo, si ha una maggiore perdita di intensità.

L'elemento essenziale per la generazione del piano di luce è una lente cilindrica. Se si utilizza un raggio di dimensioni ridotte e con divergenza piccola, come nel caso di laser a ioni-Argon, la suddetta lente può essere sufficiente allo scopo. Nel caso di laser ad alta intensità come quelli ad Nd:YAG ciò non è realizzato e, per ottenere fasci piani sottili ad alta intensità, è necessario focalizzare la luce allo spessore desiderato per mezzo di un'altra lente. Tale configurazione è mostrata in Figura 1.7, in cui una terza lente cilindrica è stata aggiunta per generare un piano ad altezza costante. La lente divergente è stata posizionata per prima per evitare la generazione di linee focali le quali, anche se non provocano la ionizzazione dell'aria come i punti focali, possono incendiare le particelle di polvere sospese nell'aria, alterando così le proprietà del fascio ed emettendo radiazione sonora. Nel caso rappresentato la posizione dello spessore minimo dipende dalla divergenza del raggio della sorgente luminosa e dalla lunghezza focale dell'ultima lente cilindrica (500mm per il caso illustrato).

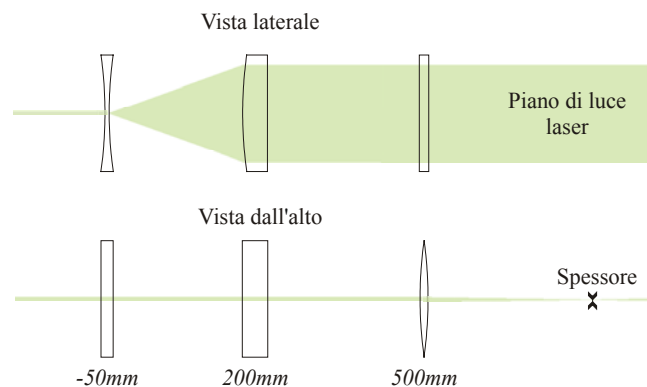


Figura 1.7 Schema ottico di un fascio ottenuto utilizzando tre lenti cilindriche di cui una con distanza focale negativa.

La combinazione di una lente cilindrica con due lenti telescopiche rende il sistema più versatile. Ciò è illustrato in Figura 1.8 in cui sono state utilizzate due lenti sferiche, perché sono più facili da costruire specialmente se sono richieste distanze focali piccole. L'altezza del piano di luce mostrato in figura è data principalmente dalla distanza focale della lente cilindrica centrale. Si sarebbe potuto utilizzare anche una lente divergente, ma, poiché la linea focale è abbastanza spessa un siffatto sistema è adatto anche per laser impulsivi. L'adattamento dell'altezza del fascio di luce piano si ottiene cambiando la lente cilindrica mentre la regolazione dello spessore si ottiene facilmente variando la distanza tra le lenti sferiche.

L'utilizzo di lenti sferiche in generale non permette di regolare in maniera indipendente sia lo spessore che l'altezza del fascio di luce. Per ovviare a tale inconveniente è necessario adottare la configurazione mostrata in Figura 1.9. Questa configurazione permette di generare ovunque lame di luce più sottili del diametro del raggio sorgente e, perciò, consente la generazione di fasci di spessore molto piccolo già all'uscita dell'ultima lente. L'inconveniente risiede nel fatto che l'energia per unità di area è molto alta e, come già osservato, per non incorrere nell'interferenza con polvere o particelle traccianti è necessario isolare le zone in prossimità della linea focale. L'utilizzo di una lente iniziale divergente risolverebbe il problema, ma la configurazione appena

illustrata ha il vantaggio di consentire la registrazione del profilo del raggio luminoso dall'uscita della lente fino alla zona di misura mantenendo le proprietà costanti. In questo caso, da semplici considerazioni geometriche si può determinare il punto in cui è iniziata la registrazione del raggio laser e, se è noto lo sviluppo del profilo, si può utilizzare l'informazione per ottimizzare la distribuzione dell'intensità luminosa consentendo di migliorare il numero di dati validi.

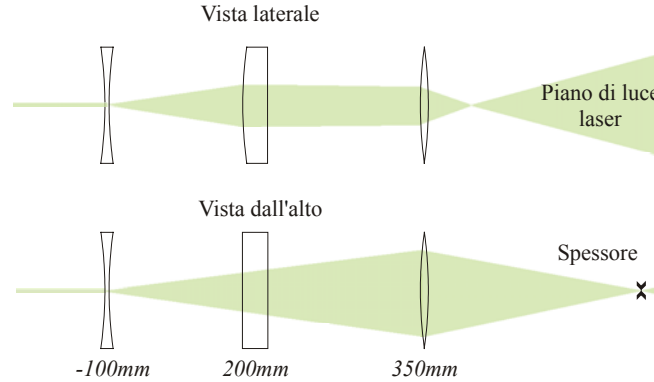


Figura 1.8 Schema ottico di un fascio ottenuto utilizzando due lenti sferiche, di cui una con distanza focale negativa, ed una cilindrica.

Infine, nella disposizione delle lenti occorre tener presente alcune regole. Le superfici delle lenti non rivestite sono leggermente riflettenti e le relative perdite possono raggiungere valori del 4%. Le riflessioni prodotte possono provocare dei danni se sono focalizzate su componenti ottici. Nella maggior parte dei casi il problema può essere risolto disponendo le lenti nel verso corretto mentre, in altri casi, è necessario ruotare leggermente la lente per evitare riflessioni su altre lenti, verso il laser o persino nella cavità risonante.

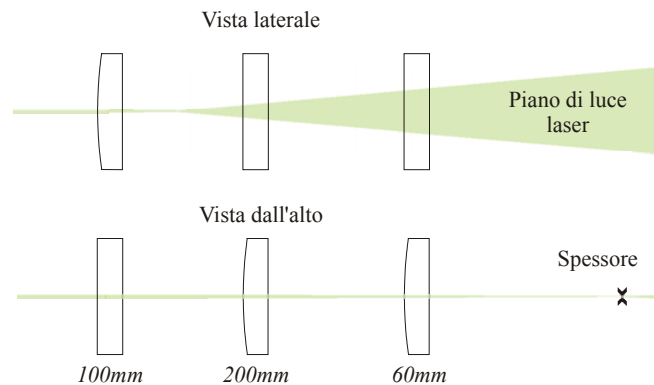


Figura 1.9 Schema ottico di un fascio ottenuto utilizzando tre lenti cilindriche.

1.3. Generazione e registrazione di immagini PIV

Prima di vedere più in dettaglio come si genera un'immagine PIV, è opportuno descrivere l'aspetto caratteristico di una siffatta immagine in funzione della densità dei traccianti. L'aspetto di un'immagine registrata e le informazioni in essa contenute dipendono da due numeri adimensionali introdotti da Adrian & Yao (1984). Il numero N_s , chiamato *densità della sorgente*, è definito dalla seguente espressione:

$$N_s = C \Delta Z_0 M^{-2} \frac{\pi}{4} d_i^2, \quad (1.8)$$

in cui C è la concentrazione delle particelle traccianti (numero di particelle per unità di volume), ΔZ_0 è lo spessore del fascio di luce laser, M è il fattore di ingrandimento definito più in dettaglio nel prossimo paragrafo e d_i rappresenta il diametro delle particelle nel piano dell'immagine. In pratica detto numero rappresenta il numero di particelle presenti nel volume corrispondente all'area della superficie occupata da una singola particella sull'immagine. Il numero N_i , chiamato *densità dell'immagine*, è dato invece dalla seguente espressione:

$$N_I = C\Delta Z_0 \frac{D_I^2}{M^2}, \quad (1.9)$$

in cui D_I denota l'area corrispondente al dominio di interrogazione³. Questo numero rappresenta il numero di particelle presenti in una finestra di interrogazione. In Figura 1.10 sono rappresentati i tre casi che tipicamente si possono presentare al variare dei valori assunti dai numeri adimensionali introdotti.

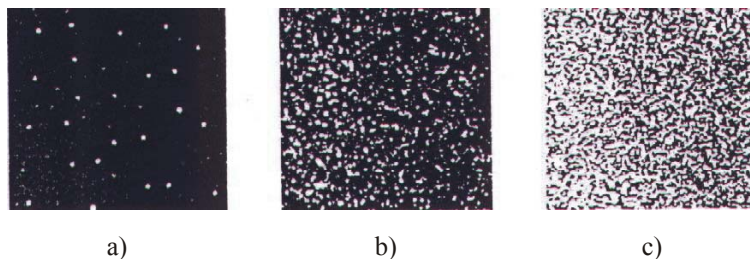


Figura 1.10 Immagini delle particelle traccianti in funzione della densità: a) densità bassa (PTV); b) densità media (PIV); c) densità alta (LSV).

Il primo caso rappresentato in Figura 1.10(a) si riferisce al caso con numeri caratteristici N_s e $N_I \ll 1$. Infatti, la prima condizione impone che le particelle siano distinguibili, mentre la seconda si traduce nel fatto che, essendo la distanza media tra le particelle molto grande, il numero di particelle in una finestra di interrogazione è basso. In questo caso è abbastanza semplice individuare le coppie di particelle corrispondenti nelle due esposizioni, ma non è possibile calcolare il vettore velocità in un qualsiasi punto dell'immagine. In definitiva, è possibile determinare i vettori velocità soltanto in corrispondenza delle particelle e questo equivale ad effettuare un campionamento casuale del campo di moto. Poiché il campo di moto si ottiene dallo spostamento di particelle individuali, in questo caso si parla Particle Tracking Velocimetry (PTV).

Per ottenere maggiori informazioni sul campo di moto è necessario incrementare la densità delle particelle sull'immagine. Così facendo si ottiene la situazione mostrata in Figura 1.10(b) in cui $N_I \gg 1$ e le particelle sono ancora distinguibili $N_s \ll 1$. Il numero di particelle contenute in una finestra di interrogazione è tale da rendere possibile il calcolo del vettore velocità in qualunque posizione; tale calcolo, però, non può ottenersi individuando le coppie di particelle corrispondenti ed è perciò necessario calcolare lo spostamento più probabile con metodi statistici. Queste sono le condizioni in cui si opera con la tecnica PIV.

Aumentando ulteriormente la densità delle particelle traccianti si ottiene il terzo caso rappresentato in Figura 1.10(c). In questo caso (N_I e $N_s \gg 1$) le particelle non sono più distinguibili e l'immagine è un campo di interferenza. In questo caso si parla di distribuzione con chiazze (*speckles*) e la corrispondente tecnica prende il nome di Laser Speckle Velocimetry (LSV). In linea di principio lo spostamento si calcola in maniera analoga alla PIV. Bisogna aggiungere che, affinché compaiano effettivamente delle chiazze, la densità delle particelle deve essere molto elevata; in tal caso entrano in gioco effetti indesiderati quali la diffusione multipla (Vedi Adrian, 1984). È possibile pertanto che immagini LSV siano in realtà immagini PIV ad alta densità.

1.3.1. Formazione dell'immagine PIV

Come è noto dalle leggi dell'ottica, quando si utilizzano dispositivi ottici dotati di obiettivi, come nel caso della PIV, bisogna tener conto del fenomeno della diffrazione. Se un fascio di luce piano investe uno schermo opaco dotato di un'apertura circolare e la lunghezza d'onda della luce incidente è confrontabile con le dimensioni del foro, su uno schermo posto a grande distanza dal foro si genera una figura di diffrazione. Utilizzando una lente convergente è possibile visualizza-

³ Per dominio di interrogazione si intende il volume corrispondente a ciascuna delle finestre in cui viene suddivisa l'immagine per determinare lo spostamento delle particelle traccianti. Nei capitoli successivi verrà trattato l'argomento in maniera più dettagliata.

re la figura di diffrazione su di un piano in prossimità dell'apertura. L'immagine di una sorgente puntiforme posta a grande distanza non appare puntiforme sul piano immagine, ma forma una figura di diffrazione anche nell'ipotesi di lente priva di aberrazioni. Sotto le suddette ipotesi la sorgente puntiforme genera una figura detta *disco di Airy* (vedi Hecht & Zajac, 1974) che è costituita da un disco circolare circondato da anelli come è mostrato in Figura 1.11(a); gli anelli sono evidenti per un elevato valore del tempo di esposizione. Nell'approssimazione di *Fraunhofer* (campo lontano dall'apertura), la distribuzione di Airy rappresenta la trasformata di Fourier della distribuzione del campo delle ampiezze lungo l'apertura (vedi Goodman, 1996). Tenendo conto della proprietà del cambiamento di scala della trasformata di Fourier, se ne deduce che a grandi diametri di apertura corrispondono piccoli dischi di Airy e viceversa.

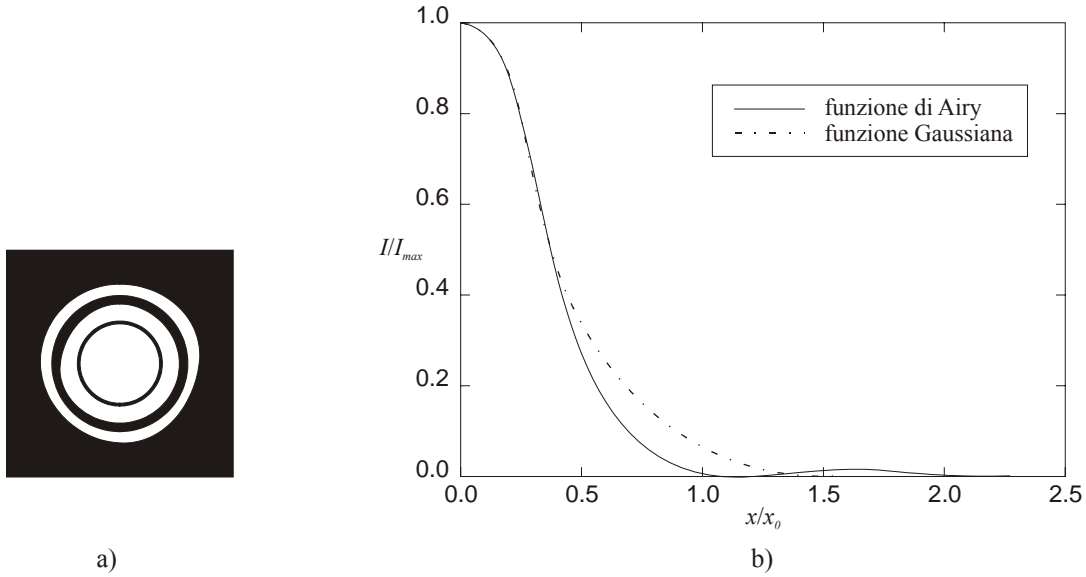


Figura 1.11 Figura di diffrazione di Airy per un prefissato diametro di apertura (a); confronto tra l'intensità della distribuzione normalizzata di Airy e l'approssimazione con una curva Gaussiana (b).

La funzione di Airy matematicamente è data dal quadrato della funzione di Bessel del primo ordine, per cui il primo anello scuro corrisponde al primo zero di detta funzione. La funzione di Airy rappresenta la risposta all'impulso di una lente priva di aberrazioni, detta anche funzione di dispersione puntuale. È opportuno determinare il diametro del disco di Airy d_s , in quanto questo rappresenta la minima dimensione dell'immagine della particella ottenibile per una data configurazione. Imponendo la condizione $I(x)/I_{max} = 0$, dalla Figura 1.11(b) si ha che il valore del diametro per una fissato diametro di apertura D_a e per una fissata lunghezza d'onda λ è dato da:

$$\frac{d_s}{2x_0} = 1.22 \quad (1.10)$$

con $x_0 = \lambda z_0 / D_a$. Se consideriamo che il mezzo in cui è immersa la lente di distanza focale f è lo stesso da entrambi i lati, in base alle leggi dell'ottica geometrica si ha:

$$\frac{1}{z_0} + \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{f}, \quad (1.11)$$

dove z_0 è la distanza tra il piano immagine e la lente e Z_0 è la distanza tra la lente ed il piano oggetto (vedi Figura 1.12). Definendo ora il fattore di ingrandimento M come:

$$M = \frac{z_0}{Z_0}, \quad (1.12)$$

si può ottenere la formula del diametro minimo di immagine limitato dalla diffrazione:

$$d_s = 2.44 f_{\#} (M + 1) \lambda, \quad (1.13)$$

in cui $f_{\#}$ è il numero f definito come il rapporto tra la distanza focale f ed il diametro dell'apertura D_a . Il valore del diametro minimo così definito è ottenuto soltanto nel caso di particelle di pic-

colo diametro e per piccoli fattori di ingrandimento. Nel caso di particelle grandi e/o di elevati fattori di ingrandimento l'influenza della geometria diventa predominante, pertanto, l'immagine di una particella di dimensioni finite sarà data dalla convoluzione della funzione di Airy con l'immagine geometrica della particella. Trascurando le distorsioni della lente si ottiene la seguente formula:

$$d_t = \sqrt{(Md_p)^2 + d_s^2} . \quad (1.14)$$

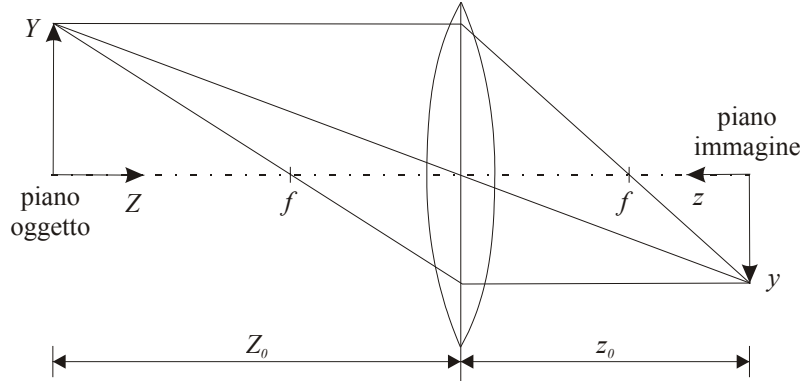


Figura 1.12 Ricostruzione geometrica dell'immagine.

Nella pratica la funzione di Airy è spesso approssimata con la curva Gaussiana mostrata in Figura 1.11(b) definita da:

$$\frac{I(x)}{I_{\max}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.15)$$

dove il parametro σ deve essere fissato pari a $f_{\#}(1+M)\lambda\sqrt{2}/\pi$ per poter approssimare l'effetto della diffrazione. Questa approssimazione semplifica notevolmente la matematica necessaria al calcolo delle funzioni di trasferimento della modulazione che, come verrà descritto tra breve, comprendono anche altri tipi di aberrazione delle lenti. Nell'analisi con tecnica PIV, ci sono almeno due ragioni per cui è necessario ottimizzare il diametro delle particelle. In primo luogo, come verrà mostrato nei capitoli successivi, il diametro delle particelle influenza l'errore nella misura della velocità. In secondo luogo, immagini delle particelle piccole e ben definite sono essenziali per ottenere un'elevata intensità I_{\max} , dal momento che, a parità di energia diffusa dalle particelle traccianti, l'energia della luce per unità di area cresce secondo il reciproco del quadrato del diametro ($I_{\max} \sim 1/d_t^2$). Ciò spiega anche perché un diametro elevato delle particelle spesso non riesce a compensare un'insufficiente potenza del laser.

L'equazione (1.14) mostra che, per diametri delle particelle maggiori della lunghezza d'onda diffusa ($d_p \gg \lambda$), il limite della diffrazione diventa meno importante ed il diametro cresce linearmente con il diametro della particella. Poiché l'energia media della luce diffusa cresce con $(d_p/\lambda)^2$, per le particelle con diametro maggiore della lunghezza d'onda (cfr. teoria di Mie), l'intensità dell'immagine diventa indipendente dal diametro delle particelle, dal momento che sia l'energia diffusa che l'area dell'immagine crescono con il quadrato del diametro della particella. Come è noto dall'ottica geometrica, un punto nel piano oggetto genera un'immagine nitida soltanto ad una posizione definita nello spazio immagine data dall'equazione (1.11). Se il piano dell'immagine non è perfettamente allineato con il piano del sensore, l'immagine è sfocata e l'ottica geometrica fornisce il valore della dimensione dell'immagine; ovviamente detta sfocatura non dipende né da aberrazioni della lente né dalla diffrazione. In ogni caso, la dimensione del diametro dovuto alla diffrazione è il parametro utilizzato per il calcolo della profondità di campo. Utilizzando il diametro fornito dalla (1.13), per la profondità di campo δ_z si ottiene la seguente espressione:

$$\delta_z = 2f_{\#}d_s(M+1)/M^2 . \quad (1.16)$$

In base a quanto detto, il valore del diametro dell'apertura è un parametro critico nella registrazione delle immagini. Un diametro di apertura elevato è necessario per ottenere un'illuminazione sufficiente e particelle con contorni ben definiti, perché, come già osservato, al crescere del diametro diminuisce la dimensione del diametro dovuto alla diffrazione. D'altra parte, un elevato diametro di apertura riduce la profondità di campo e può rendere le aberrazioni della lente non trascurabili. Le principali aberrazioni che si possono riscontrare in una lente sono le aberrazioni sferiche, il coma, l'astigmatismo e le distorsioni. Nel caso di piccoli campi di vista, come accade di solito per misure PIV, l'aberrazione prevalente è quella sferica. Per analizzare le aberrazioni ottiche di solito si usa descrivere le proprietà del sistema ottico in termini di prestazione.

In analogia con l'analisi dei sistemi lineari la prestazione di un sistema ottico può essere descritta o per mezzo della risposta impulsiva o per mezzo della più alta frequenza spaziale che può essere trasmessa con sufficiente contrasto. Questa frequenza, chiamata risoluzione limite, può essere ottenuta dal reciproco della larghezza caratteristica della risposta all'impulso. La dimensione caratteristica è quella dell'inverso di una lunghezza e generalmente si indica come il numero di coppie di linee distinguibili per millimetro (*lps/mm*). Tradizionalmente la qualità di una lente si valuta con la risoluzione limite dettata dal criterio di Rayleigh, secondo il quale due punti sorgente possono essere appena distinti quando il centro del disco di Airy del primo punto cade in corrispondenza del primo minimo della figura di Airy dell'altro; di conseguenza, il limite teorico della risoluzione limite ρ_s corrisponde al reciproco del raggio del disco di Airy, ossia:

$$\rho_s = \frac{2}{d_s} = \frac{1}{1.22 f_{\#} (M+1) \lambda}. \quad (1.17)$$

Un altro parametro utile nel valutare la prestazione di un sistema ottico è il contrasto o la modulazione dell'immagine definita dalla seguente equazione:

$$Mod = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (1.18)$$

Al variare della frequenza spaziale, il rapporto di modulazione *Mod* dell'immagine definisce la funzione di trasferimento della modulazione (MTF). La funzione così definita è largamente utilizzata per valutare le prestazioni di una lente ed una sua approssimazione si ottiene effettuando la trasformata inversa di Fourier della funzione di Airy. Utilizzando l'approssimazione Gaussiana⁴ data dalla (1.15) la trattazione si semplifica notevolmente. In Figura 1.13 è riportata la modulazione dell'immagine in funzione della frequenza spaziale per tre diversi valori di $f_{\#}$ di un sistema lente supposto privo di aberrazioni sferiche ed ottenuto nella suddetta approssimazione. Poiché il minimo diametro dell'immagine decresce al decrescere del numero f , alte frequenze spaziali possono essere registrate soltanto per valori piccoli di $f_{\#}$ e, per una prefissata frequenza spaziale r , piccoli numeri f permettono di ottenere un migliore contrasto rispetto a quelli alti. Nel caso si tengano in conto le aberrazioni della lente la MTF cambia soprattutto per valori piccoli del numero f . Generalmente detta funzione è fornita dal costruttore di lenti; spesso, però, i valori del diagramma sono relativi a misure effettuate con luce bianca ed includono perciò anche le aberrazioni cromatiche. Ai fini di uno studio qualitativo dell'effetto delle aberrazioni sulle dimensioni delle immagini delle particelle, si può descrivere la MTF con la trasformata inversa di Fourier dell'approssimazione data dalla (1.15) che, in forma normalizzata, si scrive:

$$\bar{M}_{TF} = \exp(-2\pi^2 \sigma^2 r'^2). \quad (1.19)$$

Prendendo il valore della MFT in corrispondenza della frequenza r' , in base alla (1.15) è possibile ricavare il valore di σ :

$$\sigma = \sqrt{-\frac{\ln[\bar{M}_{TF}(r')]}{2\pi^2 r'^2}}. \quad (1.20)$$

Poiché la funzione Gaussiana non ha punti in cui si annulla, è necessario fissare un valore di so-

⁴ Si ricorda che la trasformata di Fourier di una funzione Gaussiana è ancora una funzione Gaussiana.

glia su cui calcolare il diametro della particella. Nel caso di PIV digitale generalmente si usa una soglia a causa del rumore di fondo; si preferisce pertanto non considerare le intensità inferiori al 20% della intensità massima. Con questa assunzione, tenendo conto delle (1.14), (1.15) e (1.20), il diametro dell'immagine di un oggetto circolare di estensione $1/2r'$ è dato da:

$$d_t = \sqrt{-0.64 \frac{\ln[\overline{M}_{FT}(r')]}{r'^2} + \left(\frac{M}{2r'}\right)^2}. \quad (1.21)$$

Nei sistemi ottici, in realtà, bisognerebbe considerare anche eventuali sfasamenti; poiché questi avvengono solo lontano dall'asse ottico, sono meno importanti rispetto alla MTF. Nel caso di sistemi ottici complessi, la MTF del sistema può essere calcolata come prodotto dei singoli sottosistemi, tale approccio tuttavia non è adeguato nella registrazione con sensori video.

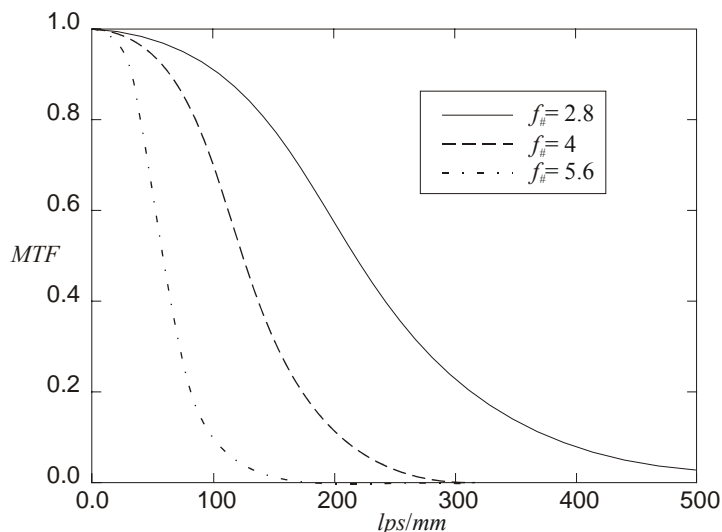


Figura 1.13 Funzione di trasferimento della modulazione dell'immagine per tre diversi valori del numero f .

Per quanto riguarda gli errori prospettici nella formazione dell'immagine una descrizione più ampia verrà fornita nel capitolo sulla PIV stereoscopica.

1.3.2. Strumenti e tecniche di registrazione delle immagini

Nel primo stadio dello sviluppo della tecnica PIV si faceva ricorso principalmente a tecniche di registrazione fotografiche. I progressi fatti recentemente nel campo dell'elettronica, hanno permesso di realizzare metodi di registrazione digitali, i quali hanno numerosi vantaggi rispetto a quelli ottici tra i quali l'immediata visualizzazione delle immagini e l'eliminazione dei processi chimici di stampa. Per tale ragione in questo paragrafo verranno analizzate soltanto le tecniche di acquisizione video digitali, in particolare l'attenzione sarà focalizzata sui sensori allo stato solido in quanto essi sono i sensori maggiormente utilizzati dai centri di ricerca.

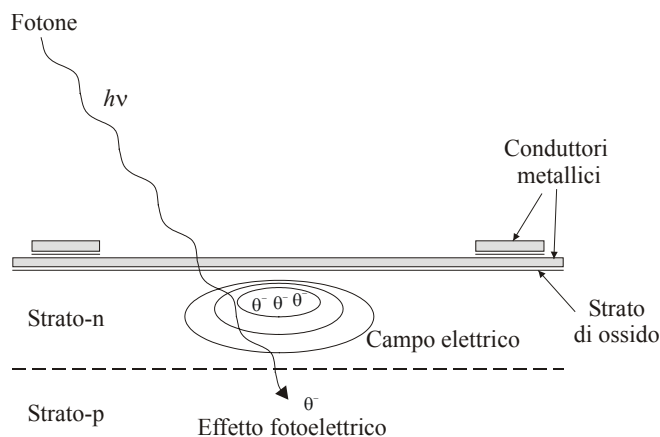


Figura 1.14 Modello semplificato di un pixel.

Il sensore elettronico allo stato solido più diffuso è senza dubbio il CCD (*charge coupled device*, ossia dispositivo ad accoppiamento di carica) il quale converte l'energia luminosa incidente sotto forma di fotoni in carica elettrica disponibile sotto forma di elettroni. Quando si parla di sensori CCD in genere si parla di un array di CCD singoli disposti lungo una riga o sotto forma di una matrice rettangolare. Il CCD individuale si chiama pixel la cui dimensione fisica è dell'ordine di $10 \times 10 \mu\text{m}^2$. Il principio di funzionamento, mostrato schematicamente in Figura 1.14, è descritto di seguito.

Il CCD è costruito su di un substrato semiconduttivo, generalmente in silicone, con conduttori metallici sulla superficie, uno strato di ossido isolante, uno strato semiconduttore di tipo n (anodo) ed uno semiconduttore di tipo p (catodo) al di sotto (giunzione PN). Una piccola differenza di potenziale applicata tra i conduttori metallici e lo strato di tipo p genera un campo elettrico all'interno del semiconduttore. Il valore minimo del campo elettrico che si forma al di sotto del centro del pixel è associato ad una vacanza di elettroni ed è detto buca di potenziale. In pratica la buca di potenziale è equivalente ad un condensatore in grado di immagazzinare gli elettroni. Quando un fotone di una certa lunghezza d'onda colpisce la giunzione PN, si genera una coppia vacanza-elettrone ed il fenomeno è detto effetto fotoelettrico. Mentre la vacanza, portatrice di carica positiva, è assorbita nello strato p, l'elettrone per effetto del campo elettrico migra verso la buca di potenziale, dove viene immagazzinato. Gli elettroni continuano ad accumularsi per tutta la durata dell'esposizione alla luce. La capacità di immagazzinare elettroni è comunque limitata e viene misurata in elettroni per pixel; valori tipici della capacità per i sensori oscillano tra 10'000 e 100'000. Quando questo valore massimo viene superato si ha sovraesposizione e gli elettroni eccedenti tendono a migrare verso i pixel adiacenti provocando il *blooming* dell'immagine. Per evitare questo effetto i moderni CCD adottano dispositivi anti-blooming che catturano la carica in eccesso per mezzo di conduttori.

Un altro parametro importante per un CCD è il *fattore di riempimento* o apertura che è definito come il rapporto tra l'area otticamente sensibile e quella totale del sensore. Il suo valore può oscillare dal 15% al 100%, a seconda del sensore. Il motivo principale della limitata apertura è dovuto alla superficie opaca costituita dai conduttori che generano la buca di potenziale e dalle zone rivestite per immagazzinare la carica prima della lettura. Per aumentare il fattore di riempimento si può rimuovere lo strato posteriore sino a ridurlo a qualche decina di μm in modo da poter esporre il sensore dal lato posteriore. Poiché questo procedimento è abbastanza costoso, spesso si preferisce posizionare delle lenti davanti al sensore in modo da raccogliere una maggiore quantità di luce (in tal modo l'apertura aumenta di un fattore pari a 3).

Come tutte le apparecchiature elettroniche, anche il pixel di un CCD è soggetto a rumore elettronico. A causa della limitata efficienza della luce diffusa, spesso nelle misure PIV il segnale supera di poco il rumore di fondo, il che ne rende necessario l'abbattimento. La maggiore fonte di rumore è costituita dagli effetti termici che generano una coppia elettrone-vacanza. Il tasso di generazione di queste coppie è pressoché costante; di conseguenza, poiché la corrente di fondo generata rimane costante con la temperatura e l'esposizione, è possibile eliminarla sottraendo un valore costante al voltaggio in uscita. La corrente di fondo ha però una fluttuazione nel tempo, pari alla radice quadrata della corrente stessa, che a sua volta è causa di rumore. Poiché la fluttuazione aumenta con la temperatura è indispensabile raffreddare il sensore; il raffreddamento criogenico riduce il rumore a meno di un elettrone al secondo. Altra sorgente di rumore è il rumore di lettura connesso alla conversione della carica in differenza di potenziale e, in generale, aumenta con la frequenza di lettura. A frequenze ridotte, ottimizzando la conversione e raffreddando il sensore si può ridurre questo rumore a qualche elettrone per secondo. I costi elevati del raffreddamento criogenico rendono questo sistema poco adatto a misure PIV e, perciò, si utilizzano telecamere raffreddate con celle di Peltier (cioè raffreddamento elettrico).

Altre caratteristiche di un pixel, inoltre, sono la sensibilità, la linearità ed il range dinamico. In analogia alle pellicole fotografiche la *sensibilità* del pixel o efficienza di quantizzazione (QE) è definita dal rapporto tra il numero di elettroni immagazzinati ed il numero di fotoni incidenti e si

misura in carica immagazzinata per intensità di luce incidente, oppure in corrente per potenza incidente. Detto valore dipende dall'apertura e dallo spessore dell'area sensibile e cambia notevolmente con la lunghezza d'onda della luce incidente. Per ridurre la sensibilità a quest'ultimo parametro, a volte si pone un filtro all'infrarosso davanti al sensore. Per quanto riguarda la *linearità*, poiché ogni elettrone si aggiunge linearmente alla carica immagazzinata, il voltaggio in uscita è linearmente proporzionale alla carica stessa. Piccole non-linearità sono dovute principalmente alla sovraesposizione o alla bassa qualità degli amplificatori in uscita; gli scostamenti dal comportamento lineare, però, non eccedono l'1%. Infine, si definisce *range dinamico* di un CCD il rapporto tra la capacità massima di accumulazione ed il rumore di fondo e, vista la dipendenza di quest'ultimo dalla temperatura, aumenta al decrescere della temperatura. A temperatura ambiente il range dinamico è di 100-200 livelli di grigio (7-8 bit di segnale utile) mentre, raffreddando il sensore, si possono ottenere fino a 65'000 livelli di grigio (16 bit/pixel).

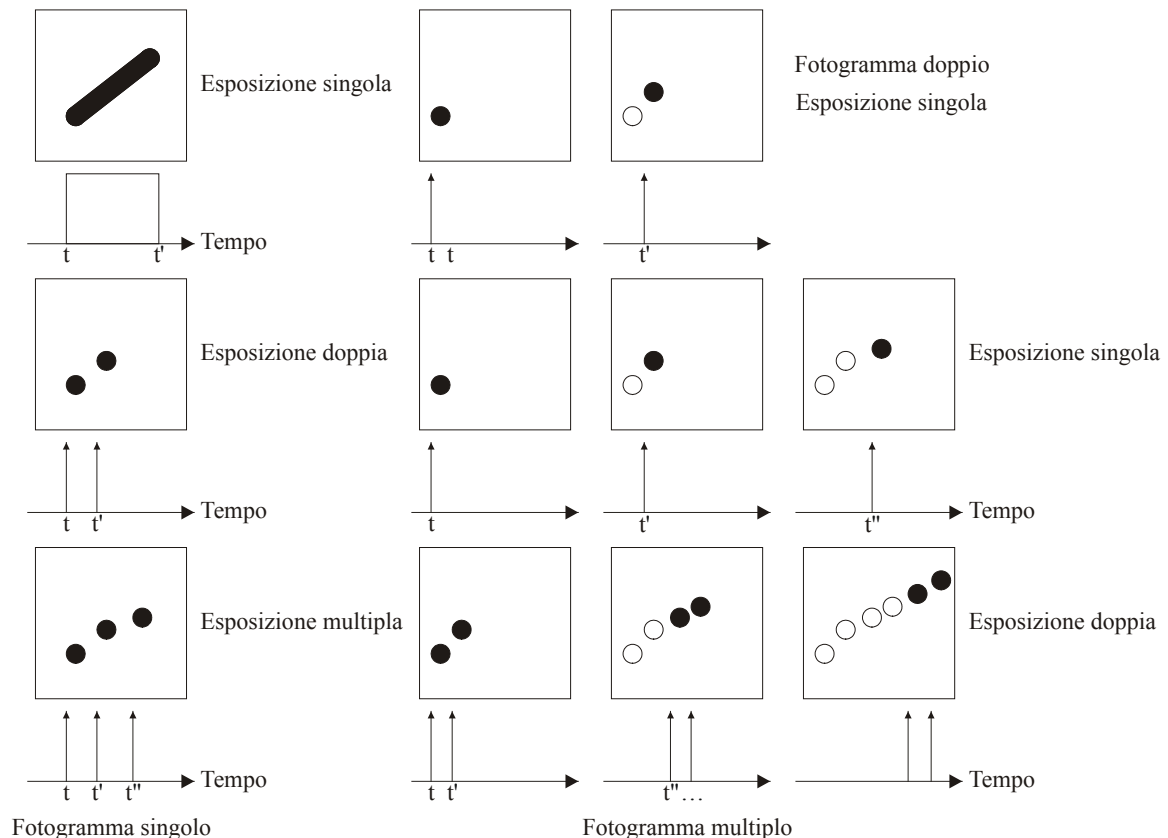


Figura 1.15 Schema delle principali tecniche di registrazione di immagini PIV.

Prima di analizzare in dettaglio i modelli di CCD più diffusi, occorre ricordare che i modi di registrazione delle immagini PIV si distinguono in due categorie: la prima categoria è costituita dai metodi che catturano le immagini del flusso su di un solo fotogramma, mentre nella seconda categoria ogni immagine del flusso, corrispondente ad un singolo impulso del laser, è registrata su un fotogramma distinto. Dette categorie, entrambe mostrate in Figura 1.15, sono denominate rispettivamente tecnica PIV con singolo fotogramma ed esposizione multipla e tecnica PIV con fotogrammi multipli e singola esposizione. Il primo metodo, oltre a rendere meno agevole il calcolo dello spostamento, ha il grosso svantaggio di non fornire informazioni sull'ordine temporale dei due impulsi generando la cosiddetta *ambiguità direzionale* del vettore spostamento. Quest'ultimo problema si riscontra soprattutto nelle acquisizioni su pellicola con macchine fotografiche, in cui non è possibile registrare immagini di campi di velocità elevati su fotogrammi diversi. Come già detto, non ci si occuperà in dettaglio di questo tipo di apparecchiature in quanto la tendenza è di sostituirle con apparecchiature digitali; soltanto qualora siano richieste alte risoluzioni spaziali del campo di moto e velocità elevate è preferibile ricorrere all'utilizzo della pellicola fo-

tografica. In generale, i parametri che indirizzano la scelta verso un metodo piuttosto che verso un altro sono: l'elevata risoluzione spaziale e temporale del campo di moto, la risoluzione delle fluttuazioni di velocità, l'intervallo di tempo tra le misure PIV singole e, naturalmente, il costo e la disponibilità di apparecchiature in laboratorio.

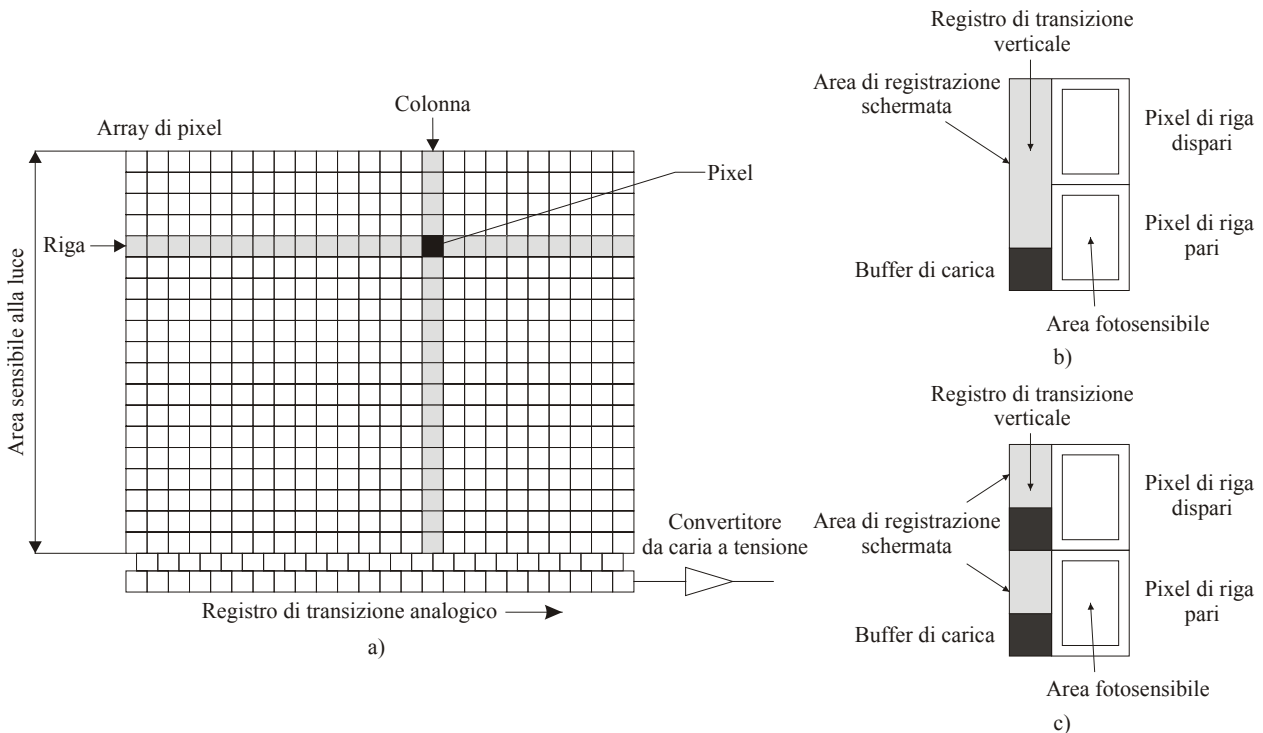


Figura 1.16 Geometria tipica di un sensore CCD (a). Dettaglio della struttura dei pixel per due modelli di sensore CCD: sensore a trasferimento di interlinea (b) e sensore a trasferimento di interlinea completo (c).

In Figura 1.16(a) è mostrata la geometria tipica di un sensore CCD in cui i pixel individuali sono raggruppati in un array rettangolare in modo da creare una regione sensibile alla luce. A differenza dell'indirizzamento della memoria del computer che è causale, l'informazione contenuta in ciascun pixel deve essere trasmessa in maniera sequenziale in due fasi. Nella prima fase, successiva all'esposizione, la carica accumulata è trasferita verticalmente, una riga per volta, ad un registro di transizione analogico schermato dalla radiazione luminosa e collocato sul bordo inferiore del sensore. Ogni riga, attraverso un convertitore da carica a differenza di potenziale, è convertita pixel per pixel in un vettore di tensioni che, insieme ad impulsi di sincronizzazione, costituisce il segnale di uscita del sensore. A seconda del tipo di sensore, inoltre, la lettura del segnale può avvenire in maniera sequenziale (progressiva) oppure interlacciata (vale a dire prima le righe dispari e poi le pari).

Un sensore CCD classico a fotogramma pieno è quello mostrato in Figura 1.16(a): il processo di registrazione avviene nella maniera appena descritta mentre la modalità di lettura è di tipo interlacciato. Questo tipo di sensore è caratterizzato da fattori di riempimento che possono raggiungere il 100% ed ha il grosso vantaggio di essere disponibile in array di grandi dimensioni (7000×5000 pixel). Questo CCD ha però qualche grosso svantaggio. Innanzitutto, per ottenere range dinamici elevati e bassi rumori di lettura la frequenza di acquisizione deve essere mantenuta bassa (anche minore di 1 Hz). Un secondo problema è causato dal fatto che il sensore rimane attivo durante la lettura, il che, comportando la cattura di altra luce, produce delle macchie verticali nell'immagine finale. Inoltre, se la velocità da misurare non è sufficientemente bassa, non è possibile effettuare un'acquisizione con singola esposizione. In Figura 1.17(a) e (b), il diagramma dei tempi mostra come devono essere collocati i picchi dei laser per ottenere immagini con esposizione singola o doppia rispettivamente.

Il modello di sensore CCD a trasferimento di fotogramma è sostanzialmente identico a quello

classico con la differenza che la metà inferiore delle righe è schermata dalla luce. Una volta esposte, le righe in cui si è accumulata la carica sono trasferite nella parte inferiore con una frequenza di $1\mu s$ per riga, permettendo così all'intera immagine di rimanere protetta da ulteriori esposizioni durante il trasferimento ($0.5-1ms$). Il sensore, però, rimane attivo durante il trasferimento verticale e le macchie possono essere ugualmente presenti. Una volta avvenuto il trasferimento, la lettura sequenziale dell'immagine avviene con le stesse modalità del CCD standard.

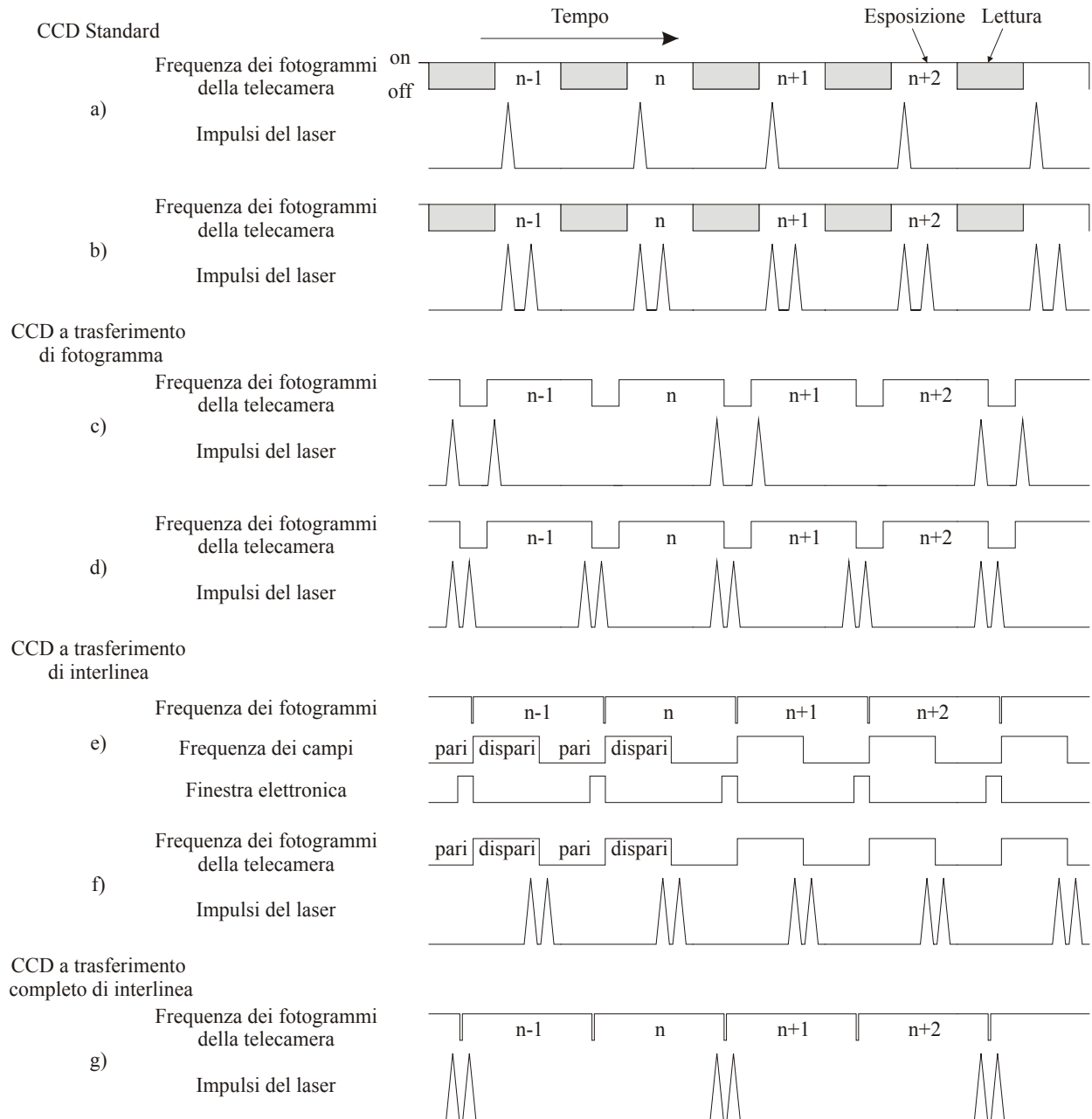


Figura 1.17 Diagramma dei tempi per registrazioni PIV basate su diversi tipi di sensori CCD.

Il sensore appena descritto offre, inoltre, le due possibilità di funzionamento mostrate in Figura 1.17(c) e (d) rispettivamente. Innanzitutto, l'alta velocità di trasferimento verticale permette di catturare due immagini singole separate da un intervallo di tempo di poco superiore al tempo di trasferimento. Allo scopo basta far capitare il primo impulso poco prima del trasferimento del fotogramma ed il secondo impulso immediatamente dopo (caso c); in questo caso la frequenza di registrazione PIV è la metà della frequenza di acquisizione della telecamera. La seconda modalità di utilizzo consente di effettuare uno slittamento dell'immagine per eliminare il

problema dell'ambiguità degli spostamenti. Tale modalità si ottiene posizionando il primo impulso luminoso immediatamente prima della traslazione verticale ed il secondo impulso nel periodo di spostamento delle cariche verso la zona schermata (caso d). Se, ad esempio, il ritardo tra gli impulsi è di $10\mu s$ ed il tasso di trasferimento è di $1\mu s$ per riga, l'immagine risulta slittata di 10 pixel. In questo caso le frequenze di registrazione della PIV e della telecamera coincidono.

Un terzo tipo di sensore, maggiormente utilizzato nelle telecamere digitali di uso comune, è il sensore CCD a trasferimento di interlinea. Il nome deriva dai registri di trasferimento collocati verticalmente tra le file di pixel. Tipicamente due registri adiacenti in verticale condividono una zona di immagazzinamento delle cariche come mostrato in Figura 1.16(b). Le cariche che si accumulano nell'area attiva del pixel sono trasferite rapidamente (in meno di $1\mu s$) alla zona di immagazzinamento e questa caratteristica offre la possibilità di effettuare una finestrazione completamente elettronica. Il maggiore svantaggio di questi sensori è il ridotto fattore di riempimento causato dall'aggiunta delle linee di memorizzazione a fianco alle celle fotosensibili. Poiché due pixel condividono la stessa cella di memorizzazione l'immagine avrà una risoluzione verticale dimezzata e sarà possibile memorizzare alternativamente le righe pari e le dispari; di conseguenza, mentre le righe pari accumulano la carica, il contenuto delle righe dispari è salvato in memoria e viceversa ottenendo, in tal modo, un fotogramma distinto in due campi. Anche in questo caso sono due le possibili applicazioni per la PIV. In una prima applicazione (vedi Figura 1.17(e)) la finestra elettronica, realizzata fissando il voltaggio sulla cella in modo da annullare il processo di carica, può essere utilizzata per regolare l'illuminazione di un laser continuo. In questo caso, però, poiché il periodo di emissione della luce è fissato dalla frequenza dei campi della telecamera, il ritardo tra i due impulsi è uguale alla durata di un campo; ciò limita l'uso di questi sensori a campi di velocità piuttosto limitati. Nella seconda modalità di funzionamento (vedi Figura 1.17(f)) la finestra elettronica è disattivata rendendo il sensore inattivo solo durante il periodo di trasferimento della carica ed i due impulsi del laser cadono rispettivamente immediatamente prima ed immediatamente dopo detto periodo. La frequenza di immagini PIV uguaglia la frequenza dei fotogrammi delle telecamere (costituita dai due campi), però, affinché detto metodo interlacciato sia affidabile, il diametro delle particelle deve essere sufficientemente grande in modo tale da evitarne la scomparsa nella seconda esposizione.

Il sensore a trasferimento completo di interlinea, a differenza del modello appena descritto, presenta una zona di memorizzazione per ogni pixel (vedi Figura 1.16(c)). In questo modo la finestrazione elettronica può essere applicata all'immagine intera anziché ad un solo campo. Con questi sensori, per mezzo di microlenti, si possono ottenere fattori di riempimento dal 20 al 60%. La possibilità di trasferire rapidamente ($1\mu s$) l'intera immagine nelle celle di memorizzazione ha permesso di estendere il campo di applicazione della PIV fino al regime transonico. Come si evince dal diagramma dei tempi mostrati in Figura 1.17(g), per il suddetto modello la frequenza di registrazione di immagini PIV è la metà rispetto a quella di acquisizione della telecamera.

1.4. Metodi di valutazione delle immagini PIV

Lo scopo principale dei metodi di valutazione di registrazioni PIV consiste nel determinare lo spostamento tra gruppi di particelle memorizzati come una distribuzione bidimensionale di livelli di grigio. Di solito, per determinare la traslazione temporale o spaziale di due segnali identici, si utilizzano tecniche di correlazione e detta correlazione può essere calcolata sia per segnali monodimensionali (segnali temporali) che bidimensionali (distribuzioni spaziali 2D). Analogamente ai segnali temporali, anche per i segnali spaziali $I(x,y)$ è possibile determinare lo spettro di potenza in funzione delle frequenze spaziali in direzioni ortogonali r_x e r_y . I teoremi fondamentali sulle correlazioni e trasformate di Fourier noti dalla teoria dei segnali, con modifiche appropriate, si possono estendere al caso bidimensionale. Per calcolare le funzioni di correlazione si può utilizzare il calcolo numerico diretto oppure il calcolo indiretto utilizzando il teorema di Wiener-Kintchine. Come è noto, questo teorema stabilisce che, dati due segnali I ed I' , il loro spettro di potenza mutua è la trasformata di Fourier della loro funzione di mutua correlazione. Si può quin-

di calcolare una funzione di correlazione o direttamente nel dominio dello spazio oppure indirettamente, calcolando in successione le trasformate di Fourier, il prodotto complesso coniugato nel dominio della frequenza e la trasformata inversa del risultato. Le operazioni possono essere eseguite sia in maniera analogica che in maniera digitale; di seguito sono riassunti i diversi metodi utilizzabili.

In Figura 1.19(a) è rappresentato il diagramma di flusso di un metodo con autocorrelazione completamente digitale, utilizzato nel caso di registrazioni con fotogramma singolo e doppia esposizione. L'immagine PIV viene suddivisa in finestre di interrogazioni più piccole, per ognuna delle quali sono calcolati la funzione di autocorrelazione e lo spostamento corrispondente al picco. Il calcolo della funzione avviene attraverso il dominio della frequenza per mezzo di algoritmi efficienti (Fast Fourier Transformation, FFT). Come mostrato in Figura 1.18, la funzione di autocorrelazione presenta tre picchi principali: un picco centrale dovuto alla correlazione delle immagini delle particelle con se stesse, e due *picchi di spostamento* sui lati opposti del picco centrale che sono dovuti alla correlazione delle immagini delle particelle della prima esposizione con quelle della seconda e viceversa. Lo spessore dei picchi dipende dalla dimensione del diametro delle particelle e, se queste ultime sono presenti in numero sufficiente, detti picchi si ergeranno tra i picchi del rumore di fondo casuale. Poiché non è possibile distinguere tra i due picchi simmetrici secondari, sarà presente un'ambiguità direzionale che generalmente viene rimossa con una traslazione dell'immagine tra la prima e la seconda esposizione.

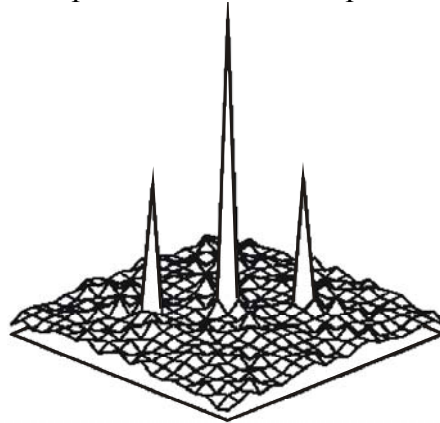


Figura 1.18 Mappa della funzione di autocorrelazione bidimensionale.

Se il sistema di acquisizione consente l'impiego di registrazioni con doppio fotogramma ed esposizione singola, il calcolo dello spostamento si effettua utilizzando la funzione di mutua correlazione tra due finestre di interrogazione (vedi Figura 1.19(b)). In questo caso, il picco nella funzione è unico e, pertanto, non è presente il problema dell'ambiguità direzionale. Per ridurre la perdita di correlazione, inoltre, è utile fissare le finestre di interrogazione in base allo spostamento medio delle particelle traccianti. Il calcolo della funzione di mutua correlazione, anche in questo caso, è fatta numericamente con un calcolatore utilizzando algoritmi FFT. Nelle applicazioni ad alta risoluzione di immagine, però, è molto difficile ottenere due esposizioni su fotogrammi diversi. Ciò accade nel caso della PIV fotografica, in cui, per utilizzare le tecniche con mutua correlazione, è necessario digitalizzare le registrazioni (Figura 1.19(c)). Le finestre di interrogazione allora possono essere scelte di dimensione diversa e leggermente sfasate l'una rispetto all'altra in modo da compensare le perdite di correlazione dovute allo spostamento delle particelle. A seconda dei diversi parametri, nel piano di correlazione compariranno picchi di autocorrelazione oltre a quelli dovuti alla mutua correlazione.

La controparte del metodo di valutazione completamente digitale con autocorrelazione è un sistema che utilizza la trasformata di Fourier ottica (OFT). Per ottenere la funzione di autocorrelazione è necessario impiegare due processori ottici di Fourier mentre un modulatore spaziale di luce (SLM) registra l'uscita del primo processore che serve da ingresso per il secondo (vedi Figura 1.19(d)). Finora, invece, in letteratura non sono stati descritti apparati ottici per il calcolo

della mutua correlazione. Infine, a causa della limitatezza nella memoria e nella velocità di elaborazione, negli anni '80 era molto diffuso il metodo delle frange di Young che, essendo un metodo ottico-digitale impiegava sia trasformate ottiche che digitali. Il diagramma di flusso relativo è rappresentato in Figura 1.19(e).

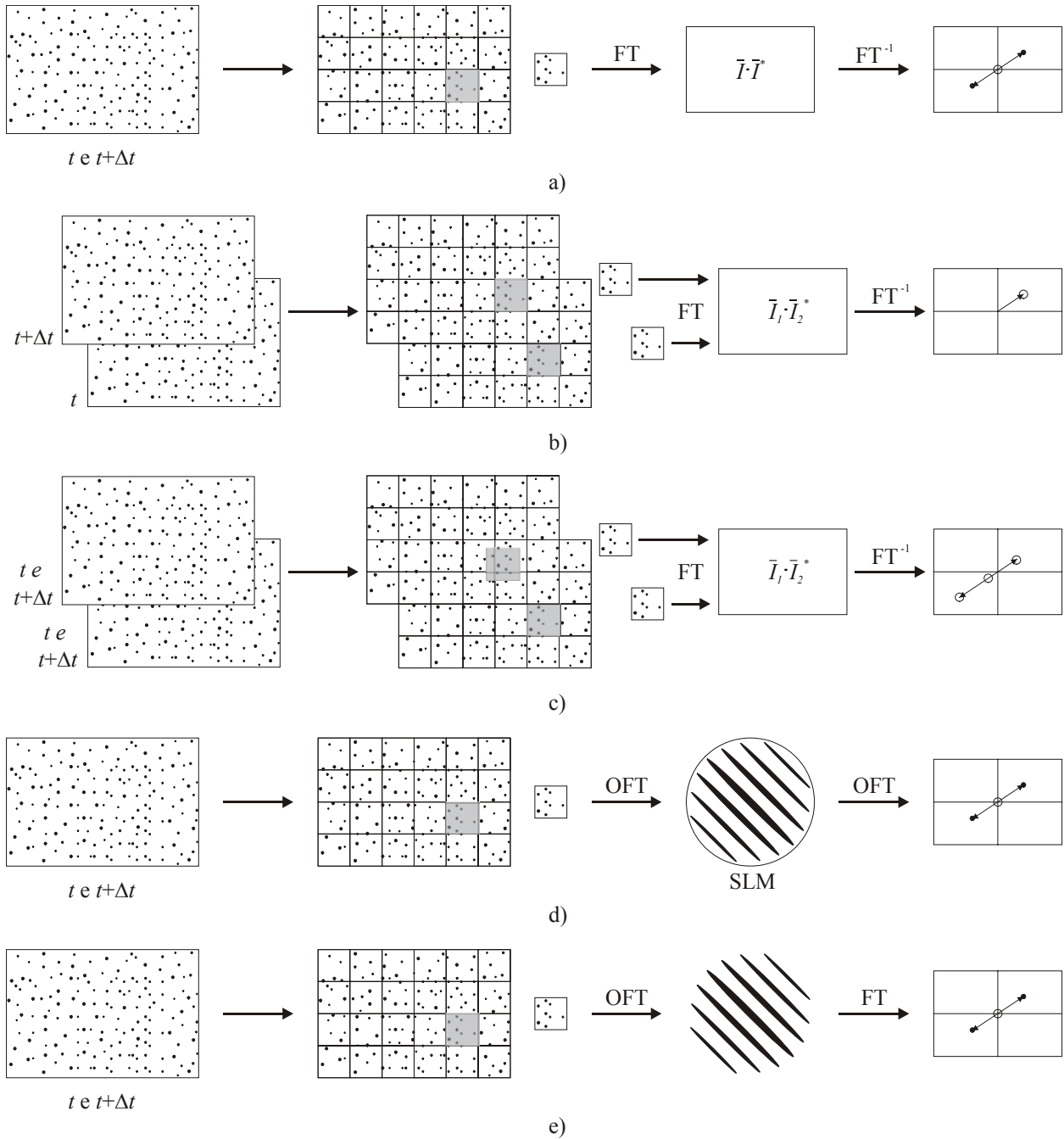


Figura 1.19 Metodi di valutazione delle immagini PIV: a) metodo con autocorrelazione completamente digitale; b) metodo con mutua correlazione digitale nel caso di fotogramma doppio e singola esposizione; c) metodo con mutua correlazione digitale nel caso di fotogramma singolo e doppia esposizione; d) metodo completamente ottico; e) metodo ibrido (ottico-digitale) utilizzando la tecnica delle frange di Young.

1.4.1. Metodi di valutazione ottici

Nel paragrafo 1.3.1 è stato già sottolineato che la figura di diffrazione della distribuzione di trasmittività di un'apertura, all'infinito, è rappresentata dalla sua trasformata di Fourier e, per mezzo di una lente, è possibile trasferire l'immagine in prossimità dell'apertura. Matematicamente è possibile ricavare detto risultato sotto opportune condizioni note come approssimazione di

Fraunhofer (grande distanza tra il piano oggetto ed il piano immagine, fattori di fase). Nella pratica, sfruttando i suddetti risultati è possibile realizzare dei processori di Fourier ottici. Questi ultimi si realizzano ponendo la diapositiva (oggetto) di cui si vuole ottenere la trasformata davanti oppure dietro la cosiddetta lente di Fourier. I due tipi di disposizione differiscono soltanto per un fattore di fase e, poiché i sensori di luce sono sensibili all'intensità della luce (il quadrato del modulo dello spettro di potenza), risultano equivalenti. Il risultato della trasformata di Fourier ottica, quindi, rappresenta direttamente lo spettro di potenza della distribuzione di toni di grigio della diapositiva.

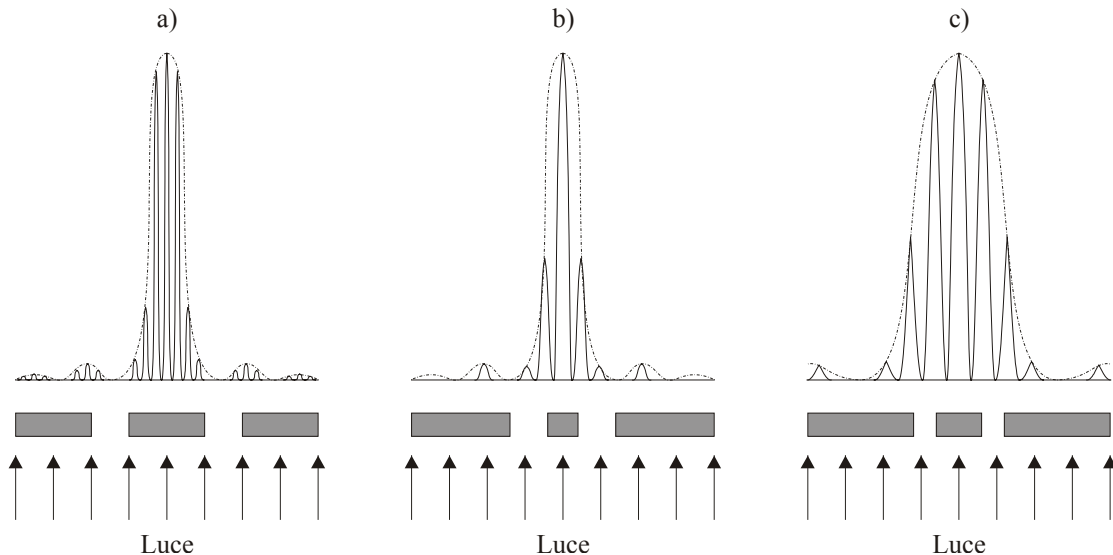


Figura 1.20 Figura di diffrazione di Fraunhofer per tre coppie differenti di aperture.

In Figura 1.20 è analizzata la figura di diffrazione generata da una coppia di immagini di particelle, che, trattandosi di traccianti bianchi su sfondo nero, sono assimilate ad una coppia di aperture sulla registrazione fotografica. La figura di diffrazione, in questo caso, si presenta come una serie di picchi di luce disposti su di una curva involuppo; quest'ultima rappresenta la figura di diffrazione di una singola apertura con lo stesso diametro. La distribuzione di intensità si estenderà anche nell'altra direzione formando le cosiddette frange di Young che sono orientate in direzione normale allo spostamento delle aperture (particelle traccianti). La distanza tra le frange è inversamente proporzionale alla spaziatura tra le aperture. Si ottiene così che al crescere della distanza tra le aperture la distanza tra le frange decresce in maniera inversa. Questo risultato è illustrato in Figura 1.20(b), in cui la distanza tra le aperture è dimezzata rispetto al caso (a) e la distanza tra le frange è raddoppiata. Come conseguenza della proprietà del cambiamento di scala della trasformata di Fourier, lo stesso tipo di relazione vale per l'involuppo della figura di diffrazione: se il diametro dell'apertura decresce, l'estensione della figura di Airy decresce in maniera inversa (cfr. Figura 1.20(b) e (c)). In base a quanto detto, ne consegue che si possono individuare un maggior numero di frange nelle figure generate da particelle di diametro minore; ciò consente di spiegare il motivo per cui le particelle piccole e messe bene a fuoco migliorano la qualità delle immagini PIV. Infine, in base alla proprietà di traslazione della trasformata di Fourier, la forma caratteristica della distribuzione di intensità non cambia se cambia la posizione della coppia di particelle nella finestra di interrogazione. Se si esclude il caso di due coppie soltanto, il numero di coppie di particelle non influenza la distribuzione delle frange di Young in maniera significativa.

Sul principio di funzionamento appena descritto si basano sia la tecnica di valutazione con il metodo delle frange di Young che il metodo di valutazione completamente ottico. Un esempio di apparato che si basa sulla prima tecnica è mostrato in Figura 1.21. Per determinare la funzione di autocorrelazione l'ingresso al primo processore di Fourier ottico è ottenuto illuminando una piccola area del negativo fotografico con un raggio di luce laser (He-Ne). Dopo aver ottenuto una

trasformata di Fourier ottica con la disposizione di figura, la distribuzione delle frange di Young è visibile nel piano di Fourier. La distribuzione è registrata per mezzo di una videocamera la cui immagine è digitalizzata ed immagazzinata su un computer. Valutando la distanza tra le frange e la loro direzione è possibile così determinare la grandezza e la velocità delle particelle traccianti. Un metodo più diffuso per valutare la distribuzione delle frange di Young consiste nell'effettuare una seconda trasformata di Fourier con un algoritmo FFT e, successivamente, ricercare numericamente il picco per mezzo di un computer. Il vantaggio sostanziale di questa procedura risiede nella velocità e nella maggiore accuratezza del metodo ottico-digitale rispetto al metodo puramente digitale. In entrambi i casi, dopo l'analisi delle frange, si trasla il negativo passando alla successiva finestra di interrogazione. Il metodo appena descritto era largamente usato nei primi anni dello sviluppo della tecnica PIV.

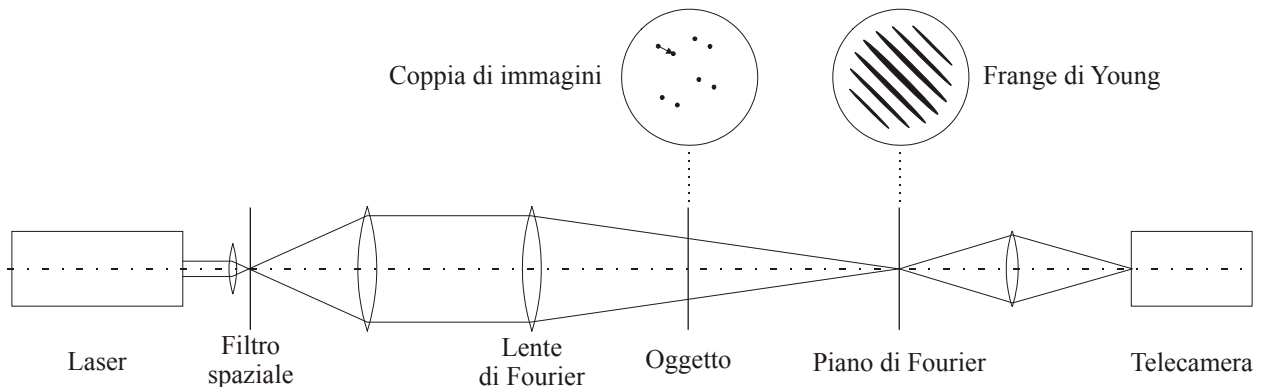


Figura 1.21 Apparato sperimentale per la valutazione di immagini PIV con la tecnica delle frange di Young.

Un metodo completamente ottico è quasi totalmente analogico, non è pertanto affetto dai problemi connessi alla digitalizzazione e si adatta bene ai larghi formati delle pellicole fotografiche. In questo caso, il calcolo della trasformata di Fourier bidimensionale è effettuato alla velocità della luce. Il principale problema nello sviluppo di un sistema completamente ottico consiste nel registrare le frange di Young in maniera da poterle utilizzare come ingresso per un secondo processore ottico di Fourier, ciò è stato reso possibile con lo sviluppo dei modulatori spaziali di luce. Un sistema particolarmente vantaggioso per realizzare la valutazione totalmente ottica è quello mostrato in Figura 1.22. Il sistema utilizza un modulatore spaziale di luce a cristalli liquidi (LC-SLM) indirizzato in maniera ottica ed in grado di realizzare frequenze dell'ordine di quelle video con un'elevata risoluzione spaziale ($40lp/min$). La sorgente di luce laser è seguita da un filtro spaziale in grado di eliminare le imperfezioni del raggio di luce originale. Il filtro spaziale aiuta a fornire un alto valore del rapporto segnale-rumore sia nel piano della frequenza che nel piano dell'autocorrelazione. Oltre il filtro spaziale il raggio laser si divide in due parti grazie ad uno splitter. I raggi che proseguono attraverso lo splitter sono focalizzati dalla lente di Fourier sul modulatore di luce. La registrazione PIV da analizzare è posizionata tra il piano e la lente di Fourier in modo da regolare le dimensioni della finestra di interrogazione. Le frange di Young sono così focalizzate sullo strato sensibile del modulatore di luce. Il raggio di lettura, dopo aver subito una deviazione nello splitter, è riflesso sul piano posteriore del modulatore per mezzo di due specchi ed un secondo splitter. Il raggio, giungendo sul lato destro del SLM, subisce una modulazione di fase secondo le frange di Young. A causa di uno specchio all'interno del modulatore, il raggio di lettura viene riflesso indietro nuovamente. La parte del raggio modulato e riflesso che attraversa il secondo splitter passa attraverso un'altra lente di Fourier fornendo lo spettro bidimensionale delle frange di Young, cioè la funzione di autocorrelazione della finestra di interrogazione che viene registrata su una videocamera. Il vantaggio principale dei metodi ottici consiste nella possibilità di misurare velocità basse e di individuare strutture spaziali poco pronunciate. Al contrario dei metodi digitali, invece, il principale svantaggio, oltre agli elevati tempi di misura causati dalla preparazione del negativo, risiede nell'impossibilità di impiegare le tecniche

che utilizzano la mutua correlazione con spostamento delle finestre di interrogazione.

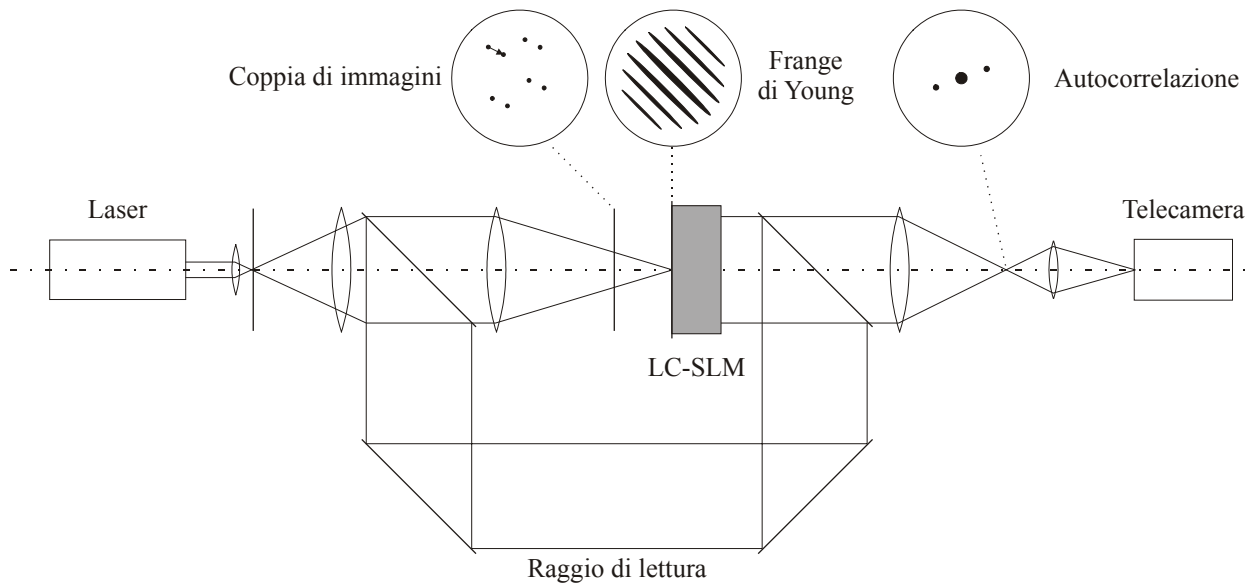


Figura 1.22 Apparato sperimentale per la valutazione di registrazioni fotografiche PIV con metodo totalmente ottico.

1.4.2. Metodi di valutazione digitali

In questo paragrafo verrà introdotto il metodo di valutazione basato sulla mutua correlazione, essendo questo il metodo più diffuso nei laboratori ed è quello utilizzato per le misure realizzate nel presente lavoro di tesi. Innanzi tutto occorre analizzare il metodo dal punto di vista dell'elaborazione delle immagini. Si assume di avere a disposizione una coppia di immagini contenenti le particelle registrate da un fascio di luce con metodo PIV tradizionale. Le particelle sono illuminate in maniera stroboscopica in modo da evitare striature nell'immagine e la seconda immagine è registrata dopo un breve intervallo di tempo nel quale le particelle si sono spostate insieme al fluido. La coppia di immagini fornisce il campo di spostamenti i cui vettori sono individuati analizzando il movimento di un gruppo di particelle localizzato. Come mostrato in Figura 1.23, ciò è ottenuto estraendo dall'immagine un piccolo campione (finestra di interrogazione) ed analizzandolo con metodi statistici.

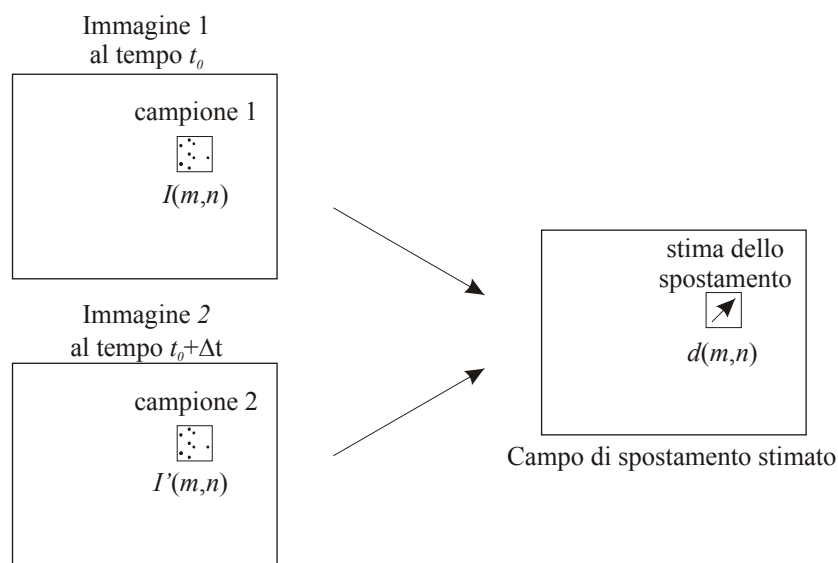


Figura 1.23 Schema del calcolo del campo di spostamento per PIV con doppio fotogramma e singola esposizione.

Dal punto di vista dell'elaborazione dei segnali, la prima immagine si può considerare come l'ingresso di un sistema che fornisce in uscita la seconda immagine della coppia. La funzione di

trasferimento del sistema converte l'immagine in ingresso I in quella di uscita I' ed è costituita da una traslazione d e dall'aggiunta del rumore N . La funzione di spostamento, come vedremo nel capitolo seguente, può essere descritta per mezzo di una convoluzione con la funzione $\delta(x-d)$ mentre il processo di rumore è principalmente dovuto al rumore di registrazione ed alla tridimensionalità del flusso. Quanto detto è illustrato schematicamente in Figura 1.24. Note le due immagini I ed I' , lo scopo del metodo di valutazione consiste nella stima del campo di spostamento eliminando gli effetti del rumore. Il fatto che il segnale non sia continuo, a causa della mancanza di informazioni dello sfondo nero, rende necessario l'utilizzo di strumenti statistici.

A causa del rumore non sufficientemente basso, piuttosto che effettuare una stima della funzione di spostamento d in maniera analitica, è preferibile ricercare una similitudine tra le immagini in senso statistico. Ciò è ottenuto utilizzando la funzione di mutua correlazione discreta data da:

$$R_{II'}(x, y) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-L}^L I(i, j) I'(i + x, j + y). \quad (1.22)$$

Le variabili I ed I' sono i campioni estratti dalle immagini delle due esposizioni ed I' ha un'estensione maggiore di quella di I . In pratica il campione I è traslato sul campione I' senza estendersi oltre i bordi di quest'ultimo. Per ciascun valore della traslazione (x, y) , la somma dei prodotti delle intensità di tutti i pixel sovrapposti fornisce un valore della funzione di mutua correlazione $R_{II'}(x, y)$. Effettuando questa operazione nel campo di valori $(-M \leq x \leq M, -N \leq y \leq N)$ si ottiene un piano di correlazione di dimensioni $(2M + 1) \times (2N + 1)$ e, per i valori dello spostamento per cui le immagini delle particelle si sovrappongono, la somma dei prodotti delle intensità assumerà valori maggiori. Il valore massimo nel piano di correlazione può così essere utilizzato come stima diretta dello spostamento delle particelle del campione.

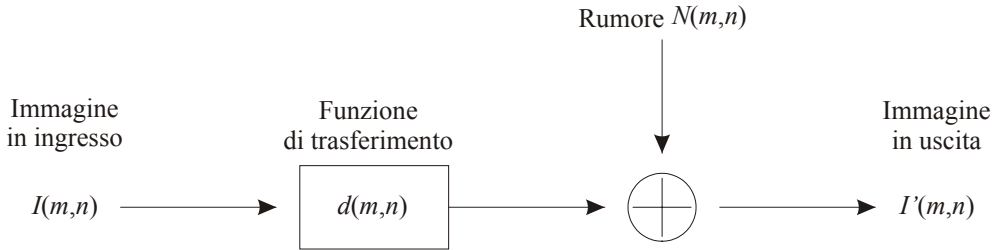


Figura 1.24 Modello di elaborazione di un segnale digitale lineare applicato al caso di due fotogrammi successivi di immagini PIV di particelle traccianti.

Adoperando l'implementazione diretta della mutua correlazione, si ha che il numero di moltiplicazioni per il calcolo di ogni valore della correlazione aumenta in proporzione all'area della finestra di interrogazione e non è possibile misurare spostamenti superiori al primo ordine, ossia non lineari. Per questo motivo è necessario ridurre sufficientemente le dimensioni delle finestre. L'incremento quadratico del numero di moltiplicazioni con le dimensioni del campione impone un notevole sforzo computazionale. Se si tiene conto che in una tipica misura PIV le finestre di interrogazione sono dell'ordine delle migliaia di pixel e che il range dinamico degli spostamenti può raggiungere fino a 20 pixel, allora sono necessarie fino ad un milione di moltiplicazioni ed addizioni per formare un piano di correlazione. Poiché, inoltre, il numero di vettori spostamento su ciascuna immagine sono migliaia, ci si rende subito conto che è necessario uno strumento di calcolo più efficiente. In alternativa al calcolo diretto, come è noto dalla teoria dei segnali, è possibile calcolare la funzione di mutua correlazione con una moltiplicazione tra complessi e coniugati nel dominio di Fourier, ossia:

$$R_{II'} \Leftrightarrow \hat{I} \cdot \hat{I}'^*, \quad (1.23)$$

in cui \hat{I} ed \hat{I}' sono le trasformate di Fourier delle funzioni I ed I' rispettivamente. Nella pratica la trasformata di Fourier per dati discreti è ottenuta utilizzando gli algoritmi FFT che riducono il numero di operazioni da $O[N^2]$ a $O[N \log_2 N]$. Pertanto, il laborioso processo di correlazione bi-

dimensionale dato dalla (1.22) può essere ridotto calcolando due trasformate di Fourier (FFT) bidimensionali su campioni delle immagini di uguali dimensioni e, successivamente, effettuando la moltiplicazione complessa coniugata dei coefficienti di Fourier ottenuti. Si calcola quindi la trasformata di Fourier del risultato, ottenendo un piano di correlazione che ha le stesse dimensioni $N \times N$ dei due campioni. Rispetto alla correlazione diretta il numero di operazioni si riduce così da $O[N^4]$ a $O[N^2 \log_2 N]$. Un ulteriore riduzione del numero di operazioni può essere ottenuto tenendo conto delle proprietà di simmetria della trasformata di Fourier; essendo la trasformata di Fourier di una funzione reale hermitiana⁵, il numero di operazioni da effettuare risulta dimezzato. In Figura 1.25 è riportato lo schema dell'implementazione di cui sopra.

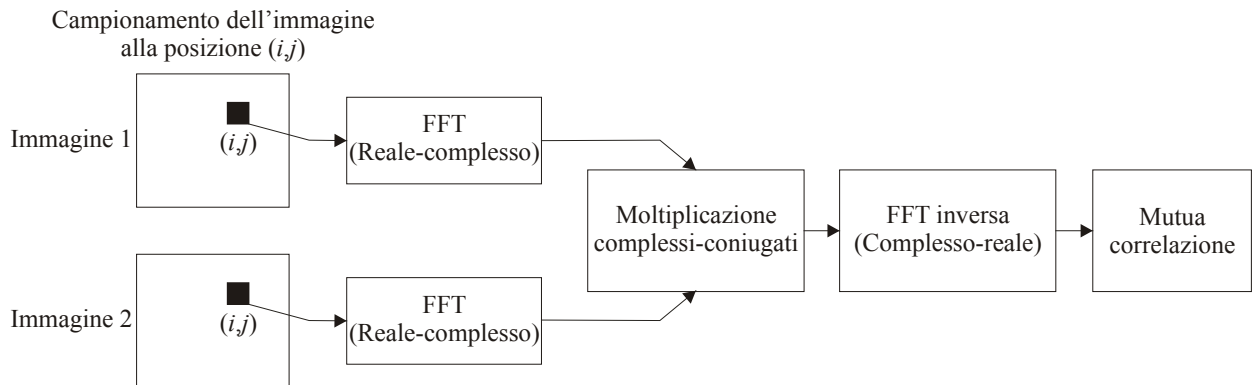


Figura 1.25 Implementazione della mutua correlazione utilizzando la trasformata di Fourier.

L'utilizzo di FFT bidimensionali per il calcolo della mutua correlazione presenta alcuni problemi che devono essere affrontati al fine di fornire risultati affidabili. L'efficienza computazionale delle FFT è dovuta principalmente a proprietà di periodicità e di simmetria tra i coefficienti pari e dispari della trasformata di Fourier discreta e questo richiede che la dimensione delle finestre sia un multiplo di 2^6 . Nel caso si utilizzino finestre con dimensioni diverse, non sempre è possibile riempire la parte rimanente con degli zero per renderle multiple di 2. Poiché il rumore di fondo è diverso da zero, l'aggiunta di zero nel campione comporta l'introduzione di rumore addizionale ad alta frequenza che peggiora la qualità del rapporto segnale-rumore. Gli errori di bordo possono essere corretti con tecniche avanzate di finestrazione, ma ciò può comportare un peso non uniforme dei dati ed il conseguente slittamento del vettore spostamento. Un altro problema risiede nel fatto che la trasformata di Fourier si estende dall'infinito negativo a quello positivo, mentre nella pratica viene calcolata su un dominio finito. Per risolvere il problema normalmente si utilizzano artifici quali la finestrazione ma, in tal caso, si introduce una serie di errori sistematici e per questo si assume che il segnale sia periodico. Tra gli effetti collaterali dell'assunta periodicità dei dati vi sono gli errori di aliasing e gli errori di polarizzazione o bias (slittamento verso valori inferiori). Al primo si pone rimedio aumentando le dimensioni delle finestre o riducendo l'intervallo tra i due impulsi, mentre al secondo si pone rimedio con un'opportuna finestrazione. Questi errori verranno descritti più in dettaglio nel capitolo seguente.

L'utilizzo della funzione di correlazione definita dall'equazione (1.22) non permette di quantificare il grado di correlazione tra due campioni delle immagini in quanto, ad esempio, immagini con un maggior numero di particelle forniranno valori di correlazione maggiori rispetto a quelle con un numero minore. Per rendere possibile un confronto del grado di correlazione tra finestre diverse è necessario perciò utilizzare una funzione di correlazione normalizzata, ovvero il coefficiente di correlazione definito come:

⁵ Si ricorda che una funzione complessa X si dice hermitiana se $X(\cdot) = X^*(-(\cdot))$, il che è equivalente alla condizione che la sua parte reale $Re\{X(\cdot)\}$ sia pari e la sua parte immaginaria sia dispari $Im\{X(\cdot)\}$. In tal caso è perciò sufficiente calcolarne la trasformata di Fourier soltanto per le frequenze positive.

⁶ Si tenga presente che quanto detto non si estende agli algoritmi FFT che hanno come base valori diversi da 2.

$$c_{I'} = \frac{C_{I'}(x, y)}{\sqrt{\sigma_I(x, y)}\sqrt{\sigma_{I'}(x, y)}} \quad (1.24)$$

dove

$$C_{I'} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N [I(i, j) - \mu_I] [I'(i + x, j + y) - \mu_{I'}(x, y)], \quad (1.25)$$

$$\sigma_I(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N [I(i, j) - \mu_I]^2 \quad \text{e} \quad \sigma_{I'}(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N [I'(i, j) - \mu_{I'}(x, y)]^2. \quad (1.26)$$

La quantità μ_I è la media di I ed è calcolata una sola volta, mentre il parametro $\mu_{I'}(x, y)$ rappresenta la media di I' e deve essere calcolata per ogni posizione (x, y) . Infine, come è stato già detto in precedenza, per aumentare il valore del rapporto segnale-rumore e la risoluzione spaziale è possibile ricorrere a tecniche di interrogazione avanzate. Per quanto riguarda il rapporto segnale-rumore, un aumento si ottiene sfasando le finestre di una quantità pari allo spostamento mentre, per quanto attiene alla risoluzione spaziale, un incremento si può realizzare con una riduzione graduale delle dimensioni delle finestre di interrogazione.

2. FONDAMENTI TEORICI DI PIV DIGITALE

Nelle fasi iniziali dello sviluppo della tecnica, gli studi sulla PIV avvenivano principalmente in maniera intuitiva ed i miglioramenti avvenivano soprattutto per tentativi ed errori. Negli ultimi anni, invece, i progressi fatti nella comprensione delle basi teoriche su cui si fonda detta tecnica hanno fornito informazioni utili su molti parametri importanti ai fini di una corretta progettazione di un sistema PIV. Per tale ragione, in questo capitolo sono richiamati in breve i principi fondamentali su cui si basa l'analisi di segnali PIV.

Il principio su cui si fonda la tecnica di misura sarà descritto utilizzando gli strumenti della teoria dei sistemi; le particelle traccianti osservate nei due istanti di tempo diversi sono schematizzate come l'ingresso e l'uscita del sistema, dalla conoscenza dei quali è possibile risalire al campo di velocità del fluido in esame. Per stimare lo spostamento delle particelle sulle immagini viene utilizzata una descrizione statistica di immagini PIV discrete. Un'accurata trattazione matematica dell'analisi statistica delle suddette immagini è stata fornita da Adrian (1988), mentre la più completa trattazione sulla PIV digitale è stata riportata da Westerweel (1993 e 1997).

2.1. Acquisizione

Di seguito viene fornita la schematizzazione in termini matematici del processo di acquisizione delle immagini PIV. Procedendo per gradi, si formula il problema del calcolo dello spostamento delle particelle utilizzando le funzioni matematiche definite nella teoria dei processi e dei campi casuali.

2.1.1. Campo di spostamento

Come già detto in precedenza, nella tecnica PIV la velocità del fluido è dedotta dal moto delle particelle traccianti, per cui il primo passo consiste nel definire un modello per le particelle. Queste ultime si definiscono *ideali* se seguono perfettamente il moto del fluido, non alterano il flusso o le proprietà del fluido e non interagiscono l'una con l'altra. La velocità è misurata indirettamente come uno spostamento $\underline{D}(\underline{X}; t', t'')$ delle particelle traccianti in un intervallo di tempo finito $\Delta t = t'' - t'$, cioè:

$$\underline{D}(\underline{X}; t', t'') = \int_{t'}^{t''} \underline{v}[\underline{X}(t), t] dt \quad (2.1)$$

in cui $\underline{v}[\underline{X}(t), t]$ è la velocità della particella tracciante. Per particelle traccianti ideali la velocità \underline{v} è uguale alla velocità locale del fluido $\underline{u}(\underline{X}, t)$, ma, nella pratica, il concetto di tracciante ideale può essere soltanto approssimato. L'equazione (2.1) implica che il campo di spostamento fornisce informazioni soltanto sulla velocità media nell'intervallo di tempo Δt e lo spostamento misurato, peraltro, non coincide con quello misurato con la tecnica PIV. Tale concetto è illustrato in Figura 2.1.

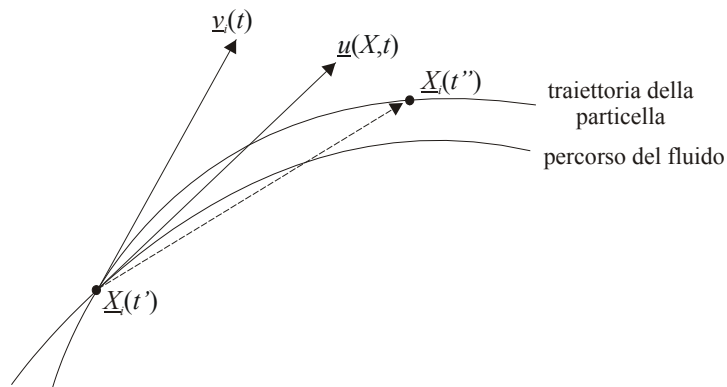


Figura 2.1 Approssimazione della velocità del fluido con lo spostamento delle particelle traccianti.

Pertanto, la grandezza \underline{D} non rappresenta la velocità \underline{u} ma ne fornisce soltanto un'approssima-

zione con errore ε :

$$|\underline{D} - \underline{u} \cdot \Delta t| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

L'errore associato è spesso trascurabile, in quanto la scala dello spazio e del tempo del flusso è grande rispetto alla risoluzione spaziale e al ritardo tra i tempi di esposizione, e rispetto alla dinamica delle particelle traccianti. Uno studio dettagliato in merito è stato condotto da Adrian (1995).

Le informazioni relative al flusso si possono ottenere solo dalle posizioni in cui si trovano le particelle traccianti. Poiché queste ultime si trovano distribuite in maniera casuale nel flusso, lo spostamento di singole particelle traccianti costituisce un campionamento casuale del campo di spostamento, e differenti realizzazioni forniscono stime diverse di \underline{D} . Ovviamente queste differenze possono essere trascurate nel caso in cui il campo di spostamento ricostruito soddisfi l'equazione (2.2). Ciò implica che il campo di spostamento dovrebbe essere campionato con una densità che rispecchi la più piccola scala delle lunghezze delle variazioni spaziali in \underline{D} . Dal momento che \underline{D} può essere visto come una rappresentazione di \underline{u} filtrata con filtro passa-basso con una lunghezza di taglio pari a $|\underline{D}|$, il campo di spostamento dovrebbe essere campionato con una distanza media minore dello spostamento delle particelle. In definitiva, una misura in cui la distanza media tra particelle distinte sia maggiore dello spostamento non consente di risolvere in maniera completa il campo moto. Quando la concentrazione del tracciante è elevata, non è però possibile individuare univocamente le coppie di particelle corrispondenti e risulta pertanto più conveniente descrivere le particelle traccianti in termini di campioni (pattern). Per fare maggiore chiarezza su quanto appena affermato, in Figura 2.2 sono rappresentate le due situazioni con flusso a bassa (figura a) e ad alta densità (figura b) rispettivamente.

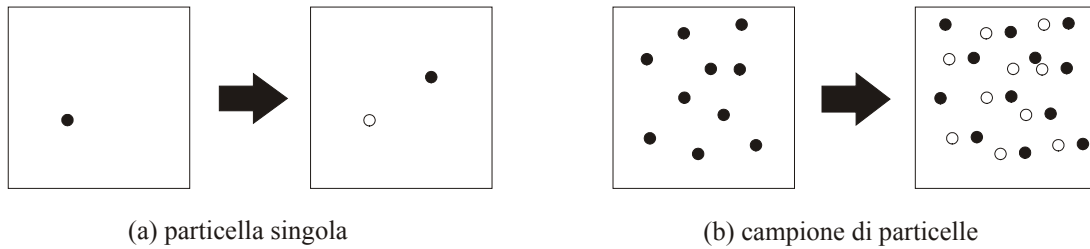


Figura 2.2 (a) A bassa densità si può distinguere una singola particella che segue il flusso; (b) ad alta densità le particelle costituiscono un campione che è trasportato dal flusso.

2.1.2. Campione tracciante

Le particelle traccianti costituiscono un campione casuale che è solidale al fluido ed il moto del fluido è visibile attraverso i cambiamenti del campione. Il campione tracciante nel punto di coordinate \underline{X} all'istante di tempo t è definito come:

$$G(\underline{X}, t) = \sum_{i=1}^N \delta[\underline{X} - \underline{X}_i(t)] \quad (2.3)$$

dove N è il numero totale di particelle nel flusso, $\delta(\underline{X})$ è l'impulso di Dirac e $\underline{X}_i(t)$ è il vettore posizione della particella i -esima all'istante di tempo t . L'integrazione della funzione $G(\underline{X}, t)$ su un volume finito fornisce il numero di particelle presenti in quel volume.

Considerando una particolare realizzazione del campione di particelle agli istanti di tempo t' e t'' , indicati con $G'(\underline{X})$ e $G''(\underline{X})$ rispettivamente, lo spostamento di una particella tracciante ideale nella posizione \underline{X} e nell'intervallo di tempo $\Delta t = t'' - t'$ è fornito dalla (2.1). La relazione tra $G'(\underline{X})$ e $G''(\underline{X})$ sotto l'azione di $\underline{v}(\underline{X}, t)$ è quindi uno spostamento $\underline{D}(\underline{X}, t', t'')$. Il campione tracciante all'istante di tempo t' può essere allora visto come un segnale spaziale $G'(\underline{X}) = G(\underline{X}, t')$ all'ingresso di un sistema "scatola nera" (rappresentante il flusso) che opera sul segnale di ingresso e restituisce in uscita un nuovo segnale $G''(\underline{X}) = G(\underline{X}, t'')$; si veda in proposito lo schema rappresentato in Figura 2.3. Per particelle traccianti ideali l'aggiunta o la sottrazione di particelle da $G(\underline{X}, t)$ non influenza l'azione del sistema sulle altre particelle traccianti, per cui si può assumere

che il sistema sia lineare. Di conseguenza, il segnale di uscita si può scrivere come convoluzione del segnale di ingresso con la risposta all'impulso del sistema:

$$G''(\underline{X}) = \int H(\underline{X}, \underline{X}') G'(\underline{X}') d\underline{X}' . \quad (2.4)$$

La risposta all'impulso è una traslazione dell'ingresso della spostamento \underline{D} nell'equazione (2.1), cioè:

$$H(\underline{X}', \underline{X}'') = \delta[\underline{X}'' - \underline{X}' - \underline{D}] . \quad (2.5)$$

Lo spostamento formalmente dipende da \underline{X} ma, per l'equazione (2.2), si può assumere che \underline{D} sia localmente uniforme, in modo che H possa essere considerato invariante rispetto alle traslazioni, cioè $H(\underline{X}', \underline{X}'') = H(\underline{X}'' - \underline{X}')$.

In accordo con la teoria dei sistemi lineari, la risposta all'impulso di un sistema può essere ottenuta dalla mutua covarianza di un segnale in ingresso casuale con il corrispondente segnale di uscita:

$$C_{G'G''}(\underline{s}) = H * C_{G'}(\underline{s}) \quad (2.6)$$

(Priestley, 1992), dove il simbolo $*$ denota un integrale di convoluzione, e $C_{G'}$ denota l'autocovarianza del segnale d'ingresso. Nel caso particolare in cui il segnale d'ingresso sia rumore bianco ($C_{G'}(\underline{s}) \propto \delta(\underline{s})$), la mutua correlazione fornisce direttamente la risposta all'impulso.

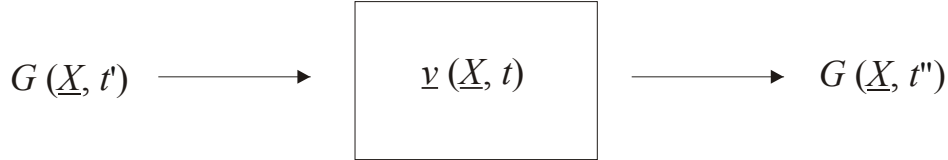


Figura 2.3 Il campo di velocità $\underline{v}(\underline{X}, t)$ si può considerare come un sistema “scatola nera” che agisce sul campione di particelle $G(\underline{X}, t')$ in ingresso per fornire in uscita il campione di particelle $G(\underline{X}, t'')$.

2.1.3. Proprietà statistiche delle particelle traccianti

Seguendo la teoria di Adrian (1988), le proprietà statistiche dei traccianti possono essere valutate considerando l'insieme di tutte le possibili realizzazioni di $G(\underline{X}, t)$ per un dato campo di moto $\underline{u}(\underline{X}, t)$. La mutua covarianza statistica o di insieme è definita come:

$$C_{G'G''}(\underline{X}', \underline{X}'') = \langle G'(\underline{X}') G''(\underline{X}'') \rangle - \langle G'(\underline{X}') \rangle \langle G''(\underline{X}'') \rangle \quad (2.7)$$

dove il simbolo $\langle \dots \rangle$ indica la media d'insieme.

Per calcolare i termini che compaiono nell'equazione (2.7), il campione di traccianti definito dalla (2.3) è rappresentato come un singolo vettore in uno spazio di fase $3N$ -dimensionale:

$$\underline{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \underline{X}_1(t) \\ \underline{X}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{X}_N(t) \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

Per particelle traccianti ideali la traiettoria di $\underline{\Gamma}$ è determinata dal campo di velocità corrispondente alle posizioni delle particelle traccianti:

$$\frac{d\underline{\Gamma}}{dt} = \underline{U}(\underline{\Gamma}, t) \quad \text{con} \quad \underline{U}(\underline{\Gamma}, t) = \begin{pmatrix} \underline{u}(\underline{X}_1, t) \\ \underline{u}(\underline{X}_2, t) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{X}_N, t) \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Con la suddetta rappresentazione, la media d'insieme di $G(\underline{X})$ è data da:

$$\langle G \rangle = \int G(\underline{\Gamma}) \rho(\underline{\Gamma}) d\underline{\Gamma} \quad (2.10)$$

in cui $\rho(\underline{\Gamma})$ è la funzione densità di probabilità (PDF) per $\underline{\Gamma}$. Per non appesantire la notazione sono state omesse le dipendenze da \underline{X} e da t . La statistica del secondo ordine $\langle G' G'' \rangle$ è data da:

$$\langle G' G'' \rangle = \iint G(\underline{\Gamma}') G(\underline{\Gamma}'') \rho(\underline{\Gamma}'' | \underline{\Gamma}') \rho(\underline{\Gamma}') d\underline{\Gamma}' d\underline{\Gamma}'' \quad (2.11)$$

in cui $\rho(\underline{\Gamma}'' | \underline{\Gamma}')$ è la probabilità condizionata di $\underline{\Gamma}''$ dato lo stato iniziale $\underline{\Gamma}'$. Per un assegnato campo di moto $\underline{\Gamma}''$ è univocamente determinato dalla (2.9), per cui si ha:

$$\rho(\underline{\Gamma}'' | \underline{\Gamma}') = \delta[\underline{\Gamma}'' - \underline{\Gamma}' - \underline{D}] \quad \text{con } \underline{D} = \int_{t'}^{t''} \underline{U}[\underline{\Gamma}(t)] dt \quad (2.12)$$

(cfr. equazione (2.1)). Sostituendo l'espressione della funzione densità di probabilità condizionata appena ricavata nella (2.11) si ottiene:

$$\langle G' G'' \rangle = \int G(\underline{\Gamma}) G(\underline{\Gamma} + \underline{D}) \rho(\underline{\Gamma}) d\underline{\Gamma}. \quad (2.13)$$

Si è dunque visto che entrambe le statistiche del primo e secondo ordine sono determinate dalla funzione $\rho(\underline{\Gamma})$ (nel caso di particelle traccianti ideali).

Poiché non ci sono particelle che sono create o distrutte nel campione, ρ soddisfa un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (2.14)$$

(questa è sostanzialmente una formulazione del teorema di Liouville). Considerando il caso di un flusso incompressibile con distribuzione omogenea delle particelle

$$\nabla \rho = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (2.15)$$

ed inserendo le condizioni (2.15) nell'equazione (2.14) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.16)$$

che implica che $\rho(\underline{\Gamma}, t)$ è costante e non dipende dal campo di moto. Per cui, un campione di particelle traccianti omogeneo può rimanere tale nel caso di particelle ideali soltanto in un campo di moto incompressibile.

Detta C la densità delle particelle traccianti definita come $C = N/V$, in cui N è il numero di particelle traccianti e V è il volume, nel limite per N e $V \rightarrow \infty$ a C costante, le statistiche del primo e del secondo ordine sono date rispettivamente da:

$$\begin{cases} \langle G'(\underline{X}) \rangle = \langle G''(\underline{X}) \rangle = C \\ \langle G'(\underline{X}') G''(\underline{X}'') \rangle = C \delta[\underline{X}'' - \underline{X}' - \underline{D}] + C^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

(vedi appendice A). In base alla (2.7) si ha:

$$C_{G'G''}(\underline{X}', \underline{X}'') = C \delta[\underline{X}'' - \underline{X}' - \underline{D}]. \quad (2.18)$$

Quest'ultimo risultato implica che un'interpretazione della mutua covarianza in termini dello spostamento del tracciante è corretta soltanto per un flusso incompressibile con distribuzione omogenea delle particelle traccianti considerate ideali. Negli altri casi la posizione del picco di correlazione non è determinata semplicemente dal campo di moto, ma è spostata in base alla distribuzione del tracciante nel flusso. Nei casi in cui l'analisi con correlazione non è adatta, si è costretti ad utilizzare metodi diversi, la cui descrizione esula dagli scopi del presente lavoro. In conclusione, affinché si abbiano delle misurazioni corrette è necessario distribuire il tracciante nella maniera più uniforme possibile, in modo che sull'immagine non sia possibile distinguere alcun tipo di struttura contrariamente a quanto accade nel caso delle tecniche di visualizzazione di flussi.

2.1.4. Generazione dell'immagine

Per l'analisi delle immagini PIV che si formano sul sensore CCD descritta in questo paragrafo, si adotta il sistema ottico rappresentato in Figura 2.4. Secondo tale sistema, le particelle traccianti sono illuminate da un sottile fascio di luce laser di spessore ΔZ_0 e sono proiettate sul piano immagine di una lente. Si assume che il sistema consista di una lente circolare priva di aberrazioni

e che la distanza del piano oggetto Z_0 e quella del piano immagine z_0 soddisfino le leggi dell'ottica geometrica con fattore di ingrandimento M costante (vedi capitolo precedente). Si assume che tutte le particelle siano identiche e siano a fuoco (condizione che è soddisfatta se lo spessore del fascio è minore della profondità di campo); nell'approssimazione parassiale ciò implica che le particelle del piano immagine abbiano tutte lo stesso diametro indipendentemente dalla posizione. L'intensità del fascio di luce $I_0(X, Y, Z)$ si assume uniforme lungo le direzioni X ed Y mentre, lungo la direzione ortogonale al piano oggetto, si assume un andamento Gaussiano dato dalla relazione:

$$I_0(X, Y, Z) = I_0(Z) = I_Z \exp\left(-8(Z - Z_0)^2 / \Delta Z_0^2\right), \quad (2.19)$$

dove I_Z è la massima intensità lungo la direzione Z . Inoltre, si ipotizza che la densità N_S della sorgente sia abbastanza bassa da evitare la sovrapposizione delle particelle.

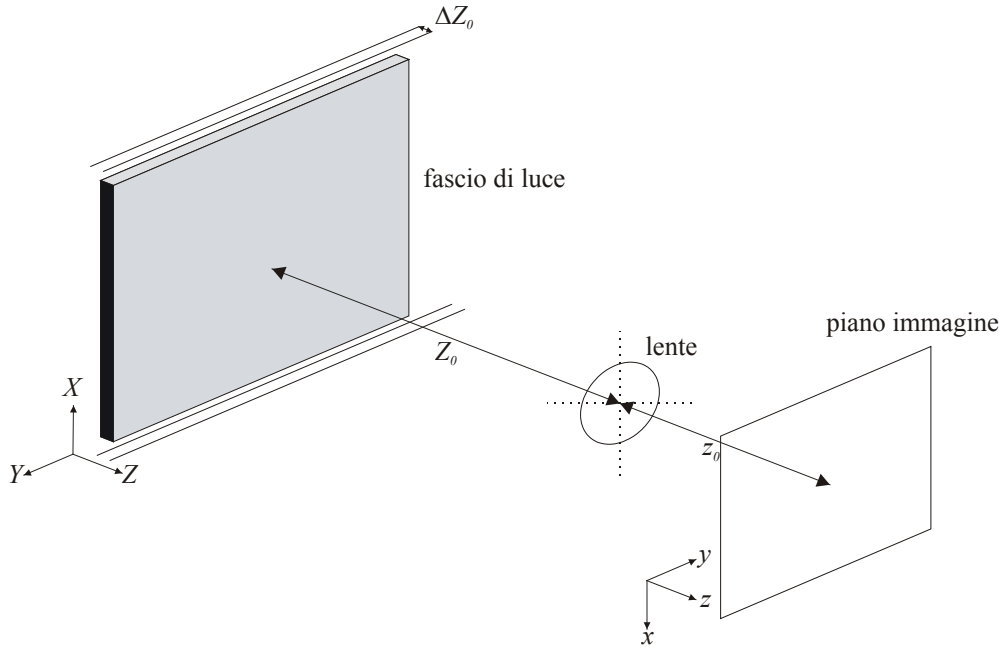


Figura 2.4 Rappresentazione schematica del sistema di generazione delle immagini PIV.

Poiché la carica immagazzinata da un sensore CCD è proporzionale alla intensità della luce incidente, è sufficiente effettuare l'analisi delle immagini riferendosi direttamente all'intensità delle immagini $I(x, y)$. Quest'ultima, come è noto, è data dal quadrato del modulo del campo di ampiezze complesso sull'immagine. Note la posizioni $\underline{X}_k = (X_k, Y_k, Z_k)$ delle particelle traccianti e sfruttando l'ipotesi di non sovrapposizione di queste ultime, si ottiene per l'intensità la seguente espressione:

$$I(x, y) = \sum_k I_0(Z_k) t(x - MX_k, y - MY_k), \quad (2.20)$$

in cui $t(x, y)$ rappresenta il quadrato del campo di ampiezze normalizzato di una particella tracciante (ossia l'immagine di una singola particella) e la sommatoria si intende effettuata su ciascuna particella di indice k . L'equazione (2.20) si può scrivere alternativamente come:

$$I(x, y) = I_Z t(x, y) * g(x, y) \quad (2.21)$$

con $g(x, y)$ campione tracciante sull'immagine dato da:

$$g(x, y) = \frac{I}{I_Z} \sum_k I_0(Z_k) \delta(x - MX_k, y - MY_k). \quad (2.22)$$

La funzione $g(x, y)$ è in pratica la proiezione sull'immagine del campione tracciante $G(\underline{X})$ e la relazione tra le due funzioni è ovviamente data da:

$$g(x, y) = \frac{I}{I_Z} \frac{1}{M^2} \int I_0(Z) G(X, Y, Z) dZ. \quad (2.23)$$

In analogia con $G(\underline{X})$, l'integrale di $g(x, y)$ su di un'area fornisce il numero di particelle (non intero) sull'area.

Considerando lo spostamento delle particelle costante sull'immagine, la mutua covarianza di insieme di g' e g'' è data da:

$$C_{g'g''}(\underline{s}) = M^{-2} F_O(\Delta Z) \cdot C\Delta Z'' \cdot \delta(\underline{s} - \underline{s}_D) \quad (2.24)$$

con $F_O(\Delta Z)$ e $\Delta Z''$ dati rispettivamente da:

$$F_O(\Delta Z) = \int I_0(Z) I_0(Z + \Delta Z) dZ / \int I_0^2(Z) dZ \quad \text{e} \quad \Delta Z'' = \frac{1}{I_z^2} \int I_0^2(Z) dZ \quad (2.25)$$

e dove $\underline{s}_D = M \cdot (\Delta X, \Delta Y)$ è lo spostamento delle particelle sul piano dell'immagine. Il termine F_O rappresenta la *perdita di correlazione* dovuta alle particelle che entrano o escono dal fascio di luce. Inoltre, poiché per un piano di luce uniforme F_O è proporzionale alla grandezza dello spostamento ortogonale al piano di misura, questa informazione può essere utilizzata per determinare l'entità di detto spostamento. Invece, la mutua covarianza di insieme delle intensità delle immagini I' ed I'' è data da:

$$C_{I'I''}(\underline{s}) = F_O(\Delta Z) \cdot C_I * \delta(\underline{s} - \underline{s}_D), \quad (2.26)$$

dove $C_I(\underline{s})$ è la funzione di autocovarianza dell'immagine data da (vedi appendice B):

$$C_I(\underline{s}) = C\Delta Z'' M^{-2} I_z^2 t_0^2 F_t(\underline{s}). \quad (2.27)$$

La funzione F_t è l'autocorrelazione dell'immagine di una particella mentre t_0^2 è un termine di normalizzazione tale che $t_0^2 F_t = t * t$. La quantità $\Delta Z''$ in base alla (2.19) è pari a $0.44\Delta Z_0$. Nel caso di particelle di piccole dimensioni sull'immagine, la funzione $C_{I'I''}$ ha la forma di un picco stretto avente spessore proporzionale a d_t . La posizione di detto picco, rispetto alla funzione di autocorrelazione, è traslata di una quantità pari allo spostamento delle particelle sull'immagine e la sua ampiezza è proporzionale al numero di particelle per unità di area che rimangono all'interno del fascio di luce ($F_O C\Delta Z_0 M^2$).

2.2. Interrogazione

I modelli analizzati nei paragrafi precedenti sono utilizzati per descrivere le proprietà statistiche del processo di interrogazione delle immagini PIV descritto più in dettaglio di seguito.

2.2.1. Correlazione spaziale

Nel paragrafo precedente, ai fini del calcolo delle correlazioni è stato considerato l'insieme di tutte le possibili realizzazioni del campo di particelle. Nella pratica il campo di moto non è riproducibile ed è disponibile soltanto una realizzazione di I' ed I'' . Per tale motivo, la media di insieme si sostituisce con la correlazione spaziale definita come:

$$R(\underline{s}) = \iint W'(\underline{x}) I'(\underline{x}) W''(\underline{x} + \underline{s}) I''(\underline{x} + \underline{s}) d\underline{x}, \quad (2.28)$$

dove W' e W'' sono funzioni finestre che sono associate ai domini di interrogazione I' ed I'' rispettivamente. Affinché sia possibile utilizzare la (2.28) al posto della (2.26) è necessario che l'operazione di media spaziale sia ergodica rispetto a quella di insieme, il che implica che la media spaziale sul dominio di interrogazione converge alla media di insieme quando l'area del dominio tende all'infinito. Questa condizione è soddisfatta quando il campione tracciante è omogeneo e la risposta all'impulso è invariante rispetto alle traslazioni. In base a quanto detto, la correlazione spaziale può essere decomposta nella somma della media di insieme $\langle R(\underline{s}) \rangle$ e di una fluttuazione $R'(\underline{s})$ rispetto alla media. Il primo termine si può decomporre in ulteriori tre termini (Adrian, 1988), ottenendo:

$$R(\underline{s}) = \langle R(\underline{s}) \rangle + R'(\underline{s}) = R_D(\underline{s}) + R_C(\underline{s}) + R_F(\underline{s}) + R'(\underline{s}). \quad (2.29)$$

R_C è il termine di correlazione di fondo costante che rappresenta, in prima approssimazione, la correlazione delle intensità medie ed R_F è il termine di correlazione fluttuante che rappresenta la correlazione tra le intensità medie e quelle fluttuanti. $R_D(\underline{s})$, noto come picco dello spostamento

di correlazione, è dato da:

$$R_D(\underline{s}) = N_I F_I F_O \cdot I_Z^2 t_0^2 F_t * \delta(\underline{s} - \underline{s}_D), \quad (2.30)$$

in cui N_I è la densità dell'immagine e $F_I(\underline{s})$ è dato da:

$$F_I(\underline{s}) = \frac{I}{D_I^2} \int W'(\underline{x}) W''(\underline{x} + \underline{s}) d\underline{x}, \quad (2.31)$$

dove D_I^2 è l'area associata al dominio di interrogazione.

I termini R_C ed R_F possono essere eliminati sottraendo l'intensità media dell'immagine da I' ed I'' . Il termine di correlazione random $R'(\underline{s})$ è rappresentativo della fluttuazione di una singola realizzazione rispetto al valore della media di insieme. In definitiva, il valore atteso della correlazione spaziale è sostanzialmente uguale alla correlazione di insieme moltiplicata per un termine che tiene conto delle perdite di correlazione nel piano dovute alle particelle traccianti che entrano o escono dal dominio di interrogazione. L'ampiezza del picco di correlazione è proporzionale a $N_I F_I F_O$, dove N_I rappresenta il numero di particelle medio dell'immagine nella finestra di interrogazione.

2.2.2. Gradienti di velocità ed errori di bias

La valutazione delle immagini con una mutua correlazione spaziale implica che la funzione $C_{G'G''}$ sia valutata su di un volume di misura finita $\delta V(\underline{X}) = \Delta Z_0 D_I^2$. A causa delle variazioni spaziali dello spostamento in detto volume, la funzione δ nella (2.18) è sostituita da una funzione di distribuzione dello spostamento ρ e la (2.30) diventa allora:

$$R_D(\underline{s}) = N_I F_I F_O \cdot I_Z^2 t_0^2 F_t * \rho(\underline{s} - \underline{s}_D). \quad (2.32)$$

\underline{s}_D è un vettore di riferimento per la posizione della distribuzione degli spostamenti. Poiché lo spostamento non è univocamente determinato \underline{s}_D si assume pari al massimo di ρ (spostamento più probabile) o al momento del primo ordine di ρ (spostamento medio locale) o, in base alle esigenze, ad un parametro che caratterizza la distribuzione.

La distribuzione ha una larghezza finita che è proporzionale alla variazione locale della velocità $|\Delta \underline{u}|$. Il volume totale della distribuzione rimane costante e, di conseguenza, quando la distribuzione si allarga, l'ampiezza del picco diminuisce. L'allargamento del picco di correlazione ha un effetto trascurabile su R_D quando la variazione di velocità sul volume di integrazione è piccola rispetto alla larghezza di C_I , cioè se:

$$|\Delta \underline{u}| \Delta t \ll d_t / M; \quad (2.33)$$

in tal caso il campo di spostamento si può considerare localmente uniforme. Nel seguito si assumerà sempre valida la condizione (2.33).

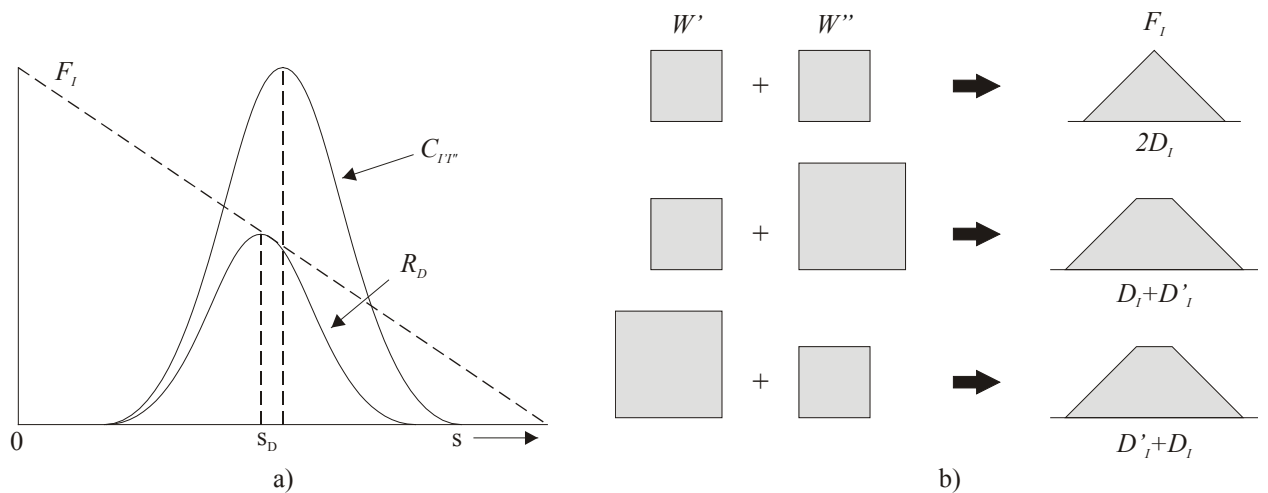


Figura 2.5 Errore di polarizzazione (bias): a) spostamento del picco di correlazione verso lo zero; b) effetto dell'utilizzazione di finestre di dimensioni diverse sulla funzione F_I .

Come si è visto, l'equazione (2.30) implica che la stima della correlazione è uguale al picco di covarianza d'insieme moltiplicato per la funzione F_I . Se W' e W'' hanno la stessa dimensione, F_I ha andamento decrescente rispetto all'ampiezza dello spostamento e, di conseguenza, il picco in R_D si trova verso il centro del dominio di correlazione in maniera tale che il massimo ed il momento del primo ordine della correlazione spaziale sono traslati verso valori inferiori (vedi Figura 2.5(a)). Poiché questo effetto è proporzionale alla larghezza del picco di correlazione, se ne deduce che detto errore, conosciuto in letteratura come errore di bias o polarizzazione, aumenta con il diametro delle particelle. A causa dell'ulteriore incremento nella larghezza del picco, l'errore di bias è più significativo in presenza di forti gradienti di velocità sulla finestra di interrogazione. Un valore tipico dell'errore di bias per una finestra 32×32 pixel è circa 0.1. Ciò può indurre errori significativi nella stima delle statistiche del campo di moto o nel calcolo di quantità derivate (vorticità), e rende necessaria una correzione. L'errore può essere eliminato dividendo la correlazione spaziale per F_I oppure utilizzando finestre di interrogazione di dimensioni diverse. Come è mostrato in Figura 2.5(b), in quest'ultimo caso, una parte della funzione F_I è costante e lo spostamento non è traslato verso valori inferiori. Spesso in letteratura si giustifica l'aumento delle dimensioni della seconda finestra, imputando la correzione dell'errore al fatto che in tal modo tutte le particelle presenti in W' saranno presenti anche in W'' . Ciò implica che, quando la seconda finestra è minore della prima, la perdita di particelle incrementerebbe l'effetto di bias. Tale interpretazione risulta errata in quanto, come si vede dalla Figura 2.5(b), invertendo le due finestre il risultato non cambia. Inoltre, occorre sottolineare sin d'ora che per effettuare un'interrogazione efficiente deve essere possibile distinguere il picco di correlazione R_D dal rumore di correlazione casuale C' . Ciò implica che bisogna massimizzare l'ampiezza di R_D , cioè il termine $N_I F_I F_O$. Keane ed Adrian hanno fornito, in diversi lavori (1990, 1991, 1993), i seguenti criteri validi nel caso di misurazioni PIV ad alta densità:

$$N_I F_I F_O > 7 \text{ e } M |\Delta u| \Delta t / D_I < d_i / D_I \approx 0.03 - 5. \quad (2.34)$$

Nel caso di un'immagine con $N_I = 12$, si ottiene che gli spostamenti nel piano e in direzione ortogonale devono essere minori di un quarto di D_I e ΔZ_0 rispettivamente ($F_I, F_O \geq 0.75$). Maggiori dettagli sugli errori e sull'ottimizzazione della correlazione verranno forniti in un paragrafo successivo.

2.2.3. Conversione analogico/numerica

Come mostrato in Figura 2.6, il processo di conversione analogico/numerica di un'immagine PIV può essere suddiviso in un processo di discretizzazione, consistente nel campionamento del segnale in piccoli elementi dell'immagine (pixel), e nella successiva quantizzazione dell'ampiezza del segnale. Prima di analizzare più in dettaglio i suddetti processi, è necessario fare qualche considerazione sulla scelta della frequenza di campionamento necessaria ad una rappresentazione corretta dell'immagine continua originale.

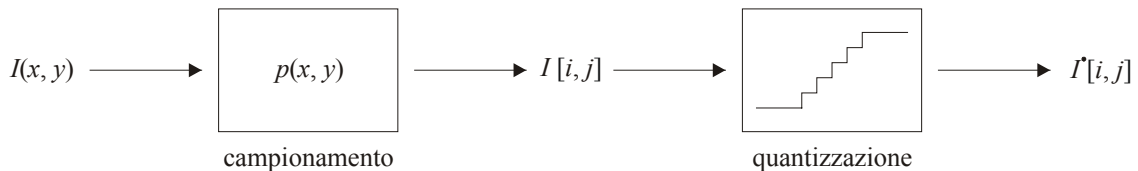


Figura 2.6 Schema del processo di conversione analogico/numerica di un'immagine continua.

Come è noto dal teorema del campionamento, un segnale analogico può essere ricostruito dai suoi campioni se è a banda rigorosamente limitata e la frequenza di campionamento è non minore del doppio della sua banda B (frequenza di Nyquist). Nell'ipotesi di lente sferica sottile di lunghezza focale f ed apertura D , il sistema ottico di Figura 2.4 è a banda rigorosamente limitata data da:

$$B = [(M + 1)f_\# \lambda]^{-1}, \quad (2.35)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce laser. Per $f_\# = 8$, $M = 1$ e $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, la banda è pari a

125mm^{-1} , per cui un'area pari a $1 \times 1\text{mm}^2$ dovrebbe essere campionata con una risoluzione di almeno 256×256 pixel. Valori così elevati sono realizzabili soltanto con PIV fotografica. Tuttavia, lo scopo di un'analisi PIV non è la ricostruzione dell'immagine ma la determinazione della posizione del picco di covarianza e, in base a quanto detto nel paragrafo 2.1.1, essendo l'informazione relativa al campo di spostamento contenuta nei numeri d'onda minori dello spettro, non è necessario risolvere completamente la banda ottica. Per tale ragione, al posto della banda ottica, si preferisce considerare la banda della densità spettrale $S(\chi, \psi)$ del campo casuale che descrive le statistiche delle immagini PIV. Trascurando la sua forma dettagliata, la funzione di covarianza di un'immagine PIV tende rapidamente verso lo zero con una frequenza che è caratterizzata dal suo momento del secondo ordine ed ha una funzione di densità spettrale che si annulla per valori di (χ, ψ) sufficientemente elevati. Per questo tipo di segnale a banda praticamente limitata esistono varie definizioni della larghezza di banda e, per i processi causali, tutte legano la banda spettrale alla massima frequenza di decadimento della funzione di covarianza. In questo caso si fa quindi riferimento alla banda di Parzen che, nel caso di un processo con densità spettrale a simmetria assiale, è definita come il raggio di un cilindro che ha lo stesso volume totale dello spettro e la stessa altezza corrispondente a numero d'onda nullo:

$$B_p = [\pi S(0,0)]^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Si noti che $S(0, 0)$, essendo pari all'integrale sul picco di correlazione, è proporzionale a d_t^2 . Nel caso le dimensioni delle particelle siano pari a d_s e l'immagine abbia andamento di tipo gaussiano, per gli stessi parametri ottici di cui sopra, si ottiene un valore della banda di Parzen (1957) pari a 31mm^{-1} , per cui si ha una risoluzione di 64×64 pixel su un'area di $1 \times 1\text{mm}^2$. La banda risulta in questo caso un quarto della banda ottica e ciò spiega il motivo per cui una telecamera con sensori CCD abbia una risoluzione adeguata alla registrazione di immagini PIV. Dopo questa premessa è possibile ora analizzare le due fasi del processo di conversione analogico/numerica.

Come è stato discusso nel capitolo precedente, l'immagine $I(x, y)$ è discretizzata con un dispositivo elettronico (CCD) che integra l'intensità della luce su una piccola area (pixel). Si assume che il dispositivo abbia una risposta lineare rispetto all'intensità della luce incidente e sia costituito di pixel quadrati e continui aventi area d_r^2 . L'immagine discreta $I[i, j]$ è allora data da:

$$I[i, j] = \iint p(x - id_r, y - jd_r) I(x, y) dx dy \quad (2.37)$$

dove $p(x, y)$ è la funzione di campionamento data da:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/d_r^2 & |x|, |y| < d_r/2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (2.38)$$

La mutua covarianza discreta delle due immagini I' ed I'' è definita dalla relazione:

$$C_{I'I''}[r, s] = \langle I'[i, j] I''[i + r, j + s] \rangle - \langle I'[i, j] \rangle \langle I''[i + r, j + s] \rangle \quad (2.39)$$

e, sostituendo la (2.37), si ottiene l'espressione in funzione della funzione di mutua covarianza continua⁷ (vedi appendice C):

$$C_{I'I''}[r, s] = \{\Phi_{pp} * C_{I'I''}\}(rd_r, sd_r) \quad (2.40)$$

dove Φ_{pp} è la funzione di autocorrelazione della funzione di campionamento. In definitiva, la funzione di mutua covarianza discreta è data dalla convoluzione della funzione di mutua covarianza continua con Φ_{pp} campionata ai valori interi dei pixel. Sostituendo nella (2.40) l'espressione della mutua covarianza data dalla (2.26), si ottiene:

$$C_{I'I''}[r, s] = F_O(\Delta Z) \{\Phi_{pp} * C_{I'}\}(rd_r - M\Delta X, sd_r - M\Delta Y). \quad (2.41)$$

Si noti che gli spostamenti $M\Delta X$ e $M\Delta Y$ in generale non sono multipli interi di d_r e, contrariamente alla (2.26), la funzione di mutua covarianza discreta non si può considerare una copia del-

⁷ Tenendo conto della (2.30), si può giungere ad una relazione analoga alla (2.40) anche per la funzione di correlazione spaziale.

la funzione di autocovarianza moltiplicata per $F_O(\Delta Z)$ e traslata di $(M\Delta X/d_r, M\Delta Y/d_r)$.

Successivamente al campionamento, l'intensità dell'immagine I è convertita in una variabile discreta I' che assume valori in un insieme finito di numeri. I quantizzatori di gran lunga più utilizzati sono i quantizzatori uniformi ad 8 bit senza memoria. Essendo il processo di quantizzazione irreversibile, esso introduce una distorsione e la relazione tra l'ingresso e l'uscita del quantizzatore può essere espressa come:

$$I[m, n] = I'[m, n] + \zeta[m, n] \quad (2.42)$$

dove ζ denota il rumore di quantizzazione. Assumendo che il numero di livelli sia abbastanza grande rispetto all'intervallo di valori in ingresso, ζ si può approssimare con una distribuzione uniforme con i seguenti momenti:

$$E\{\zeta\} = 0 \quad \text{var}\{\zeta\} = \frac{1}{12} q^2 \quad E\{I' \cdot \zeta\} = 0 \quad E\{I \zeta\} = E\{\zeta^2\} \quad (2.43)$$

dove q rappresenta la differenza tra due livelli di quantizzazione successivi. Di conseguenza, nell'ipotesi di indipendenza del rumore di quantizzazione tra le due immagini, l'effetto della quantizzazione si può schematizzare come rumore bianco additivo che appare nella mutua covarianza come un impulso nell'origine:

$$C^*[u, v] = C[u, v] + E\{\zeta^2\} \cdot \delta[0, 0]. \quad (2.44)$$

Pertanto, per spostamenti diversi da zero, l'errore di quantizzazione non influenza la valutazione del picco di correlazione.

2.3. Analisi digitale

In questo paragrafo verranno discussi gli aspetti principali dell'analisi digitale delle immagini PIV e, in particolare, l'attenzione sarà rivolta alla stima dei principali errori che si riscontrano nell'utilizzazione di metodi numerici.

2.3.1. Correlazione spaziale discreta

Per una coppia di immagini I' ed I'' con finestre di interrogazione di $N \times N$ pixel, lo stimatore di mutua covarianza generalmente adottato è dato da:

$$\hat{R}_D[r, s] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I'[i, j] - \bar{I})(I''[i + r, j + s] - \bar{I}) \quad (2.45)$$

dove \bar{I} è l'intensità media dell'immagine ottenuta mediante lo stimatore corretto e consistente⁸:

$$\bar{I} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I[i, j]. \quad (2.46)$$

Poiché nella (2.45) si utilizza la stima (2.46) in luogo del valore medio $\langle I \rangle$ non noto a priori, la stima (2.45) risulta correlata con \bar{I} . Se però si calcola la \bar{I} sull'intera immagine di dimensioni $M \times M$ con $M \gg N$, allora la suddetta correlazione risulta trascurabile⁹. Il valore atteso della (2.45) è dato da:

$$E\{\hat{R}_D[r, s]\} = F_I[r, s] \cdot R_D[r, s] \quad (2.47)$$

con

$$F_I[r, s] = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right), \quad (2.48)$$

⁸ È facile verificare che il valore atteso dello stimatore (2.46) coincide con il valore medio dell'intensità dell'immagine e, nel caso di immagini con particelle di piccole dimensioni ($d_i/d_r \approx 1$), la sua varianza tende a zero al crescere di N (vedi appendice C).

⁹ Poiché la varianza di \bar{I} e la covarianza di \bar{I} con $\hat{R}_D[r, s]$ sono dell'ordine di $1/M^2$ mentre la varianza e la covarianza di $\hat{R}_D[r, s]$ sono di ordine $1/N^2$, nell'ipotesi $M \gg N$ la correlazione tra $\hat{R}_D[r, s]$ ed \bar{I} può essere trascurata (vedi appendice C).

per cui lo stimatore (2.45) è non corretto, ma tende asintoticamente ($N \rightarrow \infty$) al valore corretto. La (2.48) non è altro che la funzione (2.31) scritta per un sistema discreto ed utilizzando una finestra uniforme, pertanto, restano valide tutte le considerazioni fatte per la (2.31). Se si trascurano i termini della distribuzione congiunta del quarto ordine e si assume N sufficientemente grande, nell'ipotesi che $F_O \approx 1$ e che lo spostamento delle particelle sia esattamente un numero intero di pixel si ottiene (vedi appendice C):

$$\text{cov}\{\hat{R}_D[r, s], \hat{R}_D[r + t, s + u]\} \approx 0 \text{ e } \text{Var}\{\hat{R}_D[r, s]\} \approx \frac{1}{N^2} C_I^2[0, 0]. \quad (2.49)$$

L'ipotesi che N sia sufficientemente grande implica che siano soddisfatte simultaneamente le due condizioni $N \gg d_t/d_r$ e $|r|, |s| \ll N$. La prima condizione implica che le immagini delle particelle siano piccole rispetto all'area di interrogazione e che la larghezza del picco di correlazione sia contenuta. Questa condizione è di solito verificata dalle immagini PIV. La seconda condizione implica che la (2.49) sia verificata soltanto per spostamenti piccoli rispetto ad N . Le indicazioni fornite da Keane ed Adrian (1990) in base alle quali lo spostamento delle particelle-immagine debba essere minore di un quarto del diametro dell'area di interrogazione ($|r|, |s| \ll N/4$) sono ritenute sufficienti per poter considerare N sufficientemente grande. La (2.49) mostra che il rumore associato alla stima di $R_D[r, s]$ è incorrelato e proporzionale ad $1/N^2$, ossia lo stimatore (2.45) è costituito da un picco di correlazione dominante associato al picco di spostamento di $R_D[r, s]$ e da un rumore di fondo che ha le proprietà di un campo casuale bianco. Poiché in base alla (2.47) l'ampiezza del picco di correlazione diminuisce al crescere dello spostamento, per spostamenti elevati cresce la probabilità di avere picchi di correlazione inferiori rispetto ai picchi del rumore circostante e ciò può comportare errori di misura. Molti autori ritengono che, per ottenere una misura attendibile sia necessario che all'interno di ciascuna finestra siano presenti almeno quattro coppie di particelle-immagine. Assumendo che il numero n di particelle-immagine segua una legge di distribuzione di probabilità di Poisson con media $\mu = N_I F_I F_O$, la probabilità Γ di trovare più di quattro coppie particelle è data da:

$$\Gamma = P(n \geq 5) = 1 - \sum_{i=0}^4 \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu}. \quad (2.50)$$

Come già detto nel capitolo precedente, la correlazione spaziale di immagini discrete (2.45) può essere calcolata in maniera diretta oppure attraverso la trasformata discreta di Fourier (DFT). In quest'ultimo caso, grazie all'utilizzo di algoritmi FFT detto calcolo avviene in maniera rapida ed accurata. Inoltre, la principale differenza con il metodo diretto risiede nel fatto che la DFT assume che l'immagine sia periodica. Poiché il dominio della correlazione (2.45) si estende da $N-1$ ad N per ogni componente, la DFT dovrebbe essere calcolata su un dominio $2N \times 2N$. Per ottenere ciò, è necessario riempire con zeri le parti rimanenti delle immagini I' ed I'' , infatti, il calcolo della trasformata di Fourier su un dominio minore farebbe comparire nella correlazione termini aggiuntivi paragonabili ad errori di "aliasing" nel dominio della frequenza. Tuttavia, se gli spostamenti soddisfano la condizione (2.34), la mutua covarianza si annulla per valori dello spostamento $|r|, |s| > N/4$ ed il calcolo della DFT può essere effettuato su un dominio $N \times N$.

2.3.2. Stima dello spostamento

Nel paragrafo precedente si sono analizzate le proprietà statistiche dello stimatore (2.45) e si è visto che il massimo corrisponde allo spostamento del picco di correlazione. La posizione del picco, però, è nota solamente con la risoluzione di 1 pixel. D'altra parte, poiché il picco di correlazione ha un'ampiezza finita che generalmente copre più di un pixel, è possibile effettuare una stima dello spostamento con precisione inferiore al pixel conoscendo il valore della funzione di covarianza in corrispondenza dei picchi adiacenti al massimo. Ovviamente, l'accuratezza nella misura dello spostamento dipende dal numero di pixel occupati dal picco di correlazione e, per tale motivo, è necessario conoscere la risoluzione con cui è necessario campionare l'area di interrogazione per ottenere stime precise della posizione del massimo.

Per stabilire la larghezza del picco di correlazione, in analogia ai processi casuali monodimensionali, è possibile introdurre una scala integrale della lunghezza della covarianza L definita come:

$$L^2 = \sum_t \sum_u \frac{\text{cov}\{\hat{R}_D[r_D, s_D], \hat{R}_D[r_D + t, s_D + u]\}}{\text{var}\{\hat{R}_D[r_D, s_D]\}}, \quad (2.51)$$

in cui $[r_D, s_D]$ rappresenta la posizione del picco di correlazione. In base alla definizione, si può interpretare la quantità L^2 come il numero di campioni correlati per un campione di $N \times N$ pixel e la quantità $N^2 - L^2$ come numero di campioni indipendenti, mentre il rapporto tra N^2 ed L^2 rappresenta una misura del contenuto di informazione di una finestra di interrogazione rispetto alla stima di covarianza.

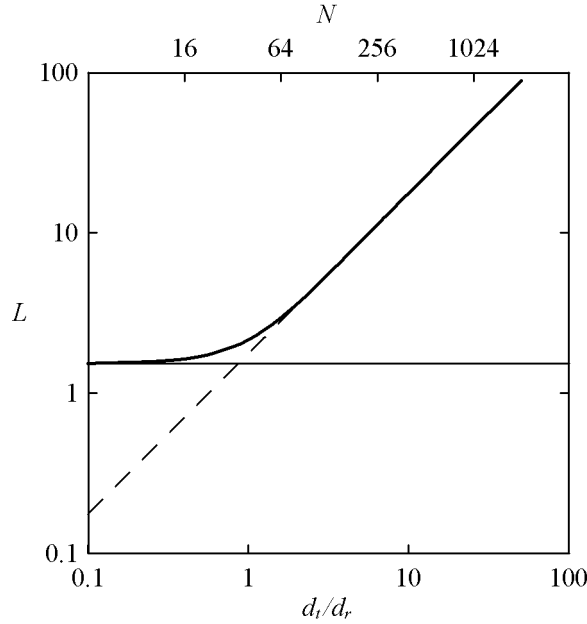


Figura 2.7 Lunghezza di covarianza in funzione della risoluzione in pixel su una finestra di interrogazione di $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ ed un diametro delle particelle pari a $25\mu\text{m}$.

In Figura 2.7 è riportata la lunghezza di covarianza L in funzione di d_t/d_r nel caso di una finestra di interrogazione di $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$, $d_t = 25\mu\text{m}$ e con legge di decadimento della funzione di correlazione secondo potenza con base minore dell'unità (vedi appendice C). In pratica, essendo costante la dimensione fisica della finestra di interrogazione, al crescere della risoluzione (N) diminuisce la dimensione del pixel (d_r). Per $N < 32$, il diametro della particella sull'immagine è minore di un pixel ($d_t/d_r < 1$), L rimane costante e di ordine di grandezza unitario e la larghezza del picco è determinata sostanzialmente da Φ_{pp} . Il fatto che L rimanga costante implica che un incremento della risoluzione comporti una migliore accuratezza nella stima dello spostamento, infatti, per picchi di correlazione stretti i campioni sono praticamente incorrelati ed un aumento della risoluzione comporta un maggiore contenuto di informazione sul picco di correlazione. Per $d_t/d_r > 1$ la larghezza del picco di correlazione è proporzionale a d_t ed L è proporzionale ad N . In questo caso, un incremento della risoluzione non si traduce in un incremento del contenuto di informazione; la stessa informazione è semplicemente distribuita su un maggior numero di campioni, i valori di covarianza adiacenti diventano fortemente correlati e, perciò, il contenuto di informazione rimane costante al crescere della risoluzione. Occorre notare che i due comportamenti appena descritti corrispondono alle condizioni di sottocampionamento e sovra-campionamento del segnale e, il valore della risoluzione per cui L diventa proporzionale ad N ($N > 64$) è in accordo con la frequenza di campionamento calcolata in base alla banda di Parzen. I risultati riportati in Figura 2.7 mostrano che la misura della risoluzione è determinata da d_t/D_I e non da d_r/D_I , per cui, finché il valore d_t/D_I rimane lo stesso, non c'è nessuna differenza di risoluzione ed accuratezza tra PIV fotografica e registrazioni digitali. Per aumentare l'accuratezza nella misura della covarianza occorre quindi incrementare N rispetto al rapporto d_t/d_r , il che implica che, per

covarianza occorre quindi incrementare N rispetto al rapporto d_t/d_r il che implica che, per un fissato d_t , occorre incrementare l'area di interrogazione. Un aumento indiscriminato dell'area di interrogazione non è però possibile per due ragioni. In primo luogo, per garantire un'accettabile risoluzione spaziale, la dimensione delle finestre di interrogazione deve essere molto minore delle dimensioni totali dell'immagine. In secondo luogo, finestre di interrogazioni di dimensioni eccessive contrastano con la necessità di avere spostamenti uniformi sulla finestra stessa. Per tali ragioni sono pochi i gradi di libertà concessi per poter migliorare l'accuratezza nella misura dello spostamento.

Come già detto numerose volte, lo spostamento delle particelle sull'immagine è dato dalla posizione del picco di covarianza rispetto all'origine. Nell'ipotesi che ci sia un numero sufficiente di particelle corrispondenti sull'immagine, il picco di covarianza è identificato dal massimo della (2.45) collocato nella posizione $[m_O, n_O]$. Lo spostamento effettivo (r_D, s_D) è invece dato da:

$$r_D = (m_O + \epsilon_m) d_r \text{ e } s_D = (n_O + \epsilon_n) d_r \quad (2.52)$$

dove m_O ed n_O sono gli spostamenti interi, mentre ϵ_m ed ϵ_n sono gli spostamenti frazionari verificanti le condizioni:

$$-0.5 < \epsilon_m \leq 0.5 \text{ e } -0.5 < \epsilon_n \leq 0.5. \quad (2.53)$$

Senza considerare lo spostamento frazionario, lo stimatore di mutua covarianza fornisce un errore pari a $\pm 0.5d_r$. Nel caso di finestre di interrogazione di dimensioni 32×32 pixel con spostamenti pari ad 8 pixel l'errore può raggiungere il valore del 6%, errore che nella maggior parte delle applicazioni risulta inaccettabile. Per avere un'accuratezza inferiore al pixel è allora necessario che il picco di correlazione abbia larghezza superiore ad un pixel. Ciò è possibile anche quando il diametro di una particella è inferiore ad un pixel, infatti, essendo l'ampiezza di Φ_{pp} pari a $2d_r$, il picco di correlazione discreto copre più di un pixel nel dominio di correlazione. Per valori della risoluzione bassi, si ha che soltanto i valori della funzione di covarianza immediatamente adiacenti al massimo superano la soglia del rumore di fondo, per cui ci si occuperà soltanto degli stimatori dello spostamento frazionario che utilizzano la covarianza in $[m_O, n_O]$ ed i quattro valori adiacenti. Assumendo che la funzione (2.45) sia a simmetria circolare e a variabili separabili r ed s e che ϵ_m ed ϵ_n siano statisticamente incorrelati (covarianza nulla), è possibile allora calcolare gli spostamenti frazionari come indipendenti, riducendo così il problema ad un problema monodimensionale. In base a quanto detto, si utilizzano gli stimatori di spostamento frazionario su tre punti e nelle espressioni si adopera la seguente simbologia:

$$R_m = R_D[m_O + m, 0], \hat{R}_m = \hat{R}_D[m_O + m, 0], F_m = F_I[m_O + m, 0], R^* = \hat{R}/F_I. \quad (2.54)$$

I tre stimatori più utilizzati sono descritti di seguito.

– *Stimatore baricentrico*

Il metodo più utilizzato in passato per la stima della posizione del picco è quello che si ottiene con il momento del primo ordine. Il nome di stimatore baricentrico deriva dal fatto che in meccanica il momento del primo ordine di una distribuzione di massa fornisce il baricentro della distribuzione stessa. Noti i tre punti, il momento è dato da:

$$\hat{\epsilon}_C = \frac{\hat{R}_{+1} - \hat{R}_{-1}}{\hat{R}_{+1} + \hat{R}_0 + \hat{R}_{-1}}. \quad (2.55)$$

– *Stimatore parabolico*

Uno stimatore più avanzato consiste nell'assumere un andamento parabolico per la funzione di covarianza. Noti i valori in tre punti è possibile calcolare i tre parametri della curva parabolica ed ottenere così la posizione del massimo che definisce lo stimatore parabolico come:

$$\hat{\epsilon}_P = \frac{\hat{R}_{-1} - \hat{R}_{+1}}{2(\hat{R}_{-1} + \hat{R}_{+1} - 2\hat{R}_0)}. \quad (2.56)$$

La principale differenza rispetto allo stimatore baricentrico risiede nel fatto che adesso si suppone in maniera esplicita che ci sia un punto di massimo, ossia $R_0 > R_{\pm 1}$.

– *Stimatore Gaussiano*

Uno stimatore molto simile allo stimatore parabolico è lo stimatore Gaussiano. Detto stimatore si basa sull'ipotesi che la forma del picco di correlazione segua un andamento Gaussiano. Poiché il logaritmo di una curva Gaussiana è una curva parabolica, in analogia con la (2.56), si ottiene l'espressione:

$$\hat{\epsilon}_G = \frac{\ln \hat{R}_{-1} - \ln \hat{R}_{+1}}{2(\ln \hat{R}_{-1} + \ln \hat{R}_{+1} - 2 \ln \hat{R}_0)}. \quad (2.57)$$

In questo caso, oltre alla condizione $\hat{R}_0 > \hat{R}_{\pm 1}$ è necessario che $\hat{R}_i > 0 \forall i$.

Se si confrontano i tre stimatori si vede che lo stimatore baricentrico fornisce sempre un risultato a prescindere dalla forma, lo stimatore parabolico richiede che il punto centrale sia un massimo, cosa verificata in base alla definizione (2.53), mentre lo stimatore gaussiano richiede che tutti e tre i valori della funzione di covarianza siano positivi. Da ciò si deduce che lo stimatore più robusto è il primo, mentre quello meno robusto è il Gaussiano. D'altra parte, lo stimatore Gaussiano approssima meglio la funzione di covarianza e, generalmente, ciò si traduce in una migliore accuratezza della misura. Per tale ragione, ci si aspetta che lo stimatore più accurato sia il Gaussiano, mentre quello meno accurato sia lo stimatore baricentrico che non introduce nessuna funzione di forma. Infine, va notato che per tutti e tre gli stimatori il numeratore contiene soltanto i termini R_{-1} ed R_{+1} mentre il denominatore, che appare come un fattore di normalizzazione, è funzione di tutti e tre gli elementi. Ciò è una conferma che lo spostamento frazionario influenza principalmente i due termini adiacenti al picco o, viceversa, sono proprio questi ultimi i termini contenenti l'informazione relativa allo spostamento frazionario.

2.3.3. Stima degli errori

Prima di analizzare la stima degli errori nella misura dello spostamento, occorre sottolineare che il primo parametro che richiede un'ottimizzazione per le misure PIV è l'intervallo di tempo tra i due impulsi laser. Al di là delle limitazioni tecniche, in proposito è necessario valutare alcuni aspetti generali. Com'è noto, la velocità misurata dal rapporto tra le due componenti dello spostamento ΔX e ΔY e l'intervallo tra gli impulsi Δt . Poiché lo spostamento delle particelle si determina a partire dallo spostamento sull'immagine $\underline{s} = [r, s]$ e quest'ultimo è affetto da un errore residuo ϵ_{resid} , per il modulo della velocità locale è possibile utilizzare la seguente relazione:

$$|\underline{u}| = \frac{|\underline{s}(\Delta t)|}{M\Delta t} + \frac{\epsilon_{resid}}{M\Delta t}. \quad (2.58)$$

Poiché lo spostamento delle particelle varia in maniera lineare con l'intervallo di tempo tra gli impulsi, il primo termine della (2.58) rimane costante al decrescere della distanza tra gli impulsi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\underline{s}(\Delta t)|}{M\Delta t} = |\underline{u}|. \quad (2.59)$$

Al contrario, al diminuire dell'intervallo tra gli impulsi, l'errore residuo contenuto nella misura dello spostamento non si riduce al disotto di una certa soglia poiché l'incertezza nella determinazione della posizione delle particelle non è influenzata dalla distanza tra gli impulsi. Per tale motivo il secondo termine della (2.58) cresce rapidamente al diminuire di Δt :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\epsilon_{resid}}{M\Delta t} = \infty. \quad (2.60)$$

In definitiva, sembra che al crescere del Δt aumenti l'accuratezza delle misure; l'incremento dell'intervallo di tempo comporta però un aumento nel rumore di misura in quanto, in base alla (2.30), diminuisce il numero di coppie corrispondenti e, di conseguenza, il picco di correlazione. La scelta dell'intervallo tra gli impulsi deriva, pertanto, da un compromesso tra le due tendenze

opposte di cui sopra. I parametri utilizzati per stabilire il valore ottimale sono generalmente il numero di vettori validi ed il fattore di correlazione. I metodi per ridurre le perdite di correlazione verranno trattati più ampiamente nel prossimo capitolo¹⁰.

Dopo questa premessa è possibile analizzare più in dettaglio le fonti di errori che si riscontrano comunemente nelle misure di spostamento con tecnica PIV. L'accuratezza della misura è una combinazione di vari fattori che vanno dai metodi di registrazione a quelli di valutazione delle immagini. L'errore di misura assoluto di un singolo vettore spostamento ε_{tot} può essere decomposto in un gruppo di errori sistematici, ε_{sys} , ed in un gruppo di errori residui, ε_{resid} :

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{sys} + \varepsilon_{resid} \quad (2.61)$$

Gli errori sistematici comprendono tutti gli errori dovuti all'inadeguatezza dei metodi statistici di valutazione delle immagini come l'applicazione in regioni ad elevati gradienti, oppure l'utilizzo di stimatori frazionari inadeguati. La caratteristica di avere andamenti particolari di questi ultimi ne permette la riduzione o l'eliminazione mediante la scelta di un altro tipo di analisi. Gli errori residui sono invece gli errori che rimangono dopo la rimozione degli errori sistematici. Poiché non è sempre semplice distinguere tra errori sistematici ed errori residui, si preferisce allora decomporre l'errore totale in errore di polarizzazione (bias), ε_{bias} , ed errore casuale o incertezza nella misura, ε_{rms} :

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{bias} + \varepsilon_{rms} \quad (2.62)$$

Inoltre, per valutare gli errori sistematici o casuali si utilizzano registrazioni PIV di cui si conosce il campo di spostamento in maniera affidabile, oppure si ricorre a simulazioni numeriche basate sulla generazione di immagini sintetiche con simulazione Monte Carlo.

Nel paragrafo 2.3.1 si è già discusso della polarizzazione dello stimatore di mutua covarianza, ora è necessario analizzare la polarizzazione e la consistenza degli stimatori di spostamento frazionario che costituiscono una delle principali fonti di errori nelle misure PIV. Analogamente a quanto visto nella (2.47), è possibile dimostrare che, così come sono stati definiti nelle (2.55)-(2.57), gli stimatori frazionari sono polarizzati in maniera tanto più accentuata quanto più ampia è la larghezza del picco di correlazione. Sebbene sia piccolo, l'errore di polarizzazione (bias) può indurre errori significativi nella stima delle statistiche del campo di moto, come le velocità medie, o nel calcolo delle quantità derivate, come la vorticità. Se però si divide lo stimatore di mutua covarianza per i corrispondenti valori di F_I , riscrivendo le (2.55)-(2.57) con lo stimatore R^* definito dall'ultima delle (2.54), si ottengono stimatori non polarizzati. La varianza dello stimatore frazionario è approssimata dalla formula:

$$\text{var}\{\hat{\varepsilon}\} \approx \sum_{i=-1}^{+1} \sum_{j=-1}^{+1} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R_i^*} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R_j^*} \text{cov}\{R_i^*, R_j^*\} \quad (2.63)$$

valida nell'ipotesi che:

$$\text{var}\{\hat{R}_m\} \ll E\{\hat{R}_m\}^2, \quad (2.64)$$

condizione questa che è verificata per $N \gg 1$. Volendo analizzare la varianza nell'ipotesi che gli spostamenti siano interi ($\varepsilon = 0$), si ottiene che:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R_0^*} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R_{-1}^*} = - \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial R_{+1}^*} \quad (2.65)$$

e la (2.63) si riduce a:

¹⁰ A rigore, l'influenza sull'errore dell'intervallo di tempo tra gli impulsi, così come è stato riportato, non è del tutto corretto. Come si vedrà nel capitolo successivo, se si utilizzano i metodi con spostamento delle finestre di interrogazione si può eliminare il problema della riduzione del picco di correlazione. Inoltre, al crescere di Δt , aumenta l'errore sulla misura dovuto all'approssimazione della velocità con lo spostamento. Un'analisi più completa sulla questione si può trovare in Wereley & Meinhard (2001) ed in Meunier & Leweke (2003).

$$\text{var}\{\hat{\epsilon}\} \approx \left(\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial R_{\pm 1}^*} \right)^2 \left[\text{var}\{R_{-1}^*\} + \text{var}\{R_{+1}^*\} - 2 \text{cov}\{R_i^*, R_j^*\} \right]. \quad (2.66)$$

Il primo termine della (2.66) dipende soltanto dalla funzione di interpolazione dello spostamento frazionario e suggerisce che un miglioramento della precisione si ottiene quando l'interpolazione si adatta meglio alla forma del picco di correlazione. Il secondo termine, invece, dipende soltanto dalle proprietà statistiche del picco di correlazione. Quest'ultimo termine scomparirebbe se R_{-1}^* ed R_{+1}^* fossero perfettamente correlati e ciò accade soltanto nel caso di spostamento nullo ed errore di quantizzazione nullo. Inoltre, poiché il primo termine è proporzionale a $1/R_D^2 = O(N_I^{-2})$ mentre il secondo è proporzionale a $R_D^2 = O(N_I^2)$, si ha il risultato notevole che la varianza dello stimatore non dipende dalla densità dell'immagine, ossia un incremento della densità della particelle traccianti non migliora la precisione della stima. Questo risultato, verificato anche sperimentalmente, può essere giustificato nella maniera seguente: l'analisi della correlazione è valida per spostamenti quasi uniformi, per cui tutte le coppie di particelle subiscono lo stesso spostamento; l'aggiunta di altre coppie di particelle nonostante aumenti l'ampiezza di R_D incrementando la capacità di distinguere il picco, non aggiunge nessuna informazione allo spostamento (in pratica tutti gli spostamenti sono identici). In definitiva, la precisione della misura è data da d_I/D_I , mentre l'affidabilità della misura dipende da N_I .

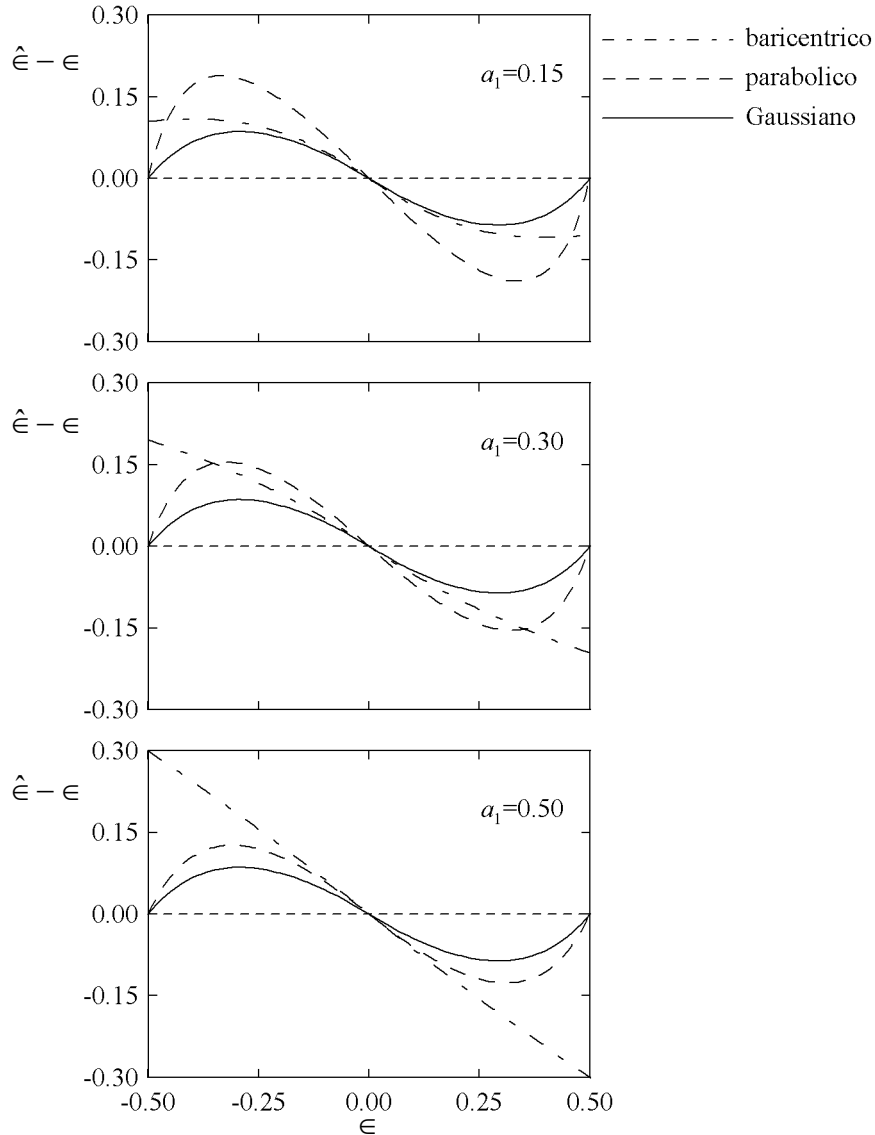


Figura 2.8 Funzione di tracciamento dei tre stimatori frazionari in funzione dello spostamento frazionario per tre valori del parametro del modello a_1 (proporzionale alla larghezza del picco di correlazione).

Per analizzare il comportamento degli stimatori frazionari nel caso di spostamenti non interi è necessario introdurre l'*errore di tracciamento*, definito come la differenza tra lo spostamento frazionario calcolato con gli stimatori e lo spostamento effettivo:

$$\hat{\varepsilon}_b = \hat{\varepsilon} - \varepsilon. \quad (2.67)$$

Per confrontare i risultati ottenuti con i tre stimatori si assume che la funzione di covarianza abbia le seguenti espressioni¹¹:

$$R_{-1} = a_1^{1+\varepsilon}, \quad R_0 = a_1^{|\varepsilon|}, \quad R_{+1} = a_1^{1-\varepsilon}, \quad (2.68)$$

con $0 < a_1 < 1$. Sostituendo le (2.68) nelle (2.55)-(2.57) si ottengono le espressioni:

$$\hat{\varepsilon}_c = - \frac{\sinh(\varepsilon \ln a_1)}{\cosh(\varepsilon \ln a_1) + \frac{1}{2} a_1^{|\varepsilon|-1}} \quad (2.69)$$

$$\hat{\varepsilon}_p = \frac{\sinh(\varepsilon \ln a_1)/2}{\cosh(\varepsilon \ln a_1) - a_1^{|\varepsilon|-1}} \quad (2.70)$$

$$\hat{\varepsilon}_g = \frac{\varepsilon}{2 - 2|\varepsilon|}. \quad (2.71)$$

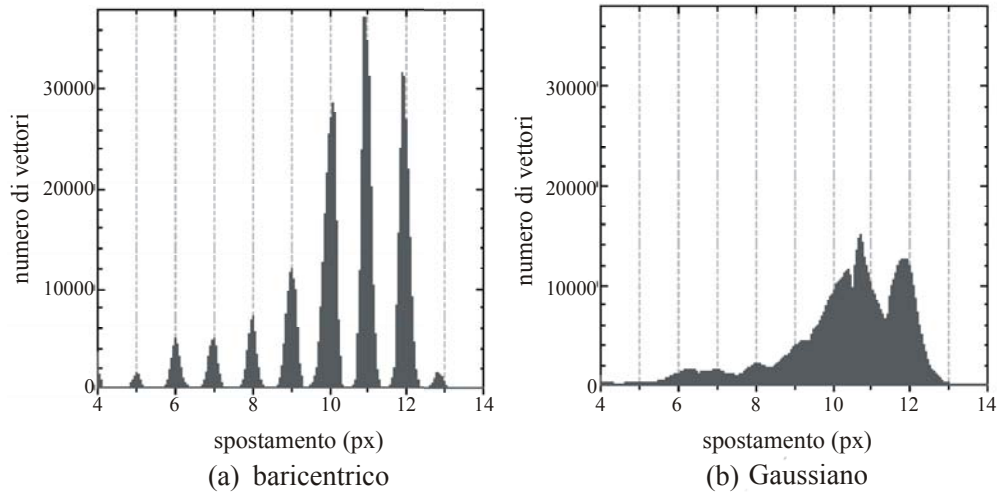


Figura 2.9 Istogrammi dello spostamento assiale in pixel in un flusso turbolento in un condotto (Westerweel et al, 1996), utilizzando lo stimatore frazionario baricentrico (a) e quello Gaussiano (b).

Si noti che, dei tre stimatori frazionari, soltanto quello Gaussiano non dipende da a_1 e quindi dalla larghezza del picco di correlazione. I diagrammi delle funzioni di tracciamento in funzione di ε sono riportati in Figura 2.8 per tre valori differenti di a_1 (in questa figura l'errore di tracciamento dello stimatore baricentrico è stato invertito per consentire un paragone più agevole con gli altri stimatori). Innanzitutto, poiché lo stimatore Gaussiano non dipende da a_1 , le tre curve corrispondenti di Figura 2.8 sono identiche. Lo stimatore parabolico sembra tendere a quello Gaussiano al crescere di a_1 , mentre lo stimatore baricentrico sembra tendere a quello Gaussiano per valori bassi del parametro. Al contrario degli altri due stimatori, l'errore di tracciamento per lo stimatore baricentrico è discontinuo per i valori $\varepsilon = \pm 1/2$ e questa discontinuità cresce al crescere di a_1 . La discontinuità è dovuta alla distribuzione non simmetrica della funzione di covarianza discreta rispetto al picco di correlazione: se ad esempio si ha che la funzione di covarianza assume lo stesso valore per due spostamenti interi dell'immagine, si possono scegliere due punti diversi per il calcolo dello spostamento frazionario e, in base a quale degli spostamenti si usi come terzo punto dello stimatore, si ottengono risultati diversi. Lo stimatore baricentrico, infatti,

¹¹ Le espressioni della covarianza sono scritte in forma normalizzata, in quanto il fattore di scala, che moltiplica le tre espressioni e che è pari alla varianza dell'immagine, non ha alcuna influenza nella valutazione dell'errore di tracciamento.

si basa sull'ipotesi che il centro di massa di un oggetto simmetrico coincida con la posizione dell'oggetto stesso (Alexander & Ng, 1991). Tutto ciò si traduce nel fatto che la varianza di detto stimatore, per $\epsilon = 0$ ed a_1 elevati, è minore degli altri due e che lo stimatore (2.69) è polarizzato verso valori interi dello spostamento in pixel. Questo effetto, in letteratura, è conosciuto come “*peak locking*” ed è chiaramente visibile in Figura 2.9(a) in cui è mostrato l'istogramma degli spostamenti misurati in un flusso turbolento in un condotto (Westerweel et al, 1996), ottenuto utilizzando lo stimatore frazionario baricentrico. Per quanto riguarda lo stimatore Gaussiano, invece, fornendo questo una migliore approssimazione della forma del picco, il fenomeno del peak locking è notevolmente ridotto come si evince dalla Figura 2.9(b). Per piccoli valori del diametro delle particelle sull'immagine, tuttavia, la polarizzazione verso valori interi è presente anche per lo stimatore Gaussiano. Inoltre, la causa degli errori di peak locking non si limita soltanto alle dimensioni ridotte del diametro delle particelle, ma si può ricondurre anche a fattori di riempimento ridotti e finanche alla risposta all'illuminazione dei singoli pixel variabile da punto a punto. Il problema si elimina aumentando le dimensioni delle particelle mediante incremento della frequenza di campionamento o sfocatura dell'immagine, utilizzando uno stimatore più adatto ai piccoli diametri, oppure filtrando le immagini in modo da ottimizzare il diametro delle particelle rispetto allo stimatore del picco.

Per caratterizzare le prestazioni globali degli stimatori frazionari di spostamento è necessario calcolare lo scarto quadratico medio degli errori di tracciamento ϵ_{brms} , definito come:

$$\epsilon_{brms} = \langle \hat{\epsilon}_b^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\hat{\epsilon} - \epsilon)^2 d\epsilon \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.72)$$

Il diagramma della (2.72) in funzione del parametro a_1 è riportato in Figura 2.10 per i tre stimatori analizzati. La funzione ϵ_{brms} è costante ed assume il valore di 0.062 per lo stimatore Gaussiano che, come già detto in precedenza, è indipendente dal parametro a_1 . La figura conferma quanto detto a proposito della Figura 2.8: l'errore di tracciamento dello stimatore Gaussiano costituisce il limite inferiore per lo stimatore baricentrico per $a_1 \rightarrow 0$ e per lo stimatore parabolico per $a_1 \rightarrow 1$. Si noti che per la funzione di covarianza è stato introdotto volutamente un modello non Gaussiano per cui, nella realtà, l'errore potrebbe essere inferiore alla soglia 0.062.

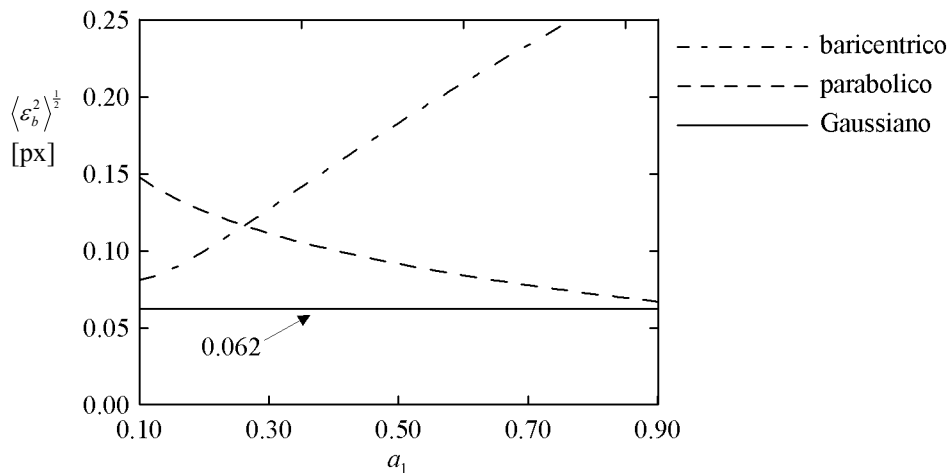


Figura 2.10 Scarto quadratico medio dell'errore di tracciamento in funzione del parametro a_1 per i tre stimatori dello spostamento frazionario. Il parametro a_1 è proporzionale alla larghezza del picco di correlazione.

Per valutare più in dettaglio l'effetto del diametro delle particelle sull'errore, in Figura 2.11 è riportato l'andamento della (2.66) in funzione di d_t/d_r ed è in accordo con risultati empirici e simulazioni fatte da diversi autori. Come si vede dal grafico, per $d_t/d_r \ll 1$ il contributo principale all'errore è dovuto agli errori di polarizzazione (peak locking), mentre per $d_t/d_r \gg 1$ il contributo principale proviene dagli errori casuali che crescono in maniera proporzionale al diametro delle

particelle sull'immagine. La stima dell'errore ha perciò un minimo in corrispondenza di $d_i/d_r \approx 2$, con un valore che è proporzionale a d_i/D_I . Un tipico valore per il minimo errore di misura è da 0.05 a 0.1 pixel per una finestra di 32×32 pixel, il che corrisponde ad un errore di circa 1% per spostamenti pari ad un quarto della dimensione della finestra.

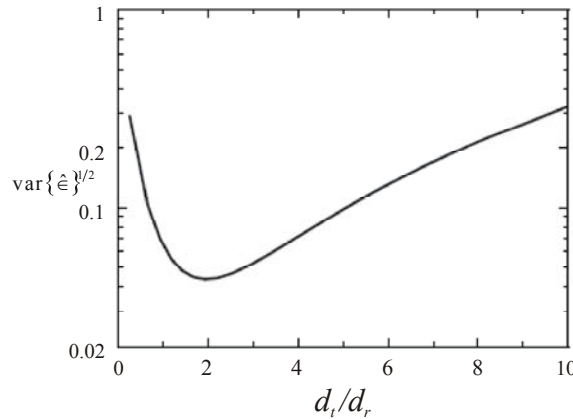


Figura 2.11 Stima dello scarto quadratico medio dell'errore per lo spostamento frazionario in funzione del diametro delle particelle dell'immagine in pixel per una finestra di interrogazione di $1 \times 1 \text{ mm}^2$ e $d_r = 31 \mu\text{m}$.

La descrizione teorica delle proprietà statistiche può essere utilizzata per ottimizzare le stime dello spostamento. In Figura 2.12 sono riportati i risultati della previsione teorica secondo la (2.66) e della simulazione Monte Carlo per lo scarto quadratico medio dell'errore in funzione dello spostamento con $W' = W''$. L'errore è quasi ovunque costante eccetto che per piccoli valori dello spostamento (< 0.5 pixel) in cui tende linearmente a zero. La differenza di comportamento è determinata dalle caratteristiche della stima della correlazione: quando il massimo della funzione di covarianza si trova nel punto $[0,0]$, allora $\text{var}\{R_{-I}^*\} + \text{var}\{R_{+I}^*\} \approx 2\text{cov}\{R_{+I}^*, R_{-I}^*\}$, altrimenti $\text{var}\{R_{-I}^*\} + \text{var}\{R_{+I}^*\} > 2\text{cov}\{R_{+I}^*, R_{-I}^*\}$. Se ne deduce che se le finestre di interrogazione sono traslate di una quantità corrispondente alla parte intera dello spostamento il picco di correlazione è riportato nei pressi dell'origine. Questo, perciò, non solo ottimizza la capacità di determinare il picco di correlazione ma riduce anche l'errore di misura. Un miglioramento nella precisione della misura, però, non implica necessariamente un miglioramento della stessa quantità nell'accuratezza complessiva. Ad esempio, l'accuratezza nella misura è anche determinata dal comportamento delle particelle, dagli effetti di filtraggio dovuti alla rappresentazione del campo di velocità con uno spostamento uniforme, dalla non-linearità dell'ottica, ecc. e questi effetti ad un certo punto diventano dominanti. In tal caso è preferibile ridurre D_I in modo da portare l'errore di misura (proporzionale a d_i/D_I) allo stesso livello degli altri, utilizzando la traslazione delle finestre per migliorare la risoluzione spaziale della misura.

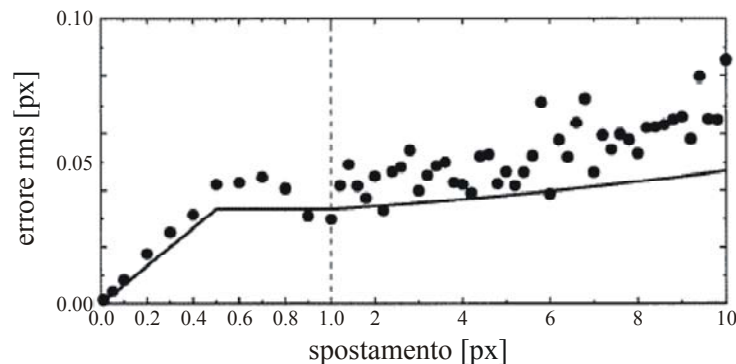


Figura 2.12 Ampiezza dell'errore casuale in funzione dello spostamento per $d_i/d_r = 2$ e $D_I/d_r = 32$. I simboli sono il risultato della simulazione Monte Carlo; la linea continua sono il risultato della previsione teorica in base alla (2.66).

Senza entrare troppo in dettaglio, è utile riepilogare l'influenza degli altri parametri sull'incer-

tezza della misura. Per quanto riguarda la densità dell'immagine si è già ampiamente discusso nei paragrafi 2.2.1 e 2.3.1. Il numero di livelli di quantizzazione non ha molta influenza sull'incertezza di misura, infatti, passando da otto a quattro livelli a parità di densità dell'immagine non si influenza l'incertezza di misura. Il numero di livelli, perciò, non ha effetto se non si rimuove contemporaneamente il rumore dovuto all'algoritmo di correlazione. Per un numero di livelli inferiori a quattro l'incertezza di misura può aumentare fino a dieci volte. Se si utilizzano metodi PIV con risoluzione elevata, invece, la posizione è stimata in maniera più accurata se i valori dell'intensità dell'immagine hanno una maggiore risoluzione. Per quanto riguarda il rumore di fondo valgono le stesse considerazioni fatte per i livelli di quantizzazione: ancora una volta una riduzione del rumore non produce grossi effetti a causa del valore elevato degli errori di correlazione basati sulla FFT. Occorre ricordare che, per ridurre l'effetto della variazione di intensità dell'immagine sulla finestra di interrogazione, si può utilizzare una funzione di covarianza normalizzata (vedi capitolo precedente). Anche dell'effetto dei gradienti di velocità si è già discusso altrove (vedi paragrafo 2.2.2). In questa fase occorre sottolineare che i gradienti di velocità inducono errori di polarizzazione verso i valori minori e che finestre di interrogazione di dimensioni minori possono tollerare gradienti di velocità maggiori se la densità dell'immagine è abbastanza elevata. Un metodo per correggere gli errori di polarizzazione consiste nel calcolare prima la posizione media delle particelle dell'immagine assegnandogli al punto trovato la stima dello spostamento e, successivamente, nello stimare lo spostamento al centro della finestra per mezzo di un'interpolazione bilineare. Infine, un grosso effetto sugli errori di misura è dovuto alle particelle che fuoriescono dal piano di misura che riducono la probabilità di determinare la posizione del picco. Per ridurre il numero di particelle uscenti si può ricorrere ai tre metodi descritti di seguito, ma soltanto la combinazione ottimale di tutti e tre permette di raggiungere un risultato ottimale. Il primo metodo consiste nel ridurre l'intervallo di tempo tra gli impulsi, ma ha lo svantaggio di ridurre l'intervallo dinamico della misura. Il secondo metodo consiste nell'aumentare lo spessore del fascio di luce, ma ha l'effetto collaterale di ridurre proporzionalmente la densità di energia del fascio di luce. Infine, l'ultimo metodo si basa sulla traslazione parallela dei due fasci di luce laser. Quest'ultimo metodo funziona bene soltanto se la componente di velocità ortogonale al piano di luce è pressoché costante su tutto il campo di vista.

3. METODI DI INTERROGAZIONE AVANZATI ED ELABORAZIONE DEI DATI

Per ottenere campi di velocità istantanei ed informazioni sulla velocità di deformazione da misurare PIV di campi di moto, è necessario ottenere il massimo range dinamico di velocità e di risoluzione spaziale e, contemporaneamente, effettuare misure accurate a basso rumore per garantire efficaci processi di differenziazione dei dati. Per tale motivo, in questo capitolo saranno analizzati i metodi maggiormente adottati per ottenere una riduzione degli errori descritti nel capitolo precedente e per migliorare la qualità e l'affidabilità della misura. Si procederà prima all'analisi dei limiti di risoluzione delle tecniche PIV, derivando le regole per ottimizzare i parametri ottici del sistema di misura. Successivamente, saranno descritti i criteri maggiormente adottati per la verifica dell'attendibilità delle misure e saranno brevemente accennate le principali problematiche che insorgono nella differenziazione e nell'integrazione dei risultati dell'elaborazione di immagini PIV. Infine, si esamineranno i metodi correntemente utilizzati per realizzare una risoluzione più accurata.

3.1. Range dinamico di velocità e di risoluzione spaziale

Per descrivere le capacità di un sistema PIV non basta caratterizzarne l'accuratezza e la risoluzione spaziale, ma è necessario introdurre altre due importanti caratteristiche: il range dinamico di velocità ed il range dinamico di risoluzione spaziale¹². Il *range dinamico di velocità* è definito dal rapporto tra il massimo intervallo di velocità misurabile ed il minimo valore della velocità misurabile. Con i moderni sistemi di misura è possibile ottenere range dinamici dell'ordine delle diverse centinaia ma, nonostante questo sia un valore relativamente elevato, è indispensabile capire come sia possibile migliorare questo valore e quali siano le quantità che lo limitano. Il *range dinamico di risoluzione spaziale* è definito, invece, dal rapporto tra il campo di vista nello spazio dell'oggetto e la minima variazione spaziale misurabile. In pratica, questo valore coincide con il numero di vettori indipendenti (non sovrapposti) che è possibile misurare attraverso la dimensione lineare del campo di vista. Ovviamente grandi range dinamici permettono di misurare fenomeni di piccola scala all'interno di campi di moto a scala maggiore, come i fenomeni inerenti lo strato limite o la turbolenza. Naturalmente, mentre il range dinamico di risoluzione spaziale è collegato alla risoluzione spaziale, quello di velocità è collegato alla risoluzione della velocità ed all'accuratezza della PIV. In linea teorica, la massima risoluzione spaziale è legata alla misura dello spostamento di una singola particella. Nel caso di immagini ad alta densità, però, in base a quanto detto nei capitoli precedenti, la risoluzione spaziale dei campi di velocità misurati con la correlazione è data dalla dimensione della finestra di interrogazione nel fluido, $d_I = D_I/M$. Grazie ai metodi ad "alta risoluzione" si riesce a ridurre la risoluzione fino ad un terzo del valore d_I , cercando così di tendere al valore limite dello spostamento di una singola particella.

3.1.1. Calcolo delle espressioni dei range dinamici

Nell'analisi fatta finora sono stati ignorati i fattori che influenzano l'accuratezza con cui può essere individuato lo spostamento di una particella. Questa accuratezza è determinata dall'incertezza esistente nel determinare la posizione del centro di una particella e condiziona in maniera diretta la risoluzione spaziale e temporale di uno strumento PIV. Se gli errori associati con la risposta delle particelle fossero trascurabili, si potrebbe eliminare la suddetta incertezza facendo tendere a zero l'intervallo di tempo Δt tra gli impulsi del laser. L'intervallo Δt , però, non può essere preso arbitrariamente piccolo perché, per ottenere misure accurate di velocità, lo spostamento deve essere maggiore dell'incertezza di misura. In definitiva, il valore di Δt dipende dall'accuratezza dello spostamento e l'accuratezza dello spostamento determina la risoluzione spaziale.

¹² Per maggiori informazioni su quanto riportato in questo paragrafo si può far riferimento ad Adrian (1997).

Questo risultato può essere sintetizzato in una sorta di “principio di indeterminazione” che stabilisce che il prodotto dell’incertezza sulla velocità e dell’incertezza sulla posizione spaziale è una costante del sistema PIV che è determinata dalla sua risoluzione ottica (Adrian, 1986).

A causa del rumore di registrazione le particelle si presentano con una forma irregolare e, pertanto, lo spostamento sull’immagine sarà affetto da un errore il cui scarto quadratico medio (rms) è dato da $\sigma_{\Delta x}$. Trascurando l’errore causato dall’incertezza su Δt , lo scarto quadratico medio sull’errore di misura della velocità è dato da:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{\Delta x}}{M \Delta t}, \quad (3.1)$$

dove $\sigma_{\Delta x}$ è lo scarto quadratico medio dell’errore sullo spostamento nello spazio fisico ed M è il fattore di ingrandimento ottico. La relazione precisa tra errore (rms) sullo spostamento e le proprietà delle particelle è complessa e dipende dal metodo utilizzato per calcolare lo spostamento tra le particelle. In prima approssimazione, considerando che è più facile calcolare la posizione delle particelle per un’immagine piccola rispetto ad una grande, Adrian(1986) ha proposto la relazione:

$$\sigma_{\Delta x} = c_\tau d_\tau, \quad (3.2)$$

dove d_τ è il diametro dell’immagine registrata della particella e c_τ è una costante che dipende dalla capacità del metodo di analisi di determinare lo spostamento tra le immagini e, tipicamente, assume un valore pari a 1-10% del diametro dell’immagine. Il diametro dell’immagine registrata è dato approssimativamente da:

$$d_\tau^2 = d_t^2 + d_r^2, \quad (3.3)$$

in cui d_r rappresenta la risoluzione del mezzo di registrazione e d_t rappresenta il diametro ottico dell’immagine prima della registrazione. La quadratura nella (3.3) è valida soltanto se sia il rumore della registrazione che l’intensità dell’immagine sono Gaussiane. Ricordando le relazioni che legano la profondità di campo δ_z ed il diametro limitato dalla diffrazione al fattore di ingrandimento (vedi capitolo 1) ed eliminando il numero f dalle relazioni, si ottiene l’espressione di d_t in funzione della profondità di campo:

$$d_t = M(1.5\delta_z\lambda + d_p^2)^{1/2}. \quad (3.4)$$

L’utilizzo della (3.4) è preferibile rispetto alle altre relazioni in quanto, frequentemente, la profondità di campo è un vincolo imposto al sistema.

L’errore σ_u definisce la minima fluttuazione di velocità misurabile, per cui, se si indica con Δx_{pmax} il massimo spostamento effettivo misurabile e con $u_{max} = \Delta x_{pmax}/\Delta t$ la massima velocità effettiva in valore assoluto, è possibile fornire l’espressione del range dinamico di velocità (DVR) definito come il rapporto tra la massima e la minima velocità misurabili:

$$DVR = \frac{u_{max}}{\sigma_u} = \frac{M \Delta x_{pmax}}{c_\tau d_\tau}. \quad (3.5)$$

Se si indica il formato del mezzo di registrazione con le sue dimensioni L_x ed L_y , il campo di vista nel fluido è dato da $l_x = L_x/M$ ed $l_y = L_y/M$ rispettivamente. Essendo la minima scala misurabile minore di Δx_{pmax} , allora il range dinamico di risoluzione spaziale (DSR) è almeno:

$$DSR = \frac{l_x}{\Delta x_{pmax}} = \frac{L_x/M}{\Delta x_{pmax}}. \quad (3.6)$$

Dalle (3.5) e (3.6) segue immediatamente che:

$$(DSR)(DVR) = \frac{L_x}{c_\tau d_\tau}. \quad (3.7)$$

L’equazione (3.7) mostra che la capacità di un sistema PIV di avere elevati contemporaneamente sia il DVR che il DSR è determinato da una costante adimensionale $L_x/c_\tau d_\tau$ che è caratteristica del sistema. La lunghezza L_x , che caratterizza la dimensione fisica del mezzo di registrazione, de-

termina la capacità di mantenere l'informazione. Il diametro dell'immagine registrata è una misura della prestazione del sistema ottico di formazione dell'immagine e del sistema di registrazione. La costante c_r , invece, è una misura della capacità dell'algoritmo di interrogazione di misurare gli spostamenti in maniera accurata. Quest'equazione non è altro che una variazione del principio di indeterminazione della PIV dato da Adrian (1986): $\sigma_u \Delta x_{pmax} = c_r d_r u_{max}$. I sistemi a venti valori elevati del parametro $L_x/c_r d_r$ sono molto adatti alle misure di turbolenza, invece, misurazioni effettuate a numeri di Reynolds più elevati richiedono valori di questa costante ancora maggiori.

3.1.2. Ottimizzazione dei parametri ottici

Alla luce di quanto esposto nel paragrafo precedente, a questo punto è indispensabile fornire indicazioni su come ottimizzare un apparato PIV per un dato esperimento. La cosa più importante è sicuramente adattare la dimensione dell'immagine di una particella alla risoluzione del mezzo di registrazione data da d_r che, nel caso di acquisizione digitale, coincide con la spaziatura tra i pixel. Come è stato già discusso nel capitolo precedente, questi ultimi non sono altro che il campionamento dell'immagine analogica in punti discreti dello spazio. Se il diametro d_i è troppo piccolo, l'immagine è sottocampionata rispetto alla frequenza di Nyquist e ci si aspetta di perdere informazioni. Invece, se il diametro è troppo grande lo strumento di registrazione spreca la capacità di acquisire informazioni campionando più frequentemente del necessario. Il sottocampionamento introduce errori di polarizzazione ed incrementa il rumore, mentre il sovracampionamento non riduce l'errore una volta che il numero di campioni superi un valore critico. Se il diametro dell'immagine soddisfa il seguente criterio, la risoluzione del mezzo di registrazione ha un effetto trascurabile sull'accuratezza:

$$d_i \geq c_r d_r \quad (3.8)$$

con c_r di solito preso pari a 2.

In base all'equazione (3.4) l'ingrandimento ottimale della lente si trova riducendo M finché d_i non uguagli $c_r d_r$. Ciò rende d_i minimo una volta noti i limiti del mezzo di registrazione e, di conseguenza, minimizza d_r e massimizza il prodotto dei range dinamici nell'equazione (3.7). La riduzione del fattore di ingrandimento incrementa la profondità di campo, il campo di vista ed il DSR . L'unico svantaggio risiede nella riduzione del range dinamico di velocità secondo la (3.5). Spesso, il massimo spostamento delle particelle è determinato dal massimo numero di pixel di cui è consentito spostare l'immagine, cioè:

$$M \Delta x_{pmax} = c_{max} d_r \quad (3.9)$$

Lo spostamento massimo dovrebbe essere minore di un quarto della dimensione della finestra di interrogazione in accordo con il criterio di Keane ed Adrian (1990) per cui, utilizzando finestre di interrogazione di 64×64 pixel, si ha $c_{max} = 16$. In tal caso il DVR è dato da:

$$DVR = \frac{c_{max}}{c_r \sqrt{1 + c_r^2}} \quad (3.10)$$

ed è indipendente da M . Dall'equazione (3.4) il fattore di ingrandimento ottimale, trovato imponendo $d_i = c_r d_r$, è:

$$M_{opt} = \frac{c_r d_r}{(1.5 \delta_z \lambda + d_p^2)^{1/2}} \quad (3.11)$$

ed il corrispondente numero f ottimale è dato da:

$$f_{\#opt} = 0.5 \frac{(\delta_z / \lambda)^{1/2}}{1 + M_{opt}^{-1}} \quad (3.12)$$

L'equazione (3.11) definisce il minimo ingrandimento che elimina gli errori dovuti alla risoluzione finita del mezzo di registrazione. Valori maggiori sono ugualmente possibili.

In conclusione, il sistema ottimale è definito dalla risoluzione d_r , dalla profondità di campo ri-

chiesta δ_z e dall'accuratezza dell'algoritmo di interrogazione degli spostamenti c_r . Se il fattore di ingrandimento eccede il valore ottimale, l'immagine si allarga ed il mezzo di registrazione la sovracampiona. Allo stesso modo, se il numero f viene incrementato oltre il valore ottimale, il diametro dell'immagine e la profondità di campo aumentano. Al contrario, se è richiesta una profondità di campo maggiore, $f_{\#}$ deve essere incrementato così come il diametro dell'immagine; di conseguenza, è richiesta una diminuzione dell'ingrandimento. Nel caso di misure in acqua, poiché le dimensioni geometriche delle particelle sono prevalenti rispetto alla diffrazione, il fattore di ingrandimento ottimale varia molto meno rispetto alle misure in aria.

3.2. Verifica e controllo statistico dei dati

Nella PIV spesso si trova che i risultati delle misure contengono un certo numero di vettori velocità calcolati in maniera non corretta e detti vettori “spuri”. Questi vettori discostano in modulo e direzione dai vettori “validi” adiacenti di quantità fisicamente impossibili e si originano da finestre di interrogazione che contengono un numero non sufficiente di coppie di particelle. Se si effettuano operazioni differenziali sui risultati delle misure senza eliminare i vettori spuri, gli errori aumentano e si pregiudica la qualità della misura. In pratica, il numero di vettori spuri è relativamente basso (meno del 5%), però la loro occorrenza è praticamente inevitabile. Di solito, per ottenere un blocco di dati accettabili, è necessario identificare i vettori spuri da quelli validi e procedere alla sostituzione dei primi per mezzo di interpolazioni bilineari con quattro vettori validi adiacenti. Poiché è improponibile verificare in maniera visuale la presenza di vettori spuri, si ricorre a metodi statistici che impiegano procedure automatiche affidabili e robuste. Molti autori utilizzano come criterio di valutazione dei vettori spuri il rapporto tra il primo ed il secondo picco di correlazione oppure il rapporto segnale-rumore (SNR) della funzione di correlazione. Solo se i suddetti rapporti sono superiori ad un valore di soglia i vettori sono considerati validi. Tali metodi non sono molto robusti e pertanto si preferisce utilizzare metodi statisticamente più efficienti. Di seguito sono riportati i metodi più frequentemente utilizzati. Prima di analizzare i singoli metodi verrà descritto il modello stocastico di un segnale PIV secondo la trattazione effettuata da Westerweel (1993).

3.2.1. Modello del segnale PIV

Per ottenere una misura non ambigua dello spostamento è necessario avere almeno quattro coppie di particelle nelle finestre di interrogazione. La probabilità di avere quattro coppie di particelle è stata già indicata con Γ e, per una serie di dati validi, detta probabilità deve essere pari almeno al 95%¹³.

Il risultato della misura in un punto di interrogazione (i, j) , indicato con \underline{V}'_{ij} , è una variabile aleatoria che fornisce un vettore valido o un vettore spurio con probabilità Γ e $1-\Gamma$ rispettivamente. Un risultato valido \underline{V}'_{ij} fornisce la media locale del campo di spostamento \underline{V}_{ij} sulla finestra di interrogazione con un piccolo errore di misura $\underline{\varepsilon}_{ij}$. Un risultato spurio per \underline{V}'_{ij} fornisce il baricentro \underline{U}_{ij} di qualche picco casuale sulla finestra di interrogazione. Alla luce di quanto detto è possibile descrivere \underline{V}'_{ij} con la seguente espressione:

$$\underline{V}'_{ij} = \gamma_{ij} \cdot (\underline{V}_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ij}) + (1 - \gamma_{ij}) \cdot \underline{U}_{ij} \quad (3.13)$$

in cui γ_{ij} è una variabile aleatoria binaria che assume il valore 0 o 1. Per poter calcolare il valore atteso e la varianza di \underline{V}'_{ij} è necessario fare delle ipotesi su ciascun termine dell'espressione precedente.

A priori il campo di spostamento \underline{V}_{ij} non è noto, per cui si può considerare come un campo casuale le cui statistiche sono direttamente collegate alle statistiche del campo di moto osservato. È conveniente trattare \underline{V}'_{ij} in maniera identica per ogni (i, j) ed occuparsi singolarmente di \underline{V}'_{ij} . Ciò implica che le statistiche di \underline{V}_{ij} non dipendono da (i, j) e che le componenti \underline{V}_{ij} sono incorre-

¹³ Questo valore è realizzabile se sono presenti 10 particelle per immagine e se è rispettata la condizione che lo spostamento sia minore di un quarto della finestra di interrogazione.

late ed hanno la stessa funzione densità di probabilità. In altre parole $\underline{V}_{i,j}$ è un campo vettoriale omogeneo¹⁴ con statistiche date da:

$$E[\underline{V}_{i,j}] = \underline{\mu} \text{ e } \text{cov}[\underline{V}_{i,j}, \underline{V}_{k,l}] = \sigma_V^2 \cdot \rho(k, l) \quad (3.14)$$

dove $\underline{\mu}$ è lo spostamento medio, σ_V^2 la varianza e $\rho(k, l)$ la funzione di autocorrelazione spaziale¹⁵ di $\underline{V}_{i,j}$. Poiché il raggio equivalente della finestra di ricerca R_I è limitato dal valore atteso dello spostamento ($1/4 D_I$), σ_V è limitata superiormente rispetto ad R_I : $\sigma_V / R_I \leq 1/3$ nel qual caso la finestra di ricerca dovrebbe contenere il 99.8% degli spostamenti. Si assume anche che, per regioni di interrogazione che non si sovrappongono, gli errori di misura su finestre adiacenti $\underline{\varepsilon}_{i,j}$ siano indipendenti e che due componenti adiacenti $\underline{\varepsilon}_{i,j}$ siano incorrelate e siano campi casuali bianchi omogenei di media nulla e varianza σ_ε^2 , cioè:

$$E[\underline{\varepsilon}_{i,j}] = \underline{0} \text{ e } \text{cov}[\underline{\varepsilon}_{i,j}, \underline{\varepsilon}_{k,l}] = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.15)$$

Per i sistemi PIV tipicamente si ha $\sigma_\varepsilon / D_I < 0.02$.

Un vettore spurio $\underline{U}_{i,j}$ corrisponde ad una posizione causale all'interno dell'area di ricerca del picco di correlazione. Si assume, perciò, che $\underline{U}_{i,j}$ sia indipendente da $\underline{V}_{i,j}$ ed abbia funzione densità di probabilità uniforme sulla finestra. In genere la finestra di ricerca ha il centro posizionato in corrispondenza dello spostamento medio atteso ed un diametro pari a $2R_I$, per cui si ha:

$$E[\underline{U}_{i,j}] \approx \underline{\mu} \text{ e } \text{cov}[\underline{U}_{i,j}, \underline{U}_{k,l}] = \sigma_U^2 \cdot \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (3.16)$$

con $\sigma_U / R_I = \sqrt{6} / 3$. Per $\sigma_V / R_I \sim 1/3$ si ha $\sigma_U / \sigma_V > 2.5$ per cui i vettori spuri danno un contributo significativo alla statistica $\underline{V}'_{i,j}$. Nel seguito si assumerà un valore pari a 3 per detto rapporto. Per quanto riguarda $\gamma_{i,j}$ si assume che questa sia una variabile aleatoria bernoulliana con probabilità $P(\gamma_{i,j} = 1) = \Gamma$ e che l'occorrenza di un vettore spurio non sia correlata con il campo di spostamento $\underline{V}_{i,j}$. In base alle ipotesi fatte, il valore atteso e la varianza di $\underline{V}'_{i,j}$ diventano:

$$E[\underline{V}'_{i,j}] = \Gamma \cdot E[\underline{V}_{i,j} + \underline{\varepsilon}_{i,j}] + (1 - \Gamma) \cdot E[\underline{U}_{i,j}] \quad (3.17)$$

$$\text{cov}[\underline{V}'_{i,j}, \underline{V}'_{i,j}] = \Gamma(\sigma_V^2 + \sigma_\varepsilon^2) + (1 - \Gamma)\sigma_U^2 + \Gamma(1 - \Gamma)(E[\underline{V}_{i,j}] - E[\underline{U}_{i,j}])^2. \quad (3.18)$$

Si noti che, per $E[\underline{V}_{i,j}] = E[\underline{U}_{i,j}]$, $\underline{V}'_{i,j}$ è uno stimatore corretto di $\underline{V}_{i,j}$ e indipendente da Γ con varianza pari a $\Gamma(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_V^2) + (1 - \Gamma)\sigma_U^2$.

3.2.2. Criterio di identificazione dei vettori spuri

Come già accennato, i vettori spuri mostrano, come elemento caratterizzante, un'elevata deviazione rispetto ai vettori adiacenti. Per stabilire un criterio di individuazione dei vettori, è utile definire il vettore spostamento residuo $\underline{r}_{i,j}$ come differenza tra lo spostamento osservato e quello atteso:

$$\underline{r}_{i,j} = \underline{V}'_{i,j} - \underline{V}_{i,j}. \quad (3.19)$$

Per utilizzare le tecniche esistenti basate su dati di tipo scalare, è necessario considerare la misura scalare:

$$r_{i,j}^2 = \|\underline{V}'_{i,j} - \underline{V}_{i,j}\|^2. \quad (3.20)$$

Il criterio di identificazione dei vettori spuri si basa su test di ipotesi sui residui rispetto alla media ed alla varianza. Nel caso in esame si verifica l'ipotesi nulla $H_0: \gamma_{i,j} = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1: \gamma_{i,j} = 0$.

Sotto l'ipotesi H_0 , il vettore $\underline{r}_{i,j}$ coincide con $\underline{\varepsilon}_{i,j}$, per cui $r_{i,j}^2$ ha una funzione densità di probabilità (pdf) di tipo esponenziale:

¹⁴ In molte situazioni pratiche non si ha a che fare con un flusso turbolento isotropico ed omogeneo però, quasi sempre, è possibile trasformare $\underline{V}_{i,j}$ in un segnale avente queste caratteristiche.

¹⁵ La funzione di autocorrelazione spaziale altri non è che la quantità che si trova sotto il segno di sommatoria nella definizione della scala integrale della lunghezza della covarianza riferita a $\underline{V}_{i,j}$.

$$f(r^2|H_0) = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (3.21)$$

con media $E\{r^2|H_0\} = 2\sigma_\varepsilon^2$. La pdf (3.21) è un'approssimazione valida soltanto per $r^2/R_I^2 \ll 1$, condizione questa solitamente verificata. Sotto l'ipotesi alternativa H_1 , il vettore residuo \underline{r}_{ij} è pari a $\underline{U}_{ij} - \underline{V}_{ij}$. Per $\sigma_U^2/\sigma_V^2 \gg 1$ il residuo quadratico scalare ha approssimativamente una pdf uniforme:

$$f(r^2|H_1) = U(0, R_I^2). \quad (3.22)$$

Questa espressione è esatta se \underline{U}_{ij} ha una distribuzione uniforme su una regione circolare di raggio R_I centrata in \underline{V}_{ij} . Per un fissato livello di affidabilità si può fissare una soglia r_C^2 al di sopra della quale l'ipotesi H_0 è respinta. Esiste in ogni caso una probabilità finita che un dato valido sia etichettato come spurio e viceversa. Queste due eventualità definiscono il rischio di prima e seconda specie rispettivamente, cioè:

$$E_1 = P(r^2 > r_C^2 | H_0) \cdot P(\gamma = 1), \quad (3.23)$$

$$E_2 = P(r^2 < r_C^2 | H_1) \cdot P(\gamma = 0). \quad (3.24)$$

Se si definisce la funzione di costo K come:

$$K = C_1 E_1 + C_2 E_2 \quad (3.25)$$

con C_1 e C_2 coefficienti di peso, minimizzando K rispetto a r_C^2 è possibile ottenere il valore ottimale della soglia r_C^2 . Questo criterio è noto come criterio di decisione di Bayes. Nel caso in esame si assumerà sempre $C_1 = C_2$ anche se in altre situazioni sono più appropriati valori diversi dei coefficienti. In base a quanto detto, effettuando le dovute sostituzioni, si ottiene il seguente risultato:

$$\frac{r_C^2}{R_I^2} = -\frac{2\sigma^2}{R_I^2} \ln \left[\frac{1 - \Gamma}{\Gamma} \frac{2\sigma^2}{R_I^2} \right], \quad (3.26)$$

cui corrisponde un valore di K dato da:

$$K = (1 - \Gamma) \frac{2\sigma^2}{R_I^2} \left[1 - \ln \left(\frac{1 - \Gamma}{\Gamma} \frac{2\sigma^2}{R_I^2} \right) \right], \quad (3.27)$$

con $E\{r^2|H_0\} = 2\sigma^2$.

Nella pratica, però, il valore \underline{V}_{ij} non è noto a priori e deve perciò essere stimato dal segnale stesso. Ciò porta a definire il residuo scalare quadratico (da calcolare per il confronto con il valore critico) con lo stimatore:

$$\hat{r}_{i,j}^2 = \|\underline{V}'_{i,j} - \hat{\underline{V}}_{i,j}\|^2, \quad (3.28)$$

dove il simbolo $\hat{}$ denota i rispettivi stimatori. Uno stimatore adatto di \underline{V}_{ij} dovrebbe essere non polarizzato ed avere una varianza significativamente minore di $\underline{V}'_{i,j}$. Nei paragrafi seguenti sono analizzati tre test diversi basati su differenti stimatori di \underline{V}_{ij} .

3.2.3. Test della media globale

In questo caso come stimatore si assume la media globale di $\underline{V}'_{i,j}$, definita come media sull'intero blocco di dati:

$$\langle \underline{V}' \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \underline{V}'_{i,j}, \quad (3.29)$$

in cui N è il numero totale di vettori del blocco di dati. Il valore atteso e la varianza della media globale corrispondenti sono dati rispettivamente da:

$$E[\langle \underline{V}' \rangle] \approx \underline{\mu} \text{ e } Var[\langle \underline{V}' \rangle] \approx \frac{1}{N'} [\Gamma(\sigma_V^2 + \sigma_\varepsilon^2) + (1 - \Gamma)\sigma_U^2], \quad (3.30)$$

dove N' è il numero effettivo di campioni indipendenti nei dati delle misure PIV, dato da:

$$\frac{1}{N'} = \frac{1}{N} \sum_{k,l} \rho(k,l). \quad (3.31)$$

Il valore N' è inversamente proporzionale alla scala integrale delle lunghezze in \underline{V}_{ij} e, per flussi che hanno una funzione di correlazione della velocità con una “coda” lunga, può essere significativamente minore di N mentre, per $N' \rightarrow \infty$, la varianza tende a zero. Sostituendo la (3.29) nella (3.28) si trova che $E\{\hat{r}^2 | H_0\} = 2(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_V^2)$ e, essendo $\sigma_\varepsilon^2 \ll \sigma_V^2$, in base alla (3.27) si avrà un valore elevato di K ; di conseguenza, questo stimatore non ha un'efficienza elevata.

3.2.4. Test della media locale

In alternativa alla media globale si può utilizzare come stimatore la media locale in una piccola regione adiacente a \underline{V}_{ij} , definita come:

$$\langle \underline{V}' \rangle_{i,j} = \frac{1}{N_M} \left(\sum_{k,l \in M} \underline{V}'_{i+k,j+l} - \underline{V}'_{i,j} \right), \quad (3.32)$$

dove M denota la regione nell'intorno del punto (i, j) che include N_M elementi. La scelta delle dimensioni di M dipende dalla lunghezza di correlazione di \underline{V}_{ij} . Generalmente si considera una cella di dimensioni 3×3 con $N_M = 8$. Si noti che nella (3.32) è stato escluso $\underline{V}'_{i,j}$; in questo modo la media locale non è correlata con $\underline{V}'_{i,j}$ per $\gamma_{ij} = 0$ e l'analisi si semplifica. Nella maggior parte dei casi il campo di velocità nella regione M è fortemente correlato, per cui si assumerà

$$\text{cov}[\underline{V}'_{i,j}, \underline{V}'_{i+k,j+l}] = \eta \cdot \sigma_V^2 \quad (3.33)$$

per $(k, l) \in M$ e dove η è una costante leggermente minore dell'unità. In questo modo il calcolo della media si semplifica notevolmente.

Nel caso $\Gamma = 1$ è facile verificare che lo stimatore locale è più preciso di quello globale. Nel caso in cui Γ sia minore di uno, esiste una probabilità finita di trovare uno o più vettori spuri nella regione M . La probabilità di trovare k vettori spuri in un blocco di N_M punti è data dalla distribuzione binomiale $B(k, N_M, 1-\Gamma)$, per cui la covarianza di \underline{r}_{ij} per $\eta < 1$ è data da:

$$\text{cov}\{\underline{r}_{i,j}, \underline{r}_{i,j} | H_0\} = \sum_{k=0}^{N_M} B(k, N_M, 1-\Gamma) \cdot \text{cov}\{\underline{r}_{i,j}, \underline{r}_{i,j} | k\} \quad (3.34)$$

dove $\text{cov}\{\underline{r}_{i,j}, \underline{r}_{i,j} | k\}$ è la covarianza quando M contiene k vettori spuri. Nel caso di $\Gamma=0.95$ la probabilità di avere almeno un vettore spurio in M è alquanto elevata (poco inferiore al 30%). La presenza di uno a più vettori spuri influenza il risultato di $\langle \underline{V}' \rangle_{i,j}$ e la valutazione di tutti i vettori circostanti aumentando la probabilità di scartare vettori validi. Il test con media locale pertanto non è molto robusto e ciò si riflette nel valore medio dello scarto ottenuto dalla (3.34):

$$E\{\hat{r}^2 | H_0\} = 2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{N_M} \right) (\sigma_\varepsilon^2 + (1-\eta)\sigma_V^2) + \frac{1}{N_M} \cdot (1-\Gamma) \cdot \sigma_U^2 \right]. \quad (3.35)$$

Come si vede dalla formula, al diminuire di Γ e η la media tende ad aumentare rapidamente. Ad esempio per $\sigma_U/\sigma_V = 3$ ed $\eta = 0.95$ il valore raddoppia passando da $\Gamma = 1$ a $\Gamma = 0.95$. Ciò significa che una stima accurata di \underline{V}_{ij} si ha soltanto conoscendo se i vettori adiacenti sono validi oppure se si hanno informazioni a priori sui vettori spuri. Si potrebbe pensare di applicare in cascata prima il test della media globale e poi quello della media locale, ma generalmente è difficile ottimizzare una procedura che avviene in due passi.

3.2.5. Test della mediana locale

I due test finora descritti sono stimatori lineari di \underline{V}_{ij} . Invece, uno stimatore non lineare ampiamente utilizzato per identificare i vettori spuri è la mediana di un campione di dati. La mediana è il valore centrale¹⁶ di una sequenza di $2n + 1$ elementi ordinati in senso crescente o decrescente. Il valore fornito dalla media è molto robusto rispetto alla contaminazione con vettori spuri. Infat-

¹⁶ Nel caso la sequenza abbia un numero di elementi pari la media è data dal valore medio degli elementi centrali.

ti, i vettori spuri hanno una grossa deviazione rispetto al valore atteso e dopo il riordinamento tendono ad accumularsi verso i valori estremi della sequenza; al contrario, la mediana tende ad assumere il valore di un vettore valido e non è condizionata dai vettori spuri. Soltanto per un gruppo di dati contaminati fortemente con vettori spuri la mediana fornisce un valore spurio. Generalmente ciò non accade, in quanto, anche per $\Gamma > 0.90$ la probabilità che un campione di 9 elementi contenga più di quattro vettori spuri è inferiore a 0.2%. Il test della mediana è di solito utilizzato per rimuovere il rumore binario e, rispetto al test della media locale, non ha un effetto di filtraggio sui dati, tendendo così a preservare i gradienti di velocità.

Nel caso in esame si definisce il vettore spostamento mediano calcolando la mediana di ognuna delle componenti:

$$[V']_{i,j} = \begin{pmatrix} \text{mediana}\{v_{i+k,j+l}^x | k, l \in M \cup \{0,0\}\} \\ \text{mediana}\{v_{i+k,j+l}^y | k, l \in M \cup \{0,0\}\} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

dove v^x e v^y sono le componenti di $\underline{V}_{i,j}$. Nella (3.36) si è incluso $\underline{V}'_{i,j}$ nel calcolo della mediana in quanto per un numero di elementi dispari la trattazione è meno complicata. Poiché la mediana coincide con la media quando la pdf è simmetrica, anche il corrispondente stimatore dello scarto sarà non polarizzato per pdf simmetriche e questa eventualità si verifica se $E[\underline{V}] = E[\underline{U}]$. Si assume che anche in questo caso valga la (3.33) e che i campioni $\underline{V}'_{i+k,j+l} | k, l \in M \cup \{0,0\}$ siano indipendenti ed incorrelati con uguale pdf data da:

$$\Gamma N(\underline{V}_{i,j}, \sigma^2) + (1 - \Gamma) U(\|\underline{V}'_{i+k,j+l} - \underline{V}_{i,j}\| < R_l) \quad (3.37)$$

con $\sigma^2 = \sigma_\varepsilon^2 + (1 - \eta)\sigma_V^2$. Per campioni con pdf normale di media nulla e varianza σ^2 , la pdf della mediana è con buona approssimazione una distribuzione normale $N(0, \sigma^2/N_{eff})$, con $N_M/N_{eff} \approx 1.47 + O(\Gamma)$. Sostituendo la (3.36) nella (3.28) passando attraverso la (3.34) si ottiene:

$$E\{\hat{r}_{i,j}^2 | H_0\} = 2 \left(1 + \frac{1}{N_{eff}} \right) (\sigma_\varepsilon^2 + (1 - \eta)\sigma_V^2), \quad (3.38)$$

espressione molto simile alla (3.35) con $\Gamma = 1$. Poiché N_{eff} dipende debolmente da Γ , la media di \hat{r}^2 rimane praticamente costante lungo un ampio intervallo di valori di Γ . Ciò conferma che il test della mediana locale è il più robusto dei tre analizzati. Infine, va ricordato che nel caso ci si trovi sul bordo dell'immagine il test va condotto su un numero ridotto di campioni. Essendo il numero di punti di bordo una piccola parte del blocco complessivo di dati, l'influenza sulle statistiche dei residui è trascurabile.

3.3. Stima di quantità differenziali ed integrali

Come si è visto finora, un blocco dati PIV si presenta come la misura istantanea di un campo di moto su una griglia di punti regolari. A partire da questi dati quasi sempre si ha la necessità di calcolare delle proprietà del flusso derivanti dal campo di moto. Alcune di queste proprietà, quali vorticità e deformazioni, richiedono il calcolo delle derivate del campo di moto, altre, quali circuitazioni e flussi di massa, richiedono un'integrazione del campo di moto. Delle due l'operazione la più critica è quella di derivazione, infatti, mentre l'integrazione tende a ridurre il rumore, l'operazione di derivazione comportandosi come un filtro passa alto tende ad amplificare gli errori di misura. In entrambi i casi è necessario effettuare una derivazione o un'integrazione alle differenze finite, tecniche queste ampiamente studiate nell'ambito della fluidodinamica computazionale. Nel seguito verrà trattato soltanto il processo di derivazione relativo al calcolo della vorticità, in quanto questo è il principale parametro analizzato nel presente lavoro di tesi. Per quanto riguarda le tecniche di integrazione si utilizzano schemi diffusi quali le approssimazioni trapezoidali e la regola di Simpson. Prima di analizzare più in dettaglio le tecniche di derivazione, occorre ricordare che, poiché non è possibile effettuare operazioni di derivazione lungo la direzione z ortogonale al piano, sia con la tecnica PIV a due componenti sia con quella a tre componenti è possibile calcolare soltanto alcuni termini del tensore di deformazione e della vorticità;

del primo è possibile calcolare solo la componente nel piano xy , della seconda è possibile calcolare soltanto la componente ortogonale al piano di misura.

3.3.1. Schemi di differenziazione

Per il calcolo delle derivate con i metodi alle differenze finite, si utilizzano diversi operatori. In Tabella 3.1 sono elencati i principali operatori utilizzati per il calcolo della derivata prima di una funzione $f(x)$ campionata in un numero di punti discreti con passo Δx (Raffel et al., 1998). L'accuratezza di ciascun operatore rispecchia l'errore di troncamento associato alla derivazione di ciascun operatore per mezzo dello sviluppo in serie di Taylor. Nell'ultima colonna della tabella è riportata l'incertezza effettiva di misura stimata nel caso si abbia un errore di misura sulla velocità pari ad ε_V e si assuma che i singoli dati siano indipendenti l'uno dall'altro. Qualora la distanza tra i punti sia minore delle dimensioni delle finestre di interrogazione (sovracampionamento), ciò non è verificato.

Operatore	Implementazione	Accuratezza	Incetezza
Differenza in avanti	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1/2} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	$\approx 1.41 \frac{\varepsilon_V}{\Delta x}$
Differenza indietro	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i-1/2} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$	$\approx 1.41 \frac{\varepsilon_V}{\Delta x}$
Differenza centrata	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$	$\approx 0.7 \frac{\varepsilon_V}{\Delta x}$
Estrapolazione di Richardson	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x}$	$O(\Delta x^3)$	$\approx 0.95 \frac{\varepsilon_V}{\Delta x}$
Minimi quadrati	$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{2f_{i+2} + f_{i+1} - f_{i-1} - 2f_{i-2}}{10\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$	$\approx 1.0 \frac{\varepsilon_V}{\Delta x}$

Tabella 3.1 Operatori differenziali del primo ordine per dati distanziati ad intervalli uniformi Δx lungo l'asse x .

Vale la pena fare alcune considerazioni sugli ultimi due schemi riportati in tabella. Lo schema di estrapolazione di Richardson è progettato per minimizzare gli errori di troncamento. Invece, l'approccio con il metodo dei minimi quadrati ha lo scopo di ridurre l'influenza degli errori di misura. Rispetto al metodo di Richardson, quest'ultimo ha il vantaggio di essere meno sensibile agli errori dovuti alla eventuale correlazione dei campioni, ma ha lo svantaggio di ridurre i picchi nella stima della derivata a causa del maggior peso dei dati più esterni f_{i+2} .

Nel caso si utilizzino finestre di interrogazione sovrapposte (overlap), le quantità differenziali calcolate sono più rumorose per due ragioni precise: in primo luogo, l'incertezza aumenta perché si riduce la spaziatura della griglia mentre l'incertezza sulla velocità ε_V rimane costante (vedi tabella). In secondo luogo, la sovrapposizione delle finestre fa aumentare la correlazione tra i dati inducendo un errore di polarizzazione sulla derivata. Pertanto, una griglia meno fitta riduce gli errori sulle quantità derivate ma contemporaneamente riduce anche la risoluzione spaziale. Infine, occorre ricordare che la tecnica di misura PIV, effettuando misure di spostamenti in intervalli di tempo finiti, tende a perdere le informazioni relative alla curvatura ed alla accelerazione e, di conseguenza, porta a sottostimare le quantità differenziali.

3.3.2. Stima della vorticità

Come è noto, lo pseudo-vettore vorticità è definito dal rotore della velocità:

$$\underline{\Omega} = \underline{\nabla} \times \underline{V}. \quad (3.39)$$

Dalle misure PIV è possibile stimare soltanto la componente del vettore ortogonale al piano di misura e data da:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.40)$$

Questa quantità può essere stimata per mezzo dell'operatore a differenza centrata con la formula:

$$\Omega_z \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}, \quad (3.41)$$

dove i, j sono gli indici della griglia di punti nelle direzioni x ed y rispettivamente e Δx e Δy sono i passi della griglia lungo le direzioni stesse. Per tentare di ridurre l'amplificazione del rumore si può utilizzare un filtro spaziale Gaussiano (Landreth & Adrian, 1990) con funzione di peso data da:

$$w_{i,j} = \exp\left[-2(i^2 + j^2)/P^2\right], \quad (3.42)$$

in cui un appropriato valore di P può ridurre il rumore lasciando inalterato il segnale della velocità.

Un metodo alternativo per il calcolo della vorticità si basa, invece, sulla definizione della vorticità a partire dal teorema di Stokes, cioè:

$$\Omega_z = \lim_{S \rightarrow 0} \oint_C \frac{\underline{V} \cdot d\underline{l}}{S}, \quad (3.43)$$

in cui C è il bordo che racchiude la superficie S . Se come bordo si prendono gli 8 punti adiacenti al punto (i, j) come rappresentato in Figura 3.1, la stima della vorticità è fornita dalla formula:

$$\Omega_z \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left[\Delta y v_{i+1,j} + \frac{1}{2} \Delta y (v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j+1}) - \Delta x u_{i,j+1} - \frac{1}{2} \Delta x (u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) \right. \\ \left. - \Delta y v_{i-1,j} - \frac{1}{2} \Delta y (v_{i-1,j-1} + v_{i-1,j+1}) + \Delta x u_{i,j-1} + \frac{1}{2} \Delta x (u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) \right]. \quad (3.44)$$

Facendo le sostituzioni:

$$\bar{u}_{m,n} = \frac{1}{2} \left[u_{m,n} + \frac{1}{2} (u_{m-1,n} + u_{m+1,n}) \right] \text{ e } \bar{v}_{m,n} = \frac{1}{2} \left[v_{m,n} + \frac{1}{2} (v_{m,n-1} + v_{m,n+1}) \right], \quad (3.45)$$

la (3.44) diventa:

$$\Omega_z \approx \frac{\bar{v}_{i+1,j} - \bar{v}_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (3.46)$$

In definitiva la (3.44) equivale alla (3.41) con un filtraggio locale (su tre punti) delle velocità.

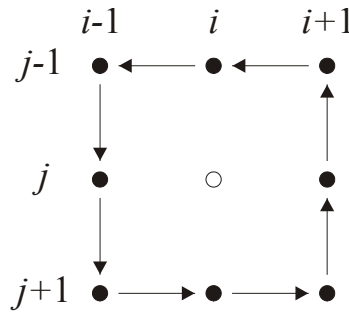


Figura 3.1 Circuito lungo gli 8 punti adiacenti al punto (i, j) .

Dalle analisi sperimentali fatte da Westerweel (1993) è risultato che, in generale, il livello di rumore della vorticità è un ordine di grandezza superiore rispetto a quello della velocità e che il rumore tende ad attenuare maggiormente la vorticità di ampiezza minore distribuita su una superficie maggiore rispetto a vorticità maggiori concentrate in piccole regioni. Per quanto riguarda i tre metodi di calcolo, per livelli di rumore bassi la (3.41) amplifica maggiormente l'errore, mentre per livelli di rumore alti accade il viceversa. Ciò si spiega considerando che gli altri due metodi, per errori elevati, tendono a filtrare anche una parte del segnale della vorticità. Global-

mente i risultati migliori si ottengono con la (3.46).

3.4. Metodi di interrogazione avanzati

In questo paragrafo saranno discussi i principali metodi utilizzati per incrementare la precisione e la risoluzione spaziale degli schemi numerici di interrogazione. Di recente, la ricerca in questo settore ha tentato di superare i limiti dei metodi di interrogazione con correlazione dovuti principalmente alla perdita di correlazione nel piano, ai gradienti di velocità nella finestra di interrogazione ed agli errori nell'individuazione del picco (peak locking). Numerosi sono i metodi proposti da diversi autori e, tra questi particolarmente significativi sono i metodi con spostamento di finestre, utili per compensare la perdita di correlazione nel piano, e i metodi con deformazione delle finestre, che compensano almeno in parte gli errori dovuti ai gradienti di velocità. Tra tutti, notevole importanza hanno assunto i metodi iterativi che, utilizzati congiuntamente ai metodi con deformazione e spostamento delle finestre, consentono di ottenere un aumento della risoluzione spaziale ed un calcolo più accurato del campo di moto. Un'analisi approfondita di tutti i metodi presenti in letteratura va al di là degli scopi del presente lavoro di tesi, perciò, di seguito, saranno trattati soltanto i metodi maggiormente utilizzati negli schemi di interrogazione. Una sintesi degli schemi proposti da vari autori si può trovare in un recente lavoro di Scarano (2002). Infine, un rapido cenno sarà fatto sui metodi di correzione del campo locale che risulta particolarmente efficace nell'individuazione di strutture di velocità più piccole delle dimensioni delle finestre di interrogazione.

3.4.1. Metodi con spostamento delle finestre

Alla fine del capitolo precedente si è visto che l'errore (rms) di misura dello spostamento è praticamente indipendente dallo spostamento eccetto che per piccoli spostamenti ($|u| < \frac{1}{2}$), per i quali l'errore risulta proporzionale allo spostamento u . Ciò induce a pensare che, per piccoli spostamenti, l'accuratezza della misura PIV possa migliorare notevolmente. Ottenere siffatte misure è piuttosto semplice, infatti, allo scopo, è sufficiente traslare la seconda finestra di interrogazione di una quantità pari alla parte intera dello spostamento della finestra stimato attraverso un precedente processo di interrogazione. Una nuova interrogazione effettuata con tali finestre, come vedremo, riduce il rumore nella misura migliorandone l'accuratezza. Nel seguito, per semplicità, verrà analizzato l'effetto dello spostamento delle finestre su misure di turbolenza con PIV nel caso monodimensionale (cfr. Westerweel et al., 1997), i risultati ottenuti si estendono banalmente al caso di spostamento bidimensionale \underline{d} .

Si definisce potenza totale del segnale la varianza dello spostamento fluttuante:

$$S = \text{var}\{u\} = u'^2. \quad (3.47)$$

L'errore quadratico medio (rms) dipende dallo spostamento, per cui è possibile definire la potenza totale dell'errore come:

$$N = \int \text{var}\{\varepsilon|u\} f(u) du \quad (3.48)$$

dove $\text{var}\{\varepsilon|u\}$ è la varianza condizionale dell'errore di misura ε , per un assegnato spostamento ed $f(u)$ è la funzione densità di probabilità (pdf) dello spostamento. Per poter valutare gli effetti dello spostamento delle finestre è necessario introdurre un modello per la descrizione della curva dell'errore in funzione dello spostamento. Un modello adeguato è il seguente:

$$\text{var}\{\varepsilon|u\} = \begin{cases} 4c^2 u^2 & \text{per } |u| < \frac{1}{2} \\ c^2 & \text{altrove} \end{cases}. \quad (3.49)$$

Se lo spostamento soddisfa il criterio di Keane ed Adrian (1990), si ha che $u \gg \frac{1}{2}px$ e di conseguenza l'errore rms risulta indipendente da u , ottenendosi in base alla (3.48):

$$N = \int c^2 f(u) du = c^2 \text{ e } \frac{S}{N} = \frac{u'^2}{c^2}. \quad (3.50)$$

Se ne deduce che il rapporto segnale-rumore (SNR), per analisi con interrogazione PIV senza

traslazione delle finestre, è proporzionale alla varianza dello spostamento fluttuante e, perciò, le fluttuazioni della velocità in flussi turbolenti possono essere ottenuti in maniera più accurata al crescere del livello di turbolenza. Nel caso si utilizzi lo spostamento delle finestre, a causa del doppio andamento della varianza dell'errore in funzione dello spostamento, è necessario suddividere l'analisi in due casi: il caso di flusso a bassa turbolenza in cui le fluttuazioni dello spostamento sono minori di $\frac{1}{2}px$ ed il caso di flussi ad elevata turbolenza in cui le fluttuazioni sono sensibilmente maggiori di $\frac{1}{2}px$.

Quando si analizzano flussi a bassa intensità di turbolenza, la stima dell'errore è direttamente proporzionale allo spostamento u e, spostando le finestre di una quantità pari allo spostamento medio in modo che l'errore residuo sia nullo, in base alla (3.48) si ottiene:

$$N = 4c^2 \int u^2 f(u) du = 4c^2 u'^2. \quad (3.51)$$

Rimanendo la potenza totale del segnale costante, il corrispondente rapporto segnale-rumore è dato da:

$$\frac{S}{N} = \frac{u'^2}{4c^2 u'^2} = \frac{1}{4c^2}. \quad (3.52)$$

Si ottiene così il risultato notevole che il rapporto segnale-rumore non dipende più dal valore della fluttuazione di u e l'errore di misura relativo si mantiene costante. Va osservato che nel ricavare le (3.51) e (3.52) si è sottintesa l'ipotesi che lo spostamento medio fosse esattamente un valore intero. Nella realtà ciò non accade ed il miglioramento nel valore del rapporto segnale-rumore dipende fortemente dal valore dello spostamento residuo medio, ottenendosi il minimo effetto in corrispondenza di spostamenti residui pari a $\pm \frac{1}{2}px$.

Nel caso si analizzino flussi con valori di u' elevati (alta turbolenza) si applica alle finestre di interrogazione una traslazione pari alla parte intera dello spostamento e si può assumere, in prima approssimazione, che la funzione $f(u)$ sia costante lungo ciascun intervallo pari ad un pixel della u . In tal caso il rumore N diventa:

$$N \approx 4c^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 du \sum_i f(u_i) \approx \frac{1}{3} c^2 \quad (3.53)$$

ed il corrispondente rapporto segnale-rumore diventa:

$$\frac{S}{N} = 3 \frac{u'^2}{c^2}. \quad (3.54)$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (3.50) ci si accorge che il valore del rapporto segnale-rumore è tre volte quello che si ottiene senza spostamento delle finestre di interrogazione.

L'effetto della traslazione delle celle di interrogazione sul rumore risulta più evidente analizzando la riduzione del rumore (NR) data dal rapporto tra il SNR in assenza di spostamento ed il corrispondente valore in presenza della traslazione, cioè:

$$NR = \left[\int \frac{\text{var}\{\varepsilon|u\}}{c^2} f(u) du \right]^{-1}. \quad (3.55)$$

Da questa equazione è facile verificare che, se $\text{var}\{\varepsilon|u\} < c^2$ su ogni intervallo di u , allora $NR > 1$. Se ne deduce che un'analisi PIV con traslazione delle finestre fornisce sempre risultati più accurati rispetto ai metodi tradizionali. Dalle equazioni (3.50), (3.52) e (3.54) si ricavano i valori corrispondenti dell'NR per flussi a bassa ed alta turbolenza rispettivamente:

$$NR = \frac{1}{4u'^2} \text{ e } NR \approx 3. \quad (3.56)$$

Si noti che la riduzione del rumore nelle due espressioni non dipende dal valore di c . Poiché la grandezza c è legata al diametro dell'immagine delle particelle, la riduzione nel rumore si realizza indipendentemente dal diametro delle particelle stesse.

Il metodo con traslazione delle finestre, ovviamente comporta anche un aumento del rapporto

segnale-rumore delle funzione di correlazione in quanto riduce la perdita di correlazione nel piano. Come vedremo più avanti detto metodo è alla base dell'aumento della risoluzione spaziale realizzato mediante l'utilizzo di griglie multiple. È importante sottolineare che in alternativa alla traslazione delle finestre in avanti (FDI), è possibile effettuare una traslazione simmetrica rispetto alla posizione delle finestre di interrogazione. Quest'ultimo metodo, effettuando un'interrogazione a finestre centrate (CDI) ha il vantaggio di avere un'accuratezza del secondo ordine sul tempo e, perciò, risulta più accurato soprattutto quando l'intervallo di tempo tra le due esposizioni è elevato. In Figura 3.2 sono illustrati, per una singola finestra, i due metodi di interrogazione descritti.

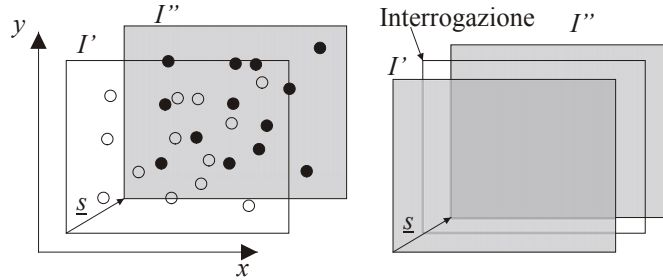


Figura 3.2 Metodo con traslazione delle finestre con FDI (a sinistra) e con CDI (a destra).

Un'ulteriore riduzione dell'errore si può ottenere traslando le finestre di una quantità pari allo spostamento effettivo ottenuto con gli stimatori frazionari. In questo modo, per lo stimatore Gaussiano, si riesce a ridurre l'errore quadratico medio di tracciamento dal valore di 0.062 fino al valore di 0.011. Per adoperare quest'ultimo metodo, purtroppo, sono richiesti i livelli dell'immagine corrispondenti a posizioni intermedie tra i pixel. Per ottenere tali livelli è necessario effettuare un'interpolazione dell'intensità dell'immagine. In letteratura si suggeriscono di effettuare interpolazioni bilineari, spline bicubiche oppure formule di regressione con i minimi quadrati. Tutti i suddetti metodi di interpolazione, però, comportano una perdita di informazione nell'immagine, fornendo una versione distorta dell'immagine originale. Se l'immagine è stata campionata in accordo con il teorema del campionamento (frequenza maggiore di quella di Nyquist), l'immagine può essere ricostruita correttamente se si utilizza la formula di interpolazione ideale:

$$I(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} I[i, j] \frac{\sin[\pi(i-x)]}{\pi(i-x)} \frac{\sin[\pi(j-y)]}{\pi(j-y)}. \quad (3.57)$$

Nella pratica non è possibile adoperare la (3.57) poiché le sommatorie sono estese da $-\infty$ a $+\infty$. Per tale ragione le sommatorie saranno estese soltanto ad un numero limitato di pixel adiacenti, ottenendo così dei filtri con funzioni sinc troncate e sommatoria estesa genericamente su $M+1$ punti in ogni direzione. Lo sforzo computazionale, inoltre, cresce con il quadrato di M , ed è piuttosto elevato per $M > 6$, fissando un ulteriore limite ad M . A causa della brusca discontinuità sui bordi la risposta in frequenza del filtro con sinc troncata risulta, però, eccessivamente ondulata in corrispondenza della banda passante. Per ridurre le discontinuità ai bordi, si può moltiplicare le sinc con finestra di Hamming o Blackman, le cui espressioni monodimensionali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} W(i) &= 0.54 - 0.46 \cos(2\pi i/M) && \text{Hamming} \\ W(i) &= 0.42 - 0.5 \cos(2\pi i/M) + 0.08 \cos(4\pi i/M) && \text{Blackman} \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.4.2. Metodi con deformazione delle finestre

Finora, per migliorare l'accuratezza nella misura degli spostamenti si è utilizzata una traslazione uniforme delle particelle sulla finestra di interrogazione. Un ulteriore miglioramento nel grado di sovrapposizione delle immagini delle due esposizioni si può ottenere valutando la distribuzione di intensità della seconda immagine I'' con una distribuzione di spostamenti variabile sulla finestra di interrogazione. In tal caso è necessario massimizzare la funzione di correlazione data da:

$$R[\underline{s}(\underline{x})] = \iint W'(\underline{x}) I'(\underline{x}) W''[\underline{x} + \underline{s}(\underline{x})] I''[\underline{x} + \underline{s}(\underline{x})] d\underline{x}. \quad (3.59)$$

L'implementazione di tale metodo implica che le due finestre siano soggette sia ad una traslazione che ad una deformazione relativa. Quando la distribuzione spaziale degli spostamenti corrisponde a quella effettiva si ha, pertanto, la massima corrispondenza tra le due immagini I' ed I'' . La distribuzione di spostamenti in una regione di interrogazione finita si può approssimare per mezzo del polinomio di Taylor di grado m a partire dal centro \underline{x}_0 della finestra di interrogazione¹⁷:

$$\underline{s}(\underline{x}) = \underline{s}(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i!} [\nabla \underline{s}(\underline{x}_0) \cdot \Delta \underline{x}]^{[i]}. \quad (3.60)$$

L'utilizzo della (3.60) fa sì che il numero di parametri da utilizzare cresca notevolmente all'aumentare del grado del polinomio. A causa dell'elevato sforzo computazionale aggiuntivo è evidente che un tale metodo venga implementato soltanto quando la serie è arrestata ai primi ordini del polinomio. Un approccio molto utilizzato (cfr. Huang et al., 1993 e Jambunathan et al., 1995) consiste nell'imporre alle finestre distribuzioni di spostamenti calcolati con interpolazioni bilineari sulla griglia di spostamenti ottenuti con un processo di interrogazione standard ad un passo precedente. In generale, se una funzione f è nota sui punti corrispondenti ai vertici di un quadrato di lato unitario, in un sistema di assi cartesiani xy con origine in basso a sinistra, il valore della funzione $f(x, y)$ interpolato bilinearmente nel punto con coordinate $x, y < 1$ è dato da:

$$f(x, y) = f(0,0)(1-x)(1-y) + f(1,0)x(1-y) + f(0,1)(1-x)y + f(1,1)xy. \quad (3.61)$$

In Figura 3.3 è riportato un esempio di deformazione lineare di una finestra di interrogazione. Con questo metodo è possibile calcolare lo spostamento anche in presenza di gradienti di velocità significativi e si riesce a migliorare il range dinamico della vorticità, ancora una volta, però, sono presenti gli inconvenienti legati alla necessità di effettuare un'interpolazione dell'immagine. Per quanto riguarda i metodi proposti da vari autori per valutare deformazioni di ordine superiore, si rinvia alla già citata bibliografia.

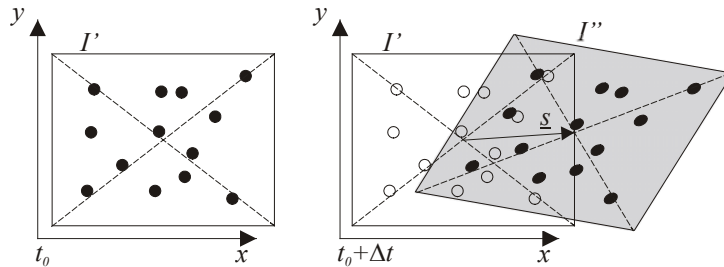


Figura 3.3 Illustrazione schematica della deformazione dell'immagine dovuta ad un campo di moto lineare nel piano di misura.

3.4.3. Metodi iterativi con deformazione dell'immagine (WIDIM)

La tecnica, conosciuta con il nome di window deformation iterative multigrid (WIDIM), si basa sul metodo di deformazione delle finestre di interrogazione ed è implementata come uno schema gerarchico che permette una riduzione progressiva delle dimensioni delle finestre (vedi Scarano & Riethmuller, 1999 e 2000). Iterando ripetutamente la stessa procedura, il metodo permette di compensare progressivamente le perdite di correlazione dovute al moto del flusso nel piano di misura. Il principio di funzionamento dell'algoritmo, mostrato nel diagramma di flusso di Figura 3.4, si può riassumere con i seguenti passi:

1. Le immagini PIV sono analizzate con un metodo di interrogazione classico basato sulla mutua correlazione e con finestre di interrogazione abbastanza grandi. Le dimensioni delle celle sono abbastanza grandi in modo da soddisfare il criterio di Keane ed Adrian (1990). I

¹⁷ Si ricorda che il simbolo $[i]$ denota la potenza i -esima simbolica della quantità contenuta nelle parentesi quadre.

risultati dell'interrogazione sotto sottoposti a verifica in maniera tale da non includere vettori spuri nei passi successivi.

2. Il risultato del passo 1 è utilizzato per costruire lo stimatore del campo di spostamento su tutta l'immagine per mezzo di un'interpolazione bilineare.
3. Le due immagini sono deformate in base alla distribuzione spaziale dello stimatore e, poiché la deformazione è calcolata considerando metà dello spostamento, si ottiene una stima con un'accuratezza del secondo ordine. La deformazione dell'immagine richiede un nuovo campionamento dei valori dei pixel in posizioni intermedie, per cui è necessario effettuare un'interpolazione dell'immagine.
4. Le dimensioni delle finestre sono ridotte in base ad un predefinito passo di rifinitura. Si noti che, essendo le finestre traslate in base al valore dello spostamento, sulle finestre di dimensioni minori allo spostamento non è imposto il vincolo di cui al passo 1.
5. Le immagini sono nuovamente analizzate, fornendo un campo di spostamento più fine. Ad ogni passo successivo si calcolano le correzioni da sommare al campo di spostamento del passo precedente per ottenere lo spostamento effettivo; quest'ultimo sarà utilizzato come stimatore dello spostamento per l'iterazione successiva.
6. Il valore della velocità ottenuto è sottoposto a verifica secondo i criteri stabiliti.
7. La distribuzione di velocità ottenuta viene fornita in uscita dall'algoritmo, oppure è utilizzata come dato di ingresso al passo 2 per una successiva iterazione. Il processo iterativo viene ripetuto finché non è soddisfatto un criterio di convergenza.

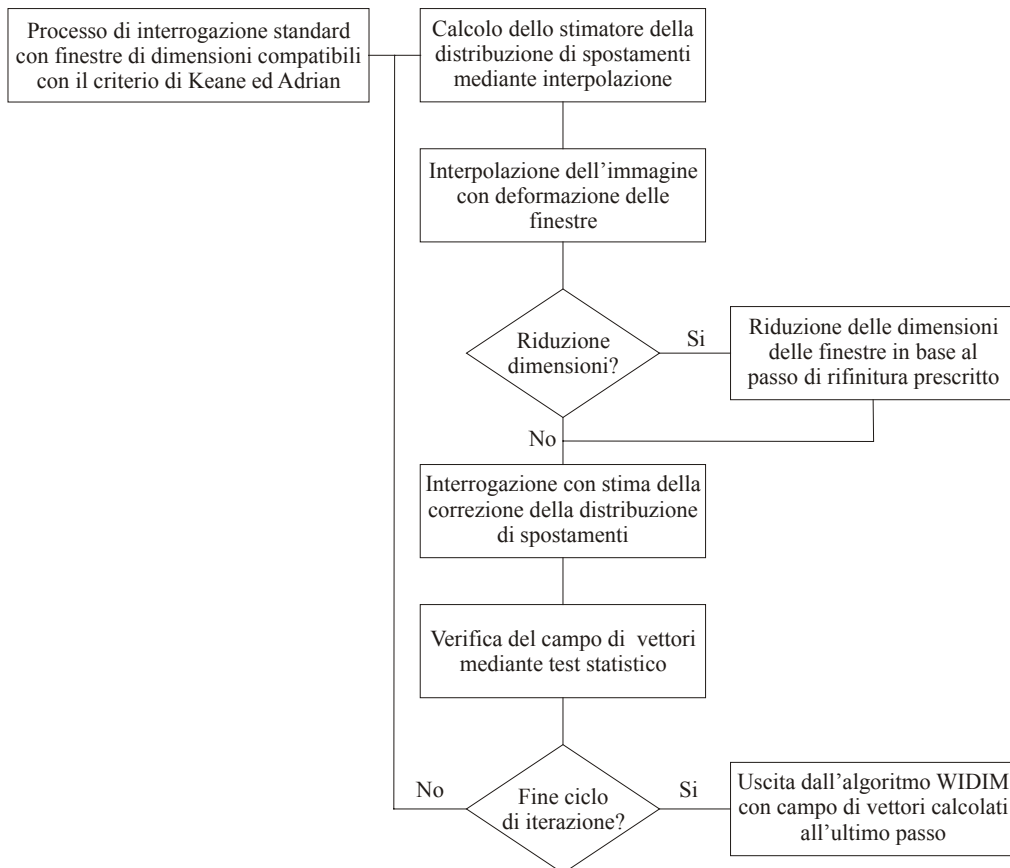


Figura 3.4 Diagramma di flusso dell'algoritmo WIDIM.

3.4.4. Accuratezza dei metodi con correzione locale del campo di spostamento

È stato già ampiamente discusso che la risoluzione spaziale di un metodo di interrogazione è collegata alla minima dimensione della finestra di correlazione che può essere utilizzata per l'interrogazione dell'immagine PIV. La diminuzione delle dimensioni delle finestre è il metodo più comunemente adoperato per incrementare la risoluzione spaziale. Sfortunatamente, però, la

conseguente diminuzione del numero di particelle per finestra riduce il contenuto di informazione dell'immagine ed il risultato è affetto maggiormente da picchi di correlazione casuali e da errori casuali nella stima dello spostamento frazionario. Al contrario, le finestre di interrogazioni grandi sono più robuste e, se i gradienti di velocità non sono particolarmente elevati, forniscono uno spostamento frazionario accurato. Quando la scala delle lunghezze delle fluttuazioni della velocità è minore delle dimensioni delle celle di interrogazione, il processo di interrogazione fornisce scarse prestazioni. Inoltre, poiché la dimensione delle finestre è limitata dalla distanza media tra le particelle, è preferibile avere immagini ad alta densità per ottenere una minore attenuazione delle lunghezze d'onda spaziali, avendo la funzione di correlazione un comportamento da filtro spaziale passa basso. Chiaramente, una fedele ricostruzione delle fluttuazioni spaziali della velocità è possibile soltanto se la dimensione della finestra non eccede il 20% della lunghezza d'onda spaziale della distribuzione di velocità. Nel caso la finestra abbia dimensioni pari alla metà di detta lunghezza d'onda il segnale è ridotto del 60% rispetto al picco originale. In alcuni casi è difficile stabilire se sia preferibile risolvere le piccole scale del flusso al prezzo di un rumore più alto, oppure se sia preferibile ottenere una rappresentazione filtrata del flusso con minori fluttuazioni. Nel primo caso i dati non sono adatti ad una differenziazione e vanno in ogni caso filtrati con un filtro passa basso. Tra i tanti metodi proposti in letteratura per migliorare la risoluzione spaziale, particolarmente interessante è il metodo proposto da Nogueira et al. (1999), che costituisce un miglioramento della tecnica PIV con correzione locale del campo di spostamento. Detto metodo ha il notevole vantaggio di eliminare le instabilità presenti nei metodi iterativi classici. Prima di analizzare in dettaglio la correzione proposta, è però opportuno capire l'origine dell'instabilità nei metodi iterativi.

La risposta in frequenza della funzione di correlazione delle immagini, quando si utilizzano finestre di interrogazione di determinate dimensioni, è piuttosto complessa a causa delle non linearità presenti nel processo di individuazione del picco di correlazione. Una sua approssimazione qualitativa si ottiene modellandola con la risposta in frequenza della media mobile (Moving Average) data da:

$$A(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{\sin(\pi N/\lambda_x) \sin(\pi N/\lambda_y)}{(\pi N/\lambda_x)(\pi N/\lambda_y)}, \quad (3.62)$$

dove A è l'ampiezza corrispondente alle lunghezze d'onda in esame λ_x e λ_y lungo gli assi x ed y rispettivamente ed N è la dimensione della finestra di interrogazione. In base alla (3.62), la funzione A è il prodotto di due funzioni identiche ortogonali di tipo sinc e presenta intervalli di frequenza in cui inverte il segno. Ovviamente, la risposta in frequenza della funzione di correlazione dipende da molti altri parametri, ma la presenza di intervalli di frequenza con cambiamento della fase di 180° è un dato di fatto.

Se, per una certa frequenza spaziale, si indica con A l'ampiezza della risposta in frequenza e con s_D il valore dello spostamento da misurare nel dominio della frequenza¹⁸, lo schema iterativo può essere descritto in maniera agevole nel modo di seguito esposto. La misura iniziale del segnale è data da $s_0 = A s_D$ e l'errore corrispondente è dato da $\varepsilon_0 = s_D - s_0$. Analogamente, la misura dell'errore data dal primo ciclo del processo iterativo sarà pari ad $A \varepsilon_0 = A(s_D - s_0)$, ottenendo così un valore dello spostamento corretto pari a $s_1 = s_0 + A \varepsilon_0 = s_0 + A(s_D - s_0)$. Per induzione, al passo n -esimo del processo iterativo la misura dello spostamento con correzione sarà $s_n = s_{n-1} + A(s_D - s_{n-1})$ che, in funzione dello spostamento effettivo s_D , è pari a $s_n = s_D - s_D(1 - A)^n$. Ciò implica che, in seguito all' n -esima correzione, l'errore avrebbe la seguente espressione:

$$\varepsilon_n = s_D(1 - A)^n. \quad (3.63)$$

Dalla (3.63) è evidente che l'errore tende a zero soltanto per $0 < A < 2$. Anche se l'espressione (3.62) non rispecchia fedelmente il comportamento della mutua correlazione, l'instabilità in cor-

¹⁸ Anche in questo caso si osservi che l'analisi dell'instabilità è effettuata nel caso monodimensionale, i risultati si estendono analogamente al caso di spostamenti bidimensionali nel piano dell'immagine.

rispondenza delle frequenze in cui si ha un cambiamento di fase di $180^\circ (A < 0)$ è stata riscontrata in numerose prove sperimentali effettuate con PIV standard. È opportuno sottolineare che la presenza di frequenze con $A < 0$ dipende da molti fattori quali il passo di campionamento della griglia del campo, la distanza tra le particelle, il rumore e gli errori di quantizzazione. La distanza tra le particelle non deve essere troppo elevata in quanto, essendo queste campioni del campo di moto, sono soggette ad aliasing se non sono adeguatamente distribuite. Inoltre, in base al criterio di Nyquist ed alla (3.62), rappresentata in forma monodimensionale in Figura 3.5 per diversi valori della dimensione della finestra di interrogazione, si deduce che soltanto se la spaziatura dei nodi della griglia è inferiore alla metà delle dimensioni della finestra di interrogazione, il campo di moto può contenere frequenze instabili.

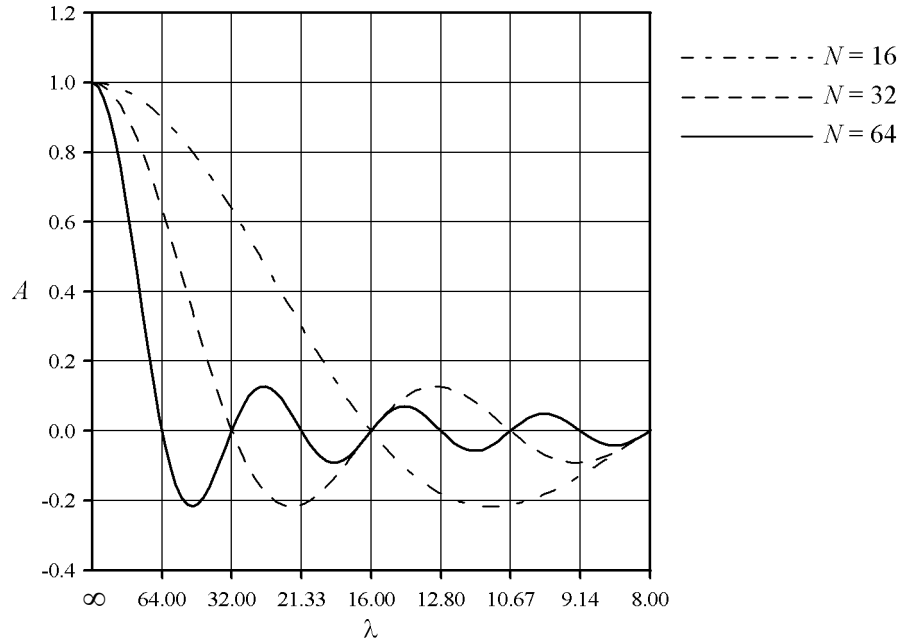


Figura 3.5 Risposta in frequenza in funzione della lunghezza d'onda spaziale in pixel. Si noti che la scala delle ascisse è lineare rispetto alla frequenza ma non alla lunghezza d'onda spaziale.

Per modificare la risposta in frequenza della media mobile si possono utilizzare funzioni di peso per le finestre di interrogazione. Una funzione di peso simmetrica generica ha la seguente espressione:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{i,j} \cos\left(\frac{2\pi i \xi}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi j \eta}{N}\right); \quad |\xi|, |\eta| \leq \frac{N}{2} \quad (3.64)$$

dove ξ, η indicano le coordinate valutate a partire dal centro della finestra di interrogazione. Con la funzione di peso (3.64), la risposta in frequenza diventa:

$$A = \frac{\sin(\pi\phi_x)}{\pi\phi_x} \frac{\sin(\pi\phi_y)}{\pi\phi_y} \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{i,j} (-1)^{i+j} \frac{\phi_x^2}{\phi_x^2 - i^2} \frac{\phi_y^2}{\phi_y^2 - j^2}, \quad (3.65)$$

con $\phi_x = N/\lambda_x$ e $\phi_y = N/\lambda_y$. La condizione $0 < A < 2$ è soddisfatta per i valori $\mu_{0,0} = 1$ e, per $i, j \neq 0$, $\mu_{i,j} = 144/(i^2 j^2 \pi^2)$; in tal caso si ottiene per la funzione di peso l'espressione:

$$W(\xi, \eta) = 9 \left(4 \left| \frac{\xi}{N} \right|^2 - 4 \left| \frac{\xi}{N} \right| + 1 \right) \left(4 \left| \frac{\eta}{N} \right|^2 - 4 \left| \frac{\eta}{N} \right| + 1 \right) \quad (3.66)$$

e, per la risposta in frequenza, l'espressione:

$$A = \frac{36}{\pi^2 \phi_x^2 \pi^2 \phi_y^2} \left(1 - \frac{\sin(\pi\phi_x)}{\pi\phi_x} \right) \left(1 - \frac{\sin(\pi\phi_y)}{\pi\phi_y} \right). \quad (3.67)$$

La funzione di peso (3.66) ha una forma che ricorda una Gaussiana con derivate discontinue al centro della finestra. Quest'ultima caratteristica è indispensabile per l'accuratezza ad alte frequenze e, la frequenza di taglio, doppia rispetto alla Gaussiana, offre caratteristiche vantaggiose anche per sistemi PIV non iterativi.

Utilizzando la funzione di peso (3.66), il nuovo coefficiente di mutua correlazione è dato da:

$$R[r, s] = \frac{\sum_{\xi, \eta=-N/2}^{N/2} v^2(\xi, \eta) I'(\xi, \eta) I''(\xi + r, \eta + s)}{\sqrt{\sum_{\xi, \eta=-N/2}^{N/2} v^2(\xi, \eta) I'^2(\xi, \eta) \sum_{\xi, \eta=-N/2}^{N/2} v^2(\xi, \eta) I''^2(\xi + r, \eta + s)}}, \quad (3.68)$$

dove con $v^2(\xi, \eta)$ si è indicata la funzione (3.66). L'utilizzo di funzioni di peso introduce un errore nella misura dello spostamento; l'errore può essere compensato con diversi metodi che hanno lo scopo di attenuare la pendenza della funzione in corrispondenza delle particelle sull'immagine. Un miglioramento nell'accuratezza di misura pari al 3% (Nogueira et al., 2001) si ottiene scambiando I' ed I'' nella correlazione (3.68) e mediando il risultato ottenuto con quello fornito dalla (3.68). In questo modo, però, si raddoppiano i tempi di calcolo.

3.4.5. Correzione degli errori con la correlazione

Nei paragrafi precedenti si è già detto che gli errori nella misura dello spostamento sono causati da diversi fattori quali il numero insufficiente dei dati, la mancanza di traccianti nel flusso, la cattiva qualità delle immagini e anomalie nella correlazione dovuta alla mancata corrispondenza delle coppie di particelle nel volume di interrogazione. Indipendentemente dalla modalità di calcolo della funzione di correlazione, una riduzione degli errori può essere ottenuta moltiplicando la funzione di correlazione con quella calcolata nelle regioni adiacenti. Questa tecnica, conosciuta come correlation based correction (CBC) è stata proposta da Hart nel 2000.

La tecnica di correzione degli errori con correlazione consiste nel moltiplicare, elemento per elemento, la mappa di correlazione di una regione dell'immagine con quella di una cella adiacente sovrapposta alla prima per il 50% della superficie. In questo modo la mappa di correlazione risultante ha un picco molto più pronunciato rispetto a quelli delle singole regioni. La tecnica CBC è, in pratica, una correlazione zero-dimensionale tra due o più mappe di correlazione ed è un'operazione diversa rispetto alla media delle correlazioni utilizzata per aumentare il valore del rapporto segnale-rumore. Ogni valore della correlazione che non compare in ciascuna delle mappe di correlazione è eliminato dalla correlazione risultante dalla combinazione delle due e, perciò, non viene mediato come accade in una media di insieme o temporale. Poiché la probabilità di riscontrare le medesime anomalie in regioni diverse è molto bassa, le eventuali anomalie sono così eliminate dai dati. Al contrario, i valori della correlazione che sono identici nelle due regioni sono amplificati nella correlazione risultante. In definitiva, anche se il picco di correlazione non è distinguibile da quelli circostanti in ciascuna delle singole correlazioni, nella moltiplicazione delle due correlazioni il picco diventa distinguibile oppure risulta evidente che la quantità di informazioni non è sufficiente per calcolare lo spostamento.

Considerando il caso di due finestre di interrogazione adiacenti non sovrapposte di dimensioni $N \times N$, se si suppone che la velocità in direzione y sia lineare lungo le due finestre con espressione dello spostamento data da $\underline{V}\Delta t = ((v_x(x/N) + v_0)\underline{j})$, i picchi risultanti dalla correlazione di queste regioni cadono nell'involuppo della correlazione lungo y definito come:

$$\phi_y = \int_{-N/2}^{N/2} \frac{\pi r^2 I^2}{2N} e^{-\frac{\left(y - v_x \frac{x}{N} - v_0\right)^2}{2r^2}} dx, \quad (3.69)$$

dove r è il raggio della particella tracciante sull'immagine ed I è l'intensità massima della particella. L'involuppo definito dalla (3.69) ha un profilo Gaussiano che è allungato nella direzione del gradiente ed è centrato sulla velocità media nella cella di interrogazione. Se si moltiplicano le

mappe di correlazione di due celle adiacenti si cerca di ridurre il picco di correlazione ad un profilo Gaussiano simmetrico, il cui inviluppo è dato da:

$$\phi'_y = \phi_y \phi_y = \left(\int_{-N}^0 \frac{\pi r^2 I^2}{2N} e^{-\frac{\left(y - v_x \frac{x}{N} - v_0\right)^2}{2r^2}} dx \right) \left(\int_0^N \frac{\pi r^2 I^2}{2N} e^{-\frac{\left(y - v_x \frac{x}{N} - v_0\right)^2}{2r^2}} dx \right). \quad (3.70)$$

Per $v_x/r < 1$ l'inviluppo è approssimato da $I^2 \pi r^2 \exp((y - V_0)^2/2r^2)$ mentre, per valori maggiori di v_x/r , l'ampiezza decresce a causa degli elevati spostamenti sul bordo delle finestre. In quest'ultimo caso l'inviluppo continua a rimanere simmetrico e ciò migliora l'accuratezza nella determinazione dello spostamento frazionario. Gli errori di correlazione dovuti all'illuminazione non uniforme, provocando un profilo di correlazione asimmetrico sono ugualmente ridotti con questa tecnica. Gli stessi risultati si ottengono anche nel caso in cui si applichi la tecnica simultaneamente sia lungo la direzione x che lungo la direzione y .

In ultima analisi è opportuno osservare che la tecnica CBC non equivale al calcolo della correlazione su una regione più larga. Infatti, mentre quest'ultima non elimina le anomalie nella correlazione e, nel caso di piccoli gradienti di velocità, rafforza il picco corrispondente allo spostamento medio, nella tecnica CBC il picco della correlazione prodotto è condizionato dallo spostamento presente nella zona in comune alle due finestre adiacenti. Le informazioni presenti nella regione in comune condizionano allo stesso modo il risultato e non sono eliminate dalla correlazione finale. Al contrario, le informazioni contenute nella parte non comune alle due finestre condizionano lo spostamento soltanto nella parte che mostra uno spostamento simile. L'efficacia della tecnica quindi aumenta al diminuire della zona di sovrapposizione delle particelle. In presenza di campi di velocità con gradienti elevati, però, un basso grado di sovrapposizione delle finestre rischia di ridurre il picco di correlazione e, per tale ragione, il valore ottimale della sovrapposizione corrisponde al 50%.

4. MISURE CON TECNICA PIV STEREOSCOPICA

Nonostante tutti i vantaggi descritti nei precedenti capitoli, uno dei maggiori inconvenienti della PIV classica risiede nel fatto che la tecnica è in grado di misurare soltanto la proiezione del vettore velocità sul piano di luce laser. In presenza di moti fortemente tridimensionali la componente della velocità ortogonale al piano di misura non può essere misurata e, allo stesso tempo, le componenti di velocità nel piano sono affette da grossi errori. Questo errore aumenta al crescere della distanza dall'asse principale del sistema ottico. Per ridurre l'errore di proiezione, è spesso vantaggioso posizionarsi a distanza elevata rispetto all'area di registrazione dell'immagine. Ciò si ottiene facilmente utilizzando lenti con focale lunga. Tuttavia, un numero sempre crescente di applicazioni PIV richiede la conoscenza della terza componente del campo di moto e, grazie alla realizzazione di apparecchiature sempre più sofisticate, si è riusciti a realizzare apparati in grado di calcolare questa componente. Numerose sono le tecniche in grado di superare il limite principale della PIV, le principali sono la PIV olografica, la PIV con piano duale e la PIV stereoscopica. Quest'ultima è la tecnica più comunemente adoperata e consiste nel registrare le immagini delle particelle traccianti da due angoli di vista diversi con due distinte telecamere. Nel seguito saranno trattate soltanto le problematiche connesse con la tecnica stereoscopica, essendo questa la tecnica adoperata per effettuare le misure del campo di moto nel presente lavoro di tesi. Per quanto riguarda le altre tecniche, ci si limiterà soltanto a brevissimi cenni.

4.1. Disposizione delle ottiche nelle registrazioni stereoscopiche

Come è noto, le registrazioni stereoscopiche sono effettuate da due telecamere inquadranti lo stesso oggetto da punti di vista differenti. In tal modo, ogni telecamera ottiene due informazioni bidimensionali dello stesso oggetto. Combinando le informazioni delle due telecamere, è possibile ottenere un'informazione tridimensionale dell'oggetto registrato in maniera analoga a quanto avviene nel nostro cervello, il quale stima la profondità di un oggetto a partire dalle immagini riprese dai due occhi. I metodi stereoscopici sono sostanzialmente due: il metodo con traslazione ed il metodo con spostamento angolare. Come vedremo, la principale differenza tra i due metodi risiede nel diverso allineamento dei sistemi ottici.

4.1.1. Metodo con traslazione

L'allineamento delle due telecamere nel metodo con traslazione è rappresentato in Figura 4.1(a). In essa le telecamere sono disposte parallelamente l'una rispetto all'altra, inquadrano lo stesso piano di misura illuminato dal laser (piano oggetto) ed hanno gli assi ottici ortogonali al piano oggetto. Con questa disposizione, le telecamere non inquadrano la stessa porzione di un oggetto posto nel piano di misura e, perciò, è possibile calcolare le tre componenti del vettore spostamento soltanto nella zona in cui i due campi di vista si sovrappongono. In questa configurazione il piano oggetto, il piano della lente ed il piano dell'immagine, coincidente con il piano dei sensori CCD, sono paralleli. La distanza tra gli assi ottici delle due telecamere è indicata con $2h$, invece, l'angolo di vista, definito come l'angolo sotteso dall'asse di simmetria e dal raggio congiungente il centro dell'oggetto con il centro della lente, è indicato con θ .

Come si vedrà alla fine del capitolo, per aumentare l'accuratezza nella misura della componente di velocità ortogonale al piano di misura bisogna incrementare l'angolo di vista al valore massimo ottenibile. Un incremento dell'angolo di vista si può ottenere incrementando la distanza tra le foto-camere. L'operazione, però, avviene a discapito della zona di sovrapposizione dei campi di vista, diminuendo così la quantità di informazione ottenibile dalle immagini. Per risolvere quest'ultimo problema è possibile traslare i sensori CCD rispetto alle lenti, ottenendo un aumento del campo di vista comune (vedi Figura 4.1(b)). Soprattutto per lenti ad elevata lunghezza focale, però, la limitata apertura angolare pone dei grossi vincoli alla distanza massima tra le lenti delle due telecamere. Inoltre, la maggior parte delle lenti, essendo progettata per

l'utilizzo con un sensore fisso centrato sull'asse ottico, è caratterizzata da una forte diminuzione della funzione di trasferimento della modulazione (MTF) verso i bordi del campo di vista, ossia lontano dall'asse di vista principale. Poiché le lenti con asse ottico obliquo non sono praticamente realizzabili, per migliorare l'accuratezza, è indispensabile adoperare sistemi alternativi a quello appena descritto. Il metodo con spostamento angolare descritto di seguito, allineando l'asse della lente con la direzione di vista principale, rappresenta una valida alternativa.

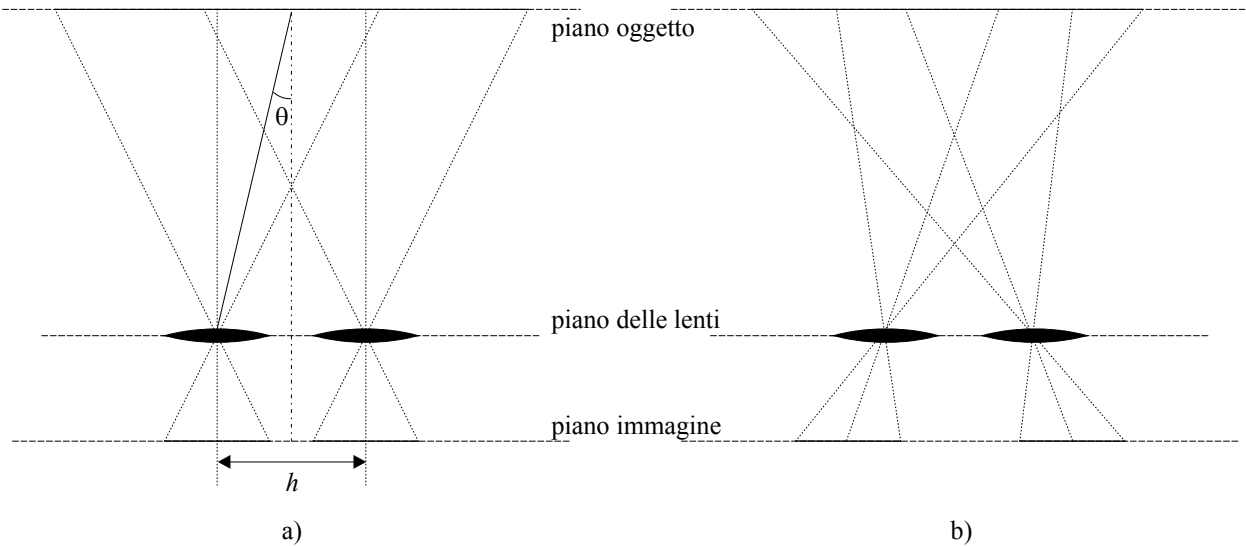


Figura 4.1 Rappresentazione schematica di un apparato stereoscopico nel metodo con traslazione: a) disposizione senza spostamento dei sensori CCD; b) disposizione con spostamento dei sensori CCD.

4.1.2. Metodo con spostamento angolare

L'allineamento delle due telecamere nel metodo con spostamento angolare è schematizzato in Figura 4.2(a). In questa configurazione, le telecamere sono posizionate con un certo angolo rispetto al piano oggetto inquadrato e, di conseguenza, il piano oggetto ed il piano dell'immagine non sono più paralleli. Gli assi ottici si intersecano sul piano oggetto e l'angolo di vista, indicato con θ , è definito ancora una volta come l'angolo sotteso dall'asse di simmetria e dal raggio congiungente il centro dell'oggetto con il centro della lente. Utilizzando questo metodo, si possono realizzare misure con grandi angoli di vista senza una grossa perdita di informazione e ci si aspetta così di ottenere una migliore accuratezza nella misura della componente ortogonale al piano oggetto.

Con l'allineamento secondo il metodo con spostamento angolare, però, nascono due nuove difficoltà che non erano presenti nel metodo con traslazione. Un primo problema, dovuto all'assenza di parallelismo tra il piano oggetto e quello dell'immagine, è legato all'ingrandimento non uniforme sull'immagine. Ciò induce grossi errori prospettici nella misura delle proiezioni delle componenti nel piano di misura e rende necessario l'utilizzo di diversi metodi di compensazione degli errori. Detti metodi saranno descritti in maniera dettagliata nei prossimi paragrafi. Un secondo problema, dovuto anch'esso alla particolare disposizione di questa configurazione, è connesso al fatto che l'immagine non è completamente a fuoco su tutto il piano. Se si ricorda l'espressione della profondità di campo, scritta nella forma:

$$\delta_z = 4(1 + M^{-1})^2 f_{\#}^2 \lambda, \quad (4.1)$$

è evidente che, per risolvere il problema della messa a fuoco dell'immagine, è necessario incrementare il numero $f_{\#}$ riducendo il diametro dell'apertura. In base alla (4.1) ed a semplici considerazioni geometriche, per una lunghezza d'onda di $500nm$, un angolo di vista 45° ed una lunghezza dell'oggetto di $40mm$, si ha che per avere una messa a fuoco uniforme su tutta l'immagine bisognerebbe avere $f_{\#} = 19.4$. Questo valore è incompatibile con l'esigenza di avere una sufficiente quantità di luce necessaria ad effettuare misure PIV corrette. Per risolvere il problema della messa a fuoco si rende perciò necessario posizionare le lenti ed i sensori CCD in maniera da soddi-

sfare la condizione di Scheimpflug (Prasad & Jensen, 1995). Quest'ultimo tipo di allineamento, mostrato in Figura 4.2(b), è descritto più in dettaglio nel paragrafo seguente.

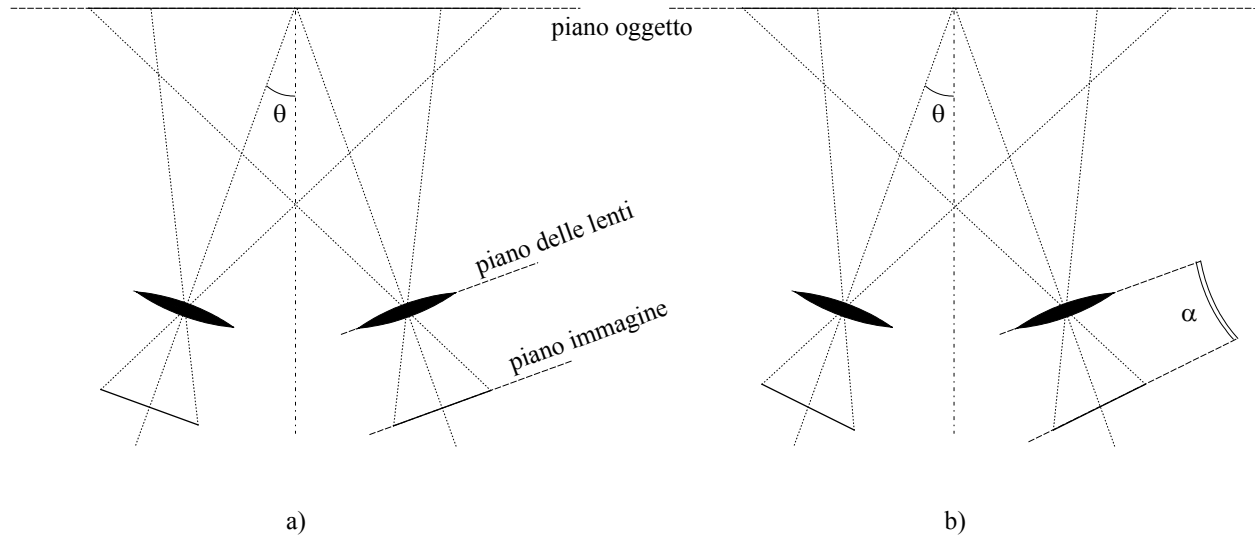


Figura 4.2 Rappresentazione schematica di un apparato stereoscopico nel metodo con spostamento angolare: a) disposizione con piano delle lenti e piano immagine paralleli; b) disposizione con condizione di Scheimpflug.

4.1.3. Condizione di Scheimpflug

La condizione di Scheimpflug richiede un'ulteriore rotazione del piano immagine rispetto al piano delle lenti di un particolare angolo α . L'angolo di cui è richiesta la rotazione addizionale può essere calcolato in base a semplici considerazioni deducibili dalla rappresentazione schematica di Figura 4.3.

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane (x, y) con origine nel centro della lente ed assi diretti lungo il piano della lente e la direzione ad esso ortogonale rispettivamente. Si consideri il raggio nominale del sistema ottico, definito come il raggio passante per il centro della lente ed ortogonale al piano della lente stessa. Si indichi con θ , l'angolo di vista definito come l'angolo compreso tra il raggio nominale e la normale al piano oggetto. Indicando rispettivamente con d_o e d_i le distanze della lente dal piano oggetto e dal piano immagine prese lungo il raggio nominale, i punti di intersezione del raggio nominale con i rispettivi piani avranno coordinate $(0, -d_o)$ e $(0, d_i)$. Il fattore di ingrandimento nominale M_n è dato allora dalla seguente espressione:

$$M_n = \frac{d_i}{d_o}. \quad (4.2)$$

Indicando con P_o un generico punto del piano oggetto, con P_i il punto corrispondente sul piano immagine e con d_o^* e d_i^* le corrispondenti coordinate lungo y , in base alle note relazioni trigonometriche tra gli angoli ed i lati di un triangolo rettangolo, si ha:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \theta} = \frac{d_i - d_i^*}{d_i^*} \frac{d_o^*}{d_o^* - d_o} = \frac{d_i - d_i^*}{d_o^* - d_o} \frac{d_o^*}{d_i^*}. \quad (4.3)$$

Affinché il punto P_i appartenga allo stesso piano focale del punto di intersezione del piano immagine con il raggio nominale, deve essere soddisfatta la condizione:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{d_i^*} + \frac{1}{d_o^*}, \quad (4.4)$$

dove con f si è indicata la distanza focale della lente. Raggruppando al primo membro le coordinate dei punti nel piano immagine ed al secondo membro quelle dei punti nel piano oggetto, la (4.4) si può scrivere nella forma:

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i - d_i^*}{d_o^* - d_o} \frac{d_o^*}{d_i^*}. \quad (4.5)$$

Ricordando la (4.2) e la (4.3), la (4.5) diventa:

$$M_n = \frac{tg\alpha}{tg\theta} \quad (4.6)$$

L'equazione (4.6) è nota come condizione di Scheimpflug e, se è soddisfatta, le tracce del piano dell'immagine, del piano della lente e del piano oggetto si intersecano nello stesso punto avente coordinate $(-d_o/tg\theta, 0)$.

Infine, è necessario sottolineare che, quando il fluido in esame è un liquido, l'utilizzo del metodo con spostamento angolare può dar luogo a diversi problemi. Infatti, i raggi provenienti dal piano oggetto, se non incidono con un angolo normale alla superficie, nel passaggio attraverso la superficie di discontinuità subiscono una deviazione significativa causando forti distorsioni; inoltre, se l'angolo di incidenza è molto elevato, raggiungendo il valore dell'angolo di incidenza critico, i raggi non oltrepassano la superficie. Per ridurre notevolmente i suddetti problemi è necessario porre un prisma liquido all'interfaccia tra il liquido e l'aria, in modo da avvicinarsi alla condizione di ortogonalità tra il raggio nominale e la superficie di separazione.

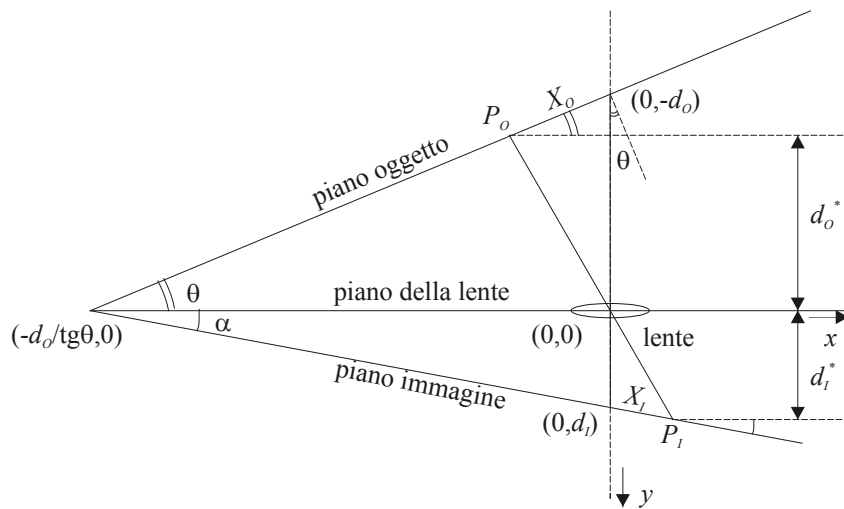


Figura 4.3 Ricostruzione di una coordinata del piano di misura basata sull'ottica geometrica per una configurazione stereoscopica con metodo con spostamento angolare soddisfacente la condizione di Scheimpflug.

4.2. Correzione degli errori prospettici

Nel paragrafo precedente si è visto che, adoperando il metodo con spostamento angolare, si introducono errori prospettici nella misura delle componenti di velocità nel piano oggetto. Tali errori sono dovuti al fattore di ingrandimento non uniforme su tutta l'immagine. Al fine di effettuare misure corrette è pertanto necessario calcolare gli errori prospettici mediante una procedura di calibrazione ed eliminarli a posteriori. Nei successivi paragrafi verranno esaminati i due metodi maggiormente adoperati. Il primo metodo si basa su una stima del fattore di ingrandimento mediante l'ottica geometrica, il secondo si basa sull'utilizzo di polinomi interpolanti del secondo ordine.

4.2.1. Correzione mediante l'ottica geometrica

Per determinare il fattore di ingrandimento locale sull'immagine e, di conseguenza, la correzione da effettuare sugli spostamenti è necessario conoscere in che modo le coordinate del piano immagine si trasformano nelle coordinate del piano oggetto quando è soddisfatta la condizione di Scheimpflug. Per ricavare le formule di trasformazione si farà riferimento alla Figura 4.3 e si utilizzerà la stessa simbolo adottata nel paragrafo precedente.

In base alla (4.2) ed alla (4.4) la distanza nominale dell'oggetto d_o e la distanza nominale dell'immagine d_i sono date rispettivamente da:

$$d_o = \frac{f(M_n + 1)}{M_n} \text{ e } d_I = f(M_n + 1). \quad (4.7)$$

Considerando il punto generico P_I sul piano dell'immagine, la sua coordinata lungo y , d_I^* , è data da:

$$d_I^* = d_I + X_I \sin(\alpha), \quad (4.8)$$

dove X_I è la coordinata orizzontale sul piano immagine che non è parallelo al piano coordinato x . La coordinata y del punto P_O corrispondente del punto P_I sul piano oggetto è, invece, data da:

$$d_o^* = d_o - X_o \sin(\theta), \quad (4.9)$$

dove X_o rappresenta la coordinata nel piano oggetto. In base alla (4.4) le coordinate lungo y dei punti P_I e P_O sono legate dalla relazione:

$$d_o^* = \frac{d_I^* f}{d_I^* - f}. \quad (4.10)$$

Combinando la (4.9) e la (4.10), si ottiene:

$$X_o = \frac{d_o - \frac{d_I^* f}{d_I^* - f}}{\sin(\theta)}. \quad (4.11)$$

Sostituendo le (4.7) e (4.9) nella (4.11) si ottiene la relazione cercata tra X_I ed X_o :

$$X_o = \frac{f X_I \sin(\alpha)}{M_n \sin(\theta) (X_I \sin(\alpha) + f M_n)}. \quad (4.12)$$

La coordinata verticale Y_o si ottiene dividendo la coordinata corrispondente nel piano immagine Y_I per il fattore di ingrandimento locale M^* che è funzione della coordinata X_I :

$$Y_o = \frac{Y_I}{M^*} = Y_I \frac{d_o^*}{d_I^*}. \quad (4.13)$$

Sostituendo la (4.8) e la (4.10) nella (4.13) si ottiene, analogamente alla (4.12), l'espressione parametrica per la coordinata verticale:

$$Y_o = \frac{Y_I f}{X_I \sin(\alpha) + f M_n}. \quad (4.14)$$

4.2.2. Correzione mediante polinomi del secondo ordine

La correzione degli errori prospettici mediante le (4.12) e (4.14) richiede l'esatta conoscenza di parametri quali la distanza focale f della lente, gli angoli α e θ tra i piani, la posizione precisa del piano della lente ed il fattore di ingrandimento nominale M_n . Inoltre, le espressioni (4.12) e (4.14) non tengono conto di effetti non lineari quali le distorsioni della lente e sono sensibili anche a piccole variazioni dei parametri geometrici. Un approccio più robusto che tenga conto delle distorsioni della lente si ottiene utilizzando polinomi del secondo ordine.

Il metodo con approssimazioni polinomiali approssima la funzione di trasformazione delle coordinate del piano immagine in quelle del piano oggetto con funzioni polinomiali del secondo ordine nelle coordinate X_I ed Y_I :

$$\begin{aligned} X_o &= a_0 + a_1 X_I + a_2 Y_I + a_3 X_I Y_I + a_4 X_I^2 + a_5 Y_I^2 \\ Y_o &= b_0 + b_1 X_I + b_2 Y_I + b_3 X_I Y_I + b_4 X_I^2 + b_5 Y_I^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

I coefficienti incogniti $a_0 \dots a_5$ e $b_0 \dots b_5$ possono essere determinati facilmente con il metodo dei minimi quadrati se sono note almeno sei coppie di punti corrispondenti sul piano oggetto e sul piano immagine. Il suddetto approccio, quindi, ha il vantaggio di evitare il calcolo dei parametri geometrici e di consentire una stima delle deformazioni non lineari attraverso i termini quadratici delle funzioni polinomiali. Si noti che non è possibile esprimere i coefficienti dei polinomi (4.15) in funzione dei parametri fisici utilizzati per la ricostruzione geometrica in quanto, espandendo

in serie di Taylor le (4.12) e (4.14) i termini del terzo ordine sono non nulli.

In alternativa alle approssimazioni polinomiali fornite dalla (4.15) è possibile utilizzare le equazioni derivanti dalla proiezione prospettica. In coordinate omogenee dette equazioni si scrivono:

$$\begin{bmatrix} w_o X_o \\ w_o Y_o \\ w_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_I X_I \\ w_I Y_I \\ w_I \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

dove w_o e w_I sono costanti e $a_{33} = 1$. Scritte in coordinate cartesiane le equazioni (4.16) assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned} X_o &= \frac{a_{11}X_I + a_{12}Y_I + a_{13}}{a_{31}X_I + a_{32}Y_I + 1} \\ Y_o &= \frac{a_{21}X_I + a_{22}Y_I + a_{23}}{a_{31}X_I + a_{32}Y_I + 1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La principale proprietà della proiezione prospettica consiste nel trasformare un rettangolo in un generico quadrilatero, conservando la linearità della trasformazione. Ponendo pari a zero i coefficienti a_{31} ed a_{32} si ottiene la trasformazione affine più frequentemente utilizzata che trasforma i rettangoli in parallelogrammi. Per tener conto delle distorsioni ottiche le (4.17) possono essere modificate aggiungendo i termini del secondo ordine:

$$\begin{aligned} X_o &= \frac{a_{11}X_I + a_{12}Y_I + a_{13} + a_{14}X_I^2 + a_{15}Y_I^2 + a_{16}X_IY_I}{a_{31}X_I + a_{32}Y_I + a_{33} + a_{34}X_I^2 + a_{35}Y_I^2 + a_{36}X_IY_I} \\ Y_o &= \frac{a_{21}X_I + a_{22}Y_I + a_{23} + a_{24}X_I^2 + a_{25}Y_I^2 + a_{26}X_IY_I}{a_{31}X_I + a_{32}Y_I + a_{33} + a_{34}X_I^2 + a_{35}Y_I^2 + a_{36}X_IY_I} \\ a_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La determinazione dei coefficienti incogniti nelle equazioni (4.17) e (4.18) non si può ottenere in maniera semplice con il metodo classico dei minimi quadrati perché le espressioni non sono polinomi lineari ma frazioni di polinomi dello stesso ordine. Coppie di punti errati o forti deviazioni possono far divergere rapidamente la soluzione con i minimi quadrati. Per ottenere la soluzione ottimale, pertanto, è necessario utilizzare un metodo dei minimi quadrati non lineare come il metodo di Levenberg-Marquart. Nel caso si utilizzi l'espressione (4.18), il metodo di Levenberg-Marquart si implementa calcolando prima le incognite nella (4.17) ed utilizzando queste soluzioni come stima iniziale per la soluzione delle incognite della (4.18).

4.3. Metodi per la ricostruzione delle tre componenti del campo di moto

In letteratura sono numerosi i metodi utilizzati per ricostruire le tre componenti del campo di moto. Alcuni di questi si basano sulla ricostruzione geometrica del campo di moto, altri utilizzano approssimazioni polinomiali con calibrazione su diversi piani. Senza avere la pretesa di volere trattare in maniera completa tutte le procedure proposte da diversi autori, nel seguito saranno trattati i metodi più largamente utilizzati sia presso laboratori scientifici sia in ambito industriale. Per ciascun metodo sarà fornita anche una breve descrizione della procedura di PIV stereoscopica adoperata, sintetizzando i passi fondamentali della metodologia che vanno dalla fase di calibrazione al calcolo delle tre componenti del campo di moto.

4.3.1. Metodi di ricostruzione geometrica

In base a quanto detto nel paragrafo 4.2, mediante correzione degli errori prospettici, è possibile ricostruire le proiezioni delle componenti degli spostamenti nel piano oggetto. Noti detti spostamenti è possibile ricostruire le tre componenti del campo di spostamento nel piano di misura. Un

primo metodo di ricostruzione, utilizzato da numerosi autori, si basa sull'applicazione diretta delle relazioni geometriche che legano i vettori alle corrispondenti proiezioni sul piano di misura. Numerosi sono i metodi in cui è possibile combinare tra loro le proiezioni del vettore spostamento e, tra questi, soltanto i due metodi più comunemente utilizzati saranno analizzati più in dettaglio.

Una classe di tecniche di ricostruzione stereoscopica assume che la configurazione dell'apparato di misura sia simmetrica rispetto al piano ortogonale al piano oggetto (van Oord, 1997). Sotto l'ipotesi di configurazione simmetrica, l'espressione delle formule di ricostruzione si semplificano notevolmente e sono facilmente ricavabili. Con riferimento alla Figura 4.4, siano (u_s, v_s) e (u_d, v_d) le proiezioni sul piano oggetto del vettore spostamento (u, v, w) per la telecamera di sinistra e di destra rispettivamente. Siano, inoltre, φ e γ gli angoli sotto i quali la lente della telecamera sinistra e quella di destra vedono rispettivamente l'estremità del vettore spostamento nel generico punto di coordinate (x_p, y_p) nel piano xz . Indicando con B ed H le distanze di ciascuna lente dal piano di simmetria e dal piano di misura rispettivamente, si ha che:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{u_s - u} = \frac{H}{B + x_p + u_s}, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{w}{u - u_d} = \frac{H}{B - x_p - u_d}. \quad (4.20)$$

Dalle equazioni (4.19) e (4.20) è possibile ricavare le componenti u e w in funzione delle proiezioni u_d e u_s . Per ricavare la componente dello spostamento lungo l'asse y , è necessario utilizzare un'altra relazione. Indicando con η l'angolo sotto il quale le due lenti vedono l'estremità del vettore spostamento nel piano yz , si può utilizzare la relazione:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{w}{v_s - v} = \frac{H}{v_s + y_p}. \quad (4.21)$$

In definitiva, risolvendo il sistema di equazioni dato dalle (4.19), (4.20) ed (4.21) nelle incognite u, v e w si ottengono le ricercate equazioni:

$$u = \frac{B(u_s + u_d) + x_p(u_d - u_s)}{2B + u_s - u_d} \quad (4.22)$$

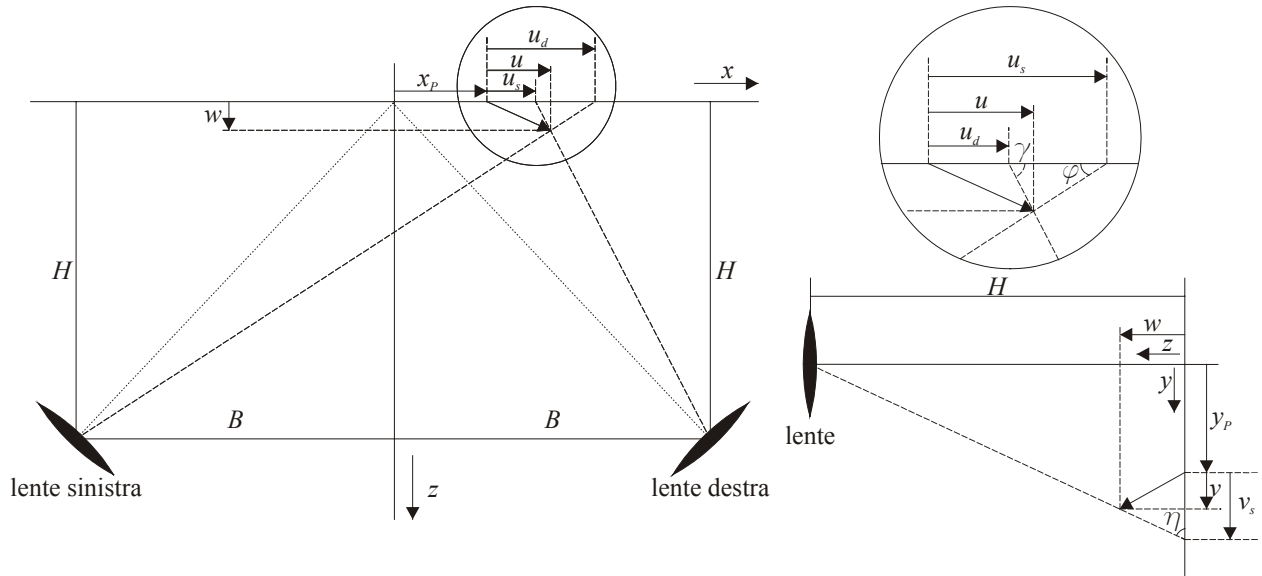


Figura 4.4 Rappresentazione schematica per il calcolo delle componenti reali del campo di spostamento a partire dalle proiezioni del campo di spostamento sulle telecamere sinistra e destra per una configurazione simmetrica.

$$v = \frac{y_p(u_d - u_s) + 2Bv_s}{2B + u_s - u_d} \quad (4.23)$$

$$w = H \frac{u_s - u_d}{2B + u_s - u_d}. \quad (4.24)$$

Si noti che nelle equazioni (4.22)-(4.24) compare soltanto la componente v_s in quanto, per determinare le tre componenti reali dello spostamento, è sufficiente utilizzare tre relazioni. La quarta relazione in cui compare v_d , non essendo indipendente dalle altre tre, risulta chiaramente sovrabbondante. In teoria, in condizioni di simmetria, v_d è uguale a v_s , ma i piccoli disallineamenti presenti nella pratica rendono le due proiezioni leggermente diverse. Per tenere conto di questa eventualità si preferisce sostituire al posto di v_s il valore medio delle due proiezioni $(v_s + v_d)/2$.

Nel caso più generale in cui la configurazione di Figura 4.4 non sia simmetrica, indicando con B_s e B_d le distanze dal piano $x = 0$ della lente sinistra e destra rispettivamente e con H_s ed H_d le rispettive distanze dal piano di misura, si ottengono le relazioni:

$$w = \frac{u_s - u_d}{T_s + T_d} \quad (4.25)$$

$$u = \frac{(-wT_s + u_s) + (wT_d + u_d)}{2} \quad (4.26)$$

$$v = -w \left(\frac{v_s + y_p}{2H_s} + \frac{v_d + y_p}{2H_d} \right) + \frac{v_s + v_d}{2}. \quad (4.27)$$

Dove con T_s e T_d si sono indicate rispettivamente le quantità:

$$T_s = \frac{B_s + (X_p + u_s)}{H_s} \quad (4.28)$$

$$T_d = \frac{B_d - (X_p + u_d)}{H_d}. \quad (4.29)$$

Nel ricavare la (4.27) si sono utilizzate entrambe le relazioni relative alle proiezioni destra e sinistra v_s e v_d e se ne è preso il valore medio in analogia a quanto detto per la (4.23).

Un metodo di ricostruzione geometrica più flessibile è stato proposto da Willert (1997). Il metodo, come sarà illustrato, permette di disporre le telecamere in una qualsiasi configurazione per la quale gli assi ottici non siano allineati e, in particolare, la ricostruzione si adatta anche ad una disposizione delle telecamere dai lati opposti rispetto al piano di misura.

Lo schema per la ricostruzione geometrica delle tre componenti è mostrato in Figura 4.5. L'origine O è un punto noto all'interno del fascio di luce laser visibile da entrambe le telecamere con coordinate nello spazio fisico (x_O, y_O, z_O) . Assumendo un sistema cartesiano globale ortogonale, gli assi x ed y sono allineati con il fascio di luce mentre l'asse z è ortogonale al piano di misura. Le due telecamere inquadranti una zona comune all'interno del fascio di luce sono assimilate ai punti $L_s \equiv (x_s, y_s, z_s)$ e $L_d \equiv (x_d, y_d, z_d)$. Poiché è difficile determinare i piani principali di un sistema di lenti complesso, la posizione di ciascun punto può essere approssimata con il centro della prima lente dell'obiettivo. L'errore sistematico introdotto con questa schematizzazione diminuisce al crescere della lunghezza focale e della distanza di osservazione. Il punto P nel piano di misura in cui bisogna determinare il vettore dello spostamento ha coordinate (x_P, y_P, z_P) , mentre le componenti dello spostamento viste lungo le direzioni delle due telecamere sono rispettivamente (u_s, v_s) e (u_d, v_d) . Poiché, come è noto, la tecnica PIV effettua una media di insieme nel volume e lo spessore del fascio di luce è diversi ordini di grandezza inferiore rispetto alla distanza di osservazione, si può assumere che il vettore spostamento giaccia in un piano di spessore nullo. Gli angoli compresi tra la normale al piano di misura e il raggio di vista, per le direzioni di proiezione delle due telecamere nel piano xz , sono rispettivamente α_s e α_d . In maniera analoga si indicano rispettivamente gli angoli β_s e β_d nel piano yz . Infine, poiché la distanza di

vista è generalmente molto maggiore del vettore spostamento, si può assumere che le differenze angolari $\delta\alpha$ e $\delta\beta$ lungo il vettore spostamento siano trascurabili. Utilizzando la geometria elementare, le tre componenti del campo di spostamento sono date da:

$$u = \frac{u_d \operatorname{tg} \alpha_s - u_s \operatorname{tg} \alpha_d}{\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} \alpha_d} \quad (4.30)$$

$$v = \frac{v_d \operatorname{tg} \beta_s - v_s \operatorname{tg} \beta_d}{\operatorname{tg} \beta_s - \operatorname{tg} \beta_d} \quad (4.31)$$

$$w = \frac{u_d - u_s}{\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} \alpha_d} = \frac{v_d - v_s}{\operatorname{tg} \beta_s - \operatorname{tg} \beta_d} \quad (4.32)$$

con

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{x_P - x_s}{z_P - z_s}, \operatorname{tg} \alpha_d = \frac{x_P - x_d}{z_P - z_d}, \operatorname{tg} \beta_s = \frac{y_P - y_s}{z_P - z_s} \text{ e } \operatorname{tg} \beta_d = \frac{y_P - y_d}{z_P - z_d}. \quad (4.33)$$

Queste formule sono generali e si applicano a qualunque tipo di geometria, però i numeratori possono avvicinarsi a zero quando gli assi di vista diventano paralleli in ognuna delle proiezioni bidimensionali. Ad esempio, per la configurazione mostrata in Figura 4.5, le due telecamere sono collocate nella stessa posizione verticale del campo di vista e ciò rende gli angoli β_s e β_d e le corrispondenti tangenti molto piccoli. In questo caso la componente w può essere determinata con maggiore accuratezza soltanto utilizzando la prima uguaglianza delle (4.32), mentre la componente v deve essere riscritta utilizzando la prima uguaglianza delle (4.32) che non include $\operatorname{tg} \beta_s$ e $\operatorname{tg} \beta_d$ al denominatore, ossia:

$$v = \frac{v_s + v_d}{2} + \frac{w}{2} (\operatorname{tg} \beta_d - \operatorname{tg} \beta_s) = \frac{v_s + v_d}{2} + \frac{u_d - u_s}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \beta_d - \operatorname{tg} \beta_s}{\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} \alpha_d} \right). \quad (4.34)$$

Se $\operatorname{tg} \beta_s$ e $\operatorname{tg} \beta_d$ sono molto piccole, allora la v è data dalla media aritmetica di v_s e v_d e la componente w ortogonale al piano di misura non ha alcun effetto.

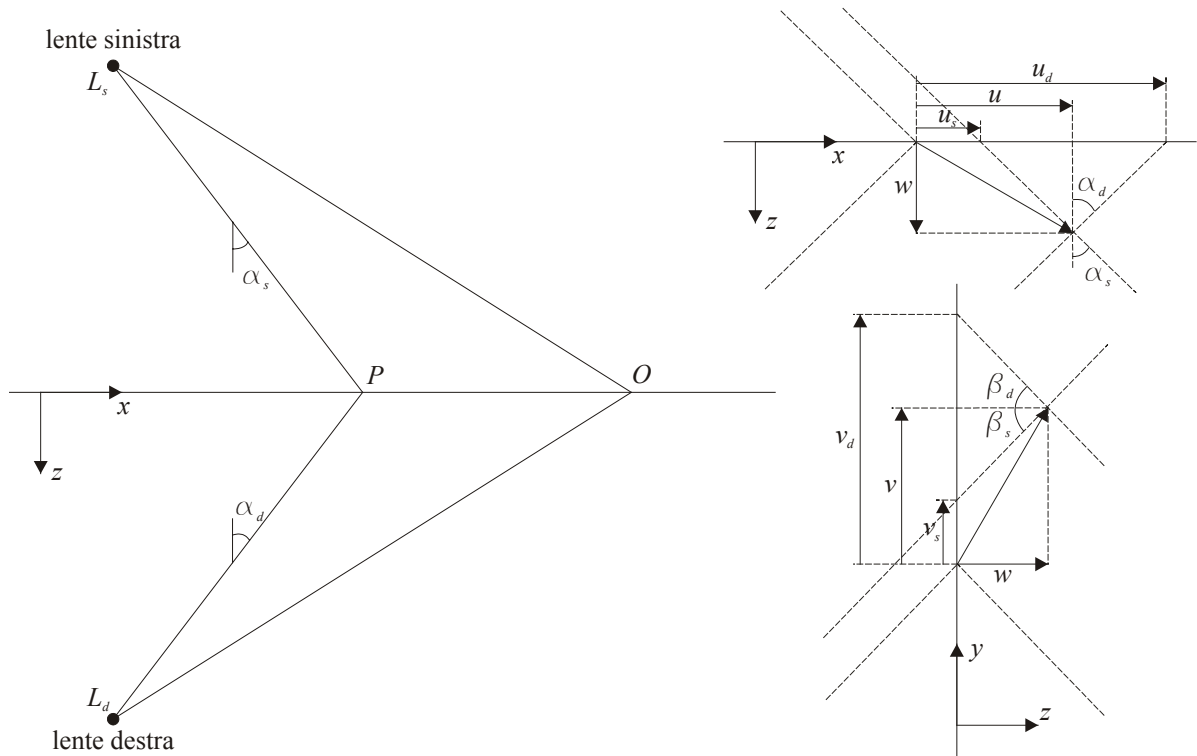


Figura 4.5 Rappresentazione schematica di un metodo generale per la ricostruzione geometrica del campo di spostamento effettivo.

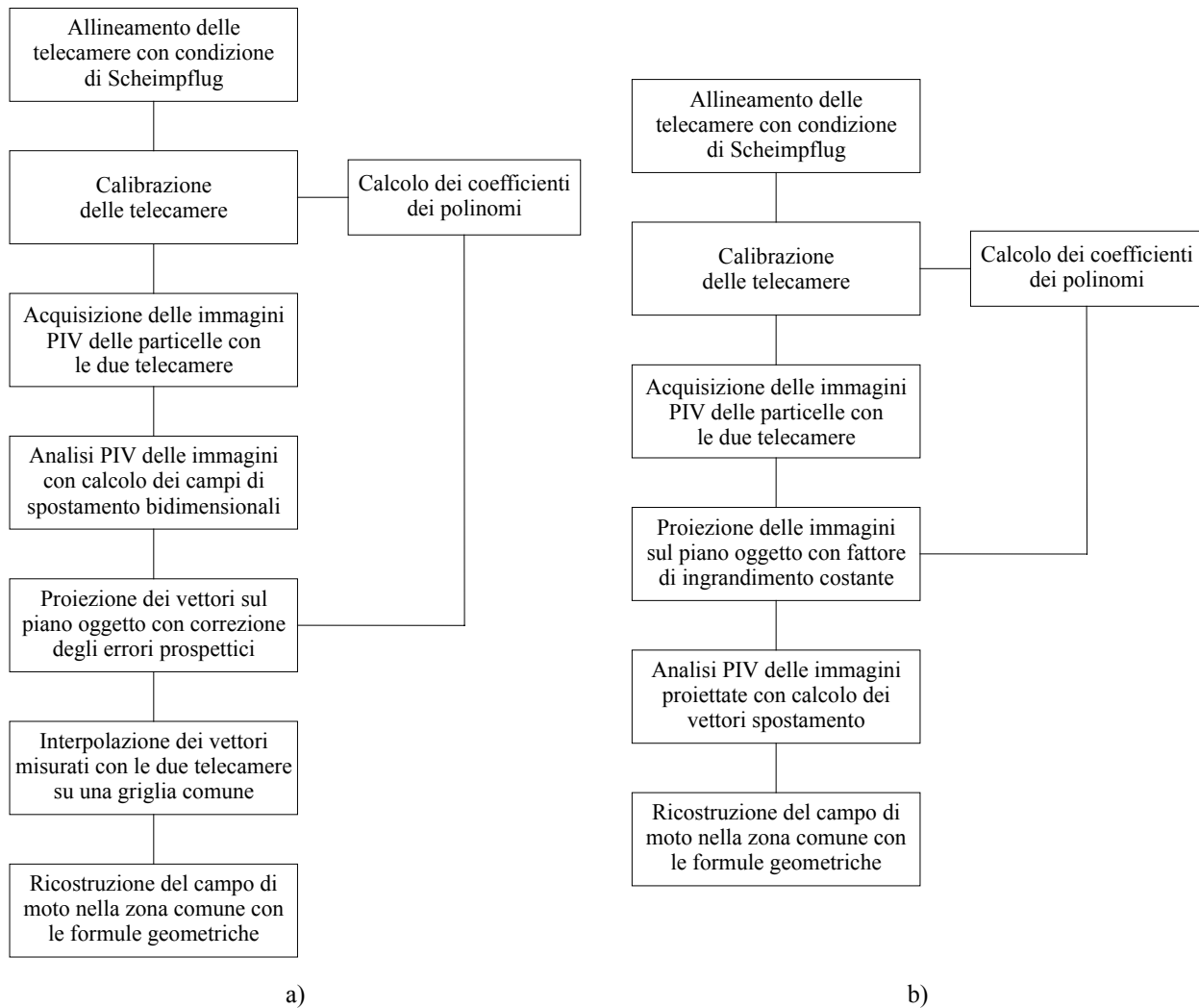


Figura 4.6 Diagrammi di flusso delle procedure stereoscopiche che si basano sulla ricostruzione geometrica del campo di spostamento.

Dopo aver introdotto le principali tecniche di ricostruzione geometrica del campo di spostamento, è ora possibile analizzare più in dettaglio le procedure stereoscopiche che si basano su dette modalità di ricostruzione. Le principali, riportate in Figura 4.6, sono sostanzialmente due. La prima procedura, il cui diagramma di flusso è riportato in Figura 4.6(a) si articola nei seguenti passi:

1. Dopo aver allineato le telecamere secondo la condizione di Scheimpflug, si effettua una calibrazione di entrambe le telecamere utilizzando un'apposita griglia secondo le modalità indicate nel paragrafo 4.2. Le costanti del polinomio interpolante sono salvate in un file e saranno successivamente utilizzate per correggere gli errori prospettici.
2. Si acquisiscono, per il flusso in esame, le immagini PIV delle particelle traccianti salvandole su di un archivio di massa nel caso si utilizzi una tecnica digitale.
3. Le immagini acquisite sono analizzate con gli algoritmi PIV convenzionali. Ogni coppia di immagini acquisite da ciascuna telecamera fornisce, così, un campo di moto bidimensionale misurato sul piano immagine.
4. Utilizzando i coefficienti del polinomio calcolati in fase di calibrazione si proiettano i campi di spostamento bidimensionali sul piano oggetto. Le proiezioni delle componenti ottenute in tal modo non sono affette da errori prospettici e possono essere utilizzate per una corretta ricostruzione del campo di spostamento.
5. Poiché le posizioni dei punti di griglia ricondotti al piano oggetto sono in generale diversi

per le due telecamere, è necessario interpolare i dati su una nuova griglia in comune alle due telecamere. Allo scopo generalmente si utilizza un tipo di interpolazione bilineare.

6. Le componenti effettive del campo di spostamento sono calcolate in base alle formule di ricostruzione geometrica precedentemente descritte. Il campo di moto è fornito sui punti della griglia comune ed i dati in uscita costituiscono il risultato dell'analisi stereoscopica.

In alternativa alla metodologia appena descritta è possibile utilizzare la seguente procedura il cui diagramma di flusso è rappresentato in Figura 4.6(b). I passi principali del metodo sono i seguenti:

1. Anche in questo caso, dopo aver allineato le telecamere secondo la condizione di Scheimpflug, si effettua una calibrazione di entrambe le telecamere utilizzando un'apposita griglia secondo le modalità indicate nel paragrafo 4.2 e le costanti del polinomio interpolante saranno successivamente utilizzate per correggere gli errori prospettici.
2. Si acquisiscono, per il flusso in esame, le immagini PIV delle particelle traccianti salvandole su di un archivio di massa nel caso si utilizzi una tecnica digitale.
3. Scegliendo un fattore di scala per i punti nello spazio fisico, con i valori dei coefficienti del polinomio interpolante calcolati al passo 1, si trasforma l'immagine PIV in una nuova immagine che rappresenta la proiezione dell'immagine dello spazio fisico con fattore di ingrandimento costante. La ricostruzione delle immagini è effettuata in maniera tale da realizzare una perfetta corrispondenza nello spazio fisico tra le zone inquadrature dalle due telecamere e, di conseguenza, tra le corrispondenti finestre di interrogazione su cui verrà effettuata l'analisi PIV.
4. Le immagini ottenute sono analizzate con gli algoritmi PIV convenzionali. Ogni coppia di immagini fornisce così un campo di moto bidimensionale misurato sul piano oggetto che, a meno di un fattore di scala, risulta privo di errori prospettici.
5. Le componenti effettive del campo di spostamento sono calcolate in base alle formule di ricostruzione geometrica precedentemente descritte a partire dai valori ottenuti al passo precedente, tenendo conto del fattore di scala e dell'intervallo di tempo tra i due laser. Anche in questo caso, il campo di moto è fornito sui punti di una griglia comune ed i dati in uscita costituiscono il risultato dell'analisi stereoscopica.

In conclusione, è opportuno precisare che, per entrambe le procedure descritte, è possibile effettuare la calibrazione con due metodi diversi. Il primo metodo, già descritto nel paragrafo 4.2, consiste nell'inquadrare con le due telecamere una griglia di punti stampata su di un piano, e dalle immagini acquisite calcolare le costanti del polinomio come è stato ampiamente descritto. Un secondo metodo, invece, utilizza per la calibrazione l'immagine che si ottiene illuminando con il fascio di luce laser una griglia quadrata di linee stampate su un foglio trasparente e mantenuto tra due piastre di vetro. questa procedura è necessaria quando le telecamere sono disposte su lati opposti rispetto al piano di misura. Tuttavia, per ottenere misure attendibili, quest'ultimo metodo richiede un perfetto allineamento tra il fascio laser e la griglia di calibrazione.

4.3.2. Metodo con mappatura tridimensionale

L'accuratezza delle misure di velocità con tecnica PIV, come è stato già detto, dipende dall'accuratezza con cui è possibile misurare gli spostamenti dell'immagine e dall'accuratezza con cui gli spostamenti sull'immagine possono essere collegati alla posizione e gli spostamenti delle particelle. Questi fattori dipendono principalmente da due tipi di aberrazioni ottiche: le aberrazioni focali che, ingrandendo le particelle, rendono più difficile misurare gli spostamenti in maniera accurata e le distorsioni dell'immagine che introducono una relazione non lineare tra la posizione della particella e la posizione della sua immagine. Le aberrazioni focali includono le aberrazioni sferiche, l'astigmatismo ed il coma. Le distorsioni dell'immagine, invece, si riferiscono ad ogni

agente che rende il fattore di ingrandimento non uniforme lungo il campo di vista dell'immagine. Le tre cause principali di distorsione sono le imperfezioni costruttive della lente, la rifrazione prodotta da interfacce ottiche, quali finestre e fluidi, che sono posizionate tra il piano oggetto ed il piano immagine e l'assenza di parallelismo tra il piano immagine ed il piano oggetto. Quest'ultima, come visto, è inevitabilmente presente quando si realizza la PIV stereoscopica con spostamento angolare e capita, anche nel caso si utilizzi una singola telecamera, quando il fascio di luce laser non è allineato con il piano oggetto. In genere, per correggere le distorsioni, si ricorre a modelli matematici della distorsione oppure si utilizzano calibrazioni empiriche. Il metodo descritto in questo paragrafo, proposto da Soloff ed Adrian (1997), utilizza una calibrazione per ottenere una funzione di mappatura tridimensionale approssimata. Oltre a compensare le aberrazioni presenti nella PIV a due componenti, la funzione di mappatura si può efficacemente adoperare per realizzare un sistema di PIV stereoscopica. La matematica alla base di questo metodo, inoltre, fornisce un valido strumento con cui è possibile ottenere un campo di velocità tridimensionale, combinando le immagini di due o più telecamere.

In generale, la relazione tra la posizione di un punto generico nello spazio fisico del flusso, indicata con $\underline{x} \equiv (x, y, z)$, e la posizione corrispondente nel piano immagine, indicata con $\underline{X} \equiv (X, Y)$, può essere rappresentata con una funzione di mappatura non lineare:

$$\underline{X} = \underline{F}(\underline{x}). \quad (4.35)$$

Tra le due esposizioni agli istanti t e $t + \Delta t$ una particella che si trova nel punto \underline{x} si sposta nel punto $\underline{x} + \Delta \underline{x}$, per cui lo spostamento nel piano immagine è dato da:

$$\Delta \underline{X} = \underline{F}(\underline{x} + \Delta \underline{x}) - \underline{F}(\underline{x}). \quad (4.36)$$

Utilizzando l'espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine, lo spostamento della particella è approssimato dalla relazione:

$$\Delta \underline{X} = \nabla \underline{F}(\underline{x}) \Delta \underline{x}, \quad (4.37)$$

in cui il gradiente della funzione \underline{F} , rappresentando una generalizzazione del concetto di ingrandimento, è detto matrice di ingrandimento e si indica con \underline{F} . Nel caso la formazione dell'immagine avvenga secondo le leggi dell'ottica geometrica, la matrice di ingrandimento è data da:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \frac{-d_l}{d_o - z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x}{d_o - z} \\ 0 & 1 & \frac{y}{d_o - z} \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

in cui con d_o e d_l si sono indicate rispettivamente le distanze del piano oggetto e del piano immagine dalla lente. A partire dallo spostamento $\Delta \underline{X}$ nel piano immagine, misurato con tecnica PIV, non è però possibile calcolare lo spostamento $\Delta \underline{x}$ nel piano oggetto mediante la (4.37) per due ragioni. Innanzitutto, poiché il vettore \underline{X} è bidimensionale mentre il vettore \underline{x} è tridimensionale, non è possibile trovare una relazione univoca tra \underline{x} ed \underline{X} e la particella cui la (4.37) si riferisce potrebbe trovarsi ovunque lungo il raggio principale che si estende dal punto sul piano immagine attraverso il centro della lente. In secondo luogo, poiché la (4.37) costituisce un sistema di due equazioni in tre incognite non è possibile ottenere in maniera univoca la soluzione $\Delta \underline{x}$ in termini di $\Delta \underline{X}$. Per quanto riguarda il primo problema, nel caso di misure PIV, è possibile risolverlo facendo alcune approssimazioni. Per quanto riguarda il secondo problema, come è stato più volte detto, esso si risolve effettuando misure con due telecamere.

Normalmente, lo spessore del fascio di luce laser è molto piccolo rispetto alla distanza d_o tra il piano oggetto e la lente e, talvolta, il campo di vista può essere piccolo rispetto alla stessa d_o . Ciò consente di fare le semplificazioni descritte di seguito. Considerando una misura PIV dello spostamento effettuata su di una finestra di interrogazione con centro \underline{X}_l sul piano immagine, una misura PIV ottenuta con la correlazione fornisce una misura del campo di velocità del fluido mediato sul volume di misura, costituito dall'intersezione della proiezione della finestra di interrogazione con lo spessore del fascio di luce laser. Il centro della finestra di interrogazione \underline{X}_l si

proietta su un punto del piano mediano del fascio laser di coordinate $\underline{x}_I \equiv (x_I, y_I, 0)$, con $\underline{X}_I = \underline{F}(\underline{x}_I)$. Poiché il punto \underline{x}_I è bidimensionale si può ottenere una relazione univoca tra \underline{X}_I ed \underline{x}_I risolvendo così il problema di ambiguità della posizione. La relazione del primo ordine tra lo spostamento sul piano immagine, $\Delta \underline{X}(\underline{X}_I)$, e lo spostamento sul piano si misura, $\Delta \underline{x}(\underline{x}_I)$, si ottiene con un'espansione in serie di Taylor della (4.36) di punto iniziale \underline{x}_I e mediando successivamente l'equazione sulla cella di interrogazione. Indicando con il simbolo $\bar{\cdot}$ la media sulle celle di interrogazione in \underline{x} e \underline{X} e, trascurando la variazione della matrice di ingrandimento sulla finestra di interrogazione¹⁹, si ottiene il seguente sistema di equazioni scritto sia in forma sintetica che in forma matriciale:

$$\overline{\Delta \underline{X}} = \underline{\underline{F}}(\underline{x}_I) \overline{\Delta \underline{x}} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \overline{\Delta X} \\ \overline{\Delta Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta x} \\ \overline{\Delta y} \\ \overline{\Delta z} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Se le distorsioni sono molto grandi, è possibile considerare nell'espansione in serie di Taylor i termini di ordine superiore al primo, ma per gli scopi del presente lavoro è sufficiente arrestare l'espansione al termine lineare. Nel caso si utilizzi una sola telecamera, come nel caso della PIV standard bidimensionale, si può chiudere il sistema trascurando l'effetto della prospettiva e riducendo il sistema ad un sistema di due equazioni in due incognite. Detta approssimazione è valida soltanto se i termini F_{13} ed F_{23} sono piccoli. Nel caso di proiezione perfettamente lineare, considerando l'espressione della matrice di ingrandimento nel punto \underline{x}_I :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{x}_I) = \frac{-d_I}{d_o} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_I/d_o \\ 0 & 1 & y_I/d_o \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

si ha che gli errori prospettici sono trascurabili se x_I ed y_I sono entrambi piccoli rispetto a d_o su tutto il campo di vista. Quando si verifica questa condizione, in letteratura si parla di registrazione parassiale. Nel caso di registrazione parassiale ci si aspetta quindi che gli errori prospettici siano piccoli anche in presenza di un'immagine distorta. Sfortunatamente, nelle tipiche condizioni di misura in laboratorio, la posizione x_I varia da -50mm a $+50\text{mm}$, mentre la distanza del piano oggetto è dell'ordine dei 500mm . Ciò comporta che le misure di velocità nel piano presentino un errore del 10% della componente di velocità ortogonale al piano di misura e, se l'ordine di grandezza di quest'ultima è paragonabile a quello delle componenti nel piano, si ottengono misure affette da errori del 10%. In tal caso, pertanto, è indispensabile effettuare misure PIV stereoscopiche.

Se si utilizza un sistema stereoscopico, occorre scrivere la relazione (4.36) per ciascuna delle telecamere c , ottenendo la relazione tra gli spostamenti di una particella:

$$\Delta \underline{X}^{(c)} = \underline{\underline{F}}^{(c)}(\underline{x} + \Delta \underline{x}) - \underline{\underline{F}}^{(c)}(\underline{x}), \quad (4.41)$$

con $c = 1, 2$. Mediante espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine ed effettuando la media sulla cella di interrogazione, in maniera analoga a quanto fatto per una singola telecamera, si trova la relazione tra lo spostamento sul piano immagine della telecamera c , $\Delta \underline{X}^{(c)}(\underline{X}_I)$, e lo spostamento nel piano oggetto $\Delta \underline{x}(\underline{x}_I)$:

$$\overline{\Delta \underline{X}}_I^{(c)} = \underline{\underline{F}}(\underline{x}_I) \overline{\Delta \underline{x}}_I. \quad (4.42)$$

La (4.42) costituisce un sistema di equazioni per ciascuna delle due telecamere. Scrivendo un sistema di equazioni completo, ottenuto accorpando i due sistemi, si ha:

$$\overline{\Delta \underline{X}}_A = (\nabla \underline{\underline{F}})_A \overline{\Delta \underline{x}}, \quad (4.43)$$

dove l'indice A denota il sistema di equazioni accorpate. Il sistema (4.43) in forma matriciale si scrive:

¹⁹ L'assunto che la matrice di ingrandimento rimanga costante sulla finestra di interrogazione è valida se le dimensioni della cella sono molto minori rispetto alla distanza del piano oggetto d_o .

$$\begin{pmatrix} \overline{\Delta X}^{(1)} \\ \overline{\Delta Y}^{(1)} \\ \overline{\Delta X}^{(2)} \\ \overline{\Delta Y}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^{(1)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\ F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\ F_{11}^{(2)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\ F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Delta x} \\ \overline{\Delta y} \\ \overline{\Delta z} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

La (4.44) costituisce il sistema operativo finale di equazioni per un apparato stereoscopico per misure PIV in presenza di distorsioni e, risolvendolo, è possibile calcolare il vettore spostamento nel piano oggetto una volta noti i vettori spostamento misurati dalle due telecamere. A dispetto della sua forma, il sistema (4.44) non è necessariamente sovradeterminato. Se non si commettono errori di misura, due delle equazioni sono dipendenti a causa dell'ottica. Se, ad esempio, si impone uno spostamento soltanto lungo la direzione z , la componente dello spostamento lungo y sarà la stessa per le due telecamere, mentre la componente lungo la direzione x sarà opposta. In questo modo la seconda e la quarta equazione risultano linearmente dipendenti e si possono eliminare sommandole. In generale, a causa degli errori casuali che ricorrono quando si effettua una misura, le due equazioni non sono perfettamente dipendenti. Nel caso generale in cui la ridondanza non è ovvia, è possibile ricavare una soluzione con il metodo dei minimi quadrati, minimizzando la norma quadratica Euclidea del residuo:

$$\mathcal{E} = \left| \overline{\Delta X}_A - (\nabla F)_A \overline{\Delta x} \right|^2. \quad (4.45)$$

Sulla base di quanto detto precedentemente, il problema principale consiste nel determinare la funzione di deformazione \underline{F} , ossia nel determinare in che modo le posizioni nel piano oggetto si proiettano nelle posizioni del piano immagine tenendo conto delle aberrazioni. Per fare ciò, analogamente a quanto detto per gli altri metodi, è necessario acquisire delle immagini di una griglia di calibrazione le cui posizioni sul piano oggetto siano note. La scelta del tipo di griglia è indispensabile per la riuscita dell'esperimento e, in generale, varia in base all'esperimento su cui si intende effettuare la misura. La griglia deve avere dei punti caratteristici in modo tale che dalla posizione di questi nel piano oggetto e nel piano immagine sia possibile calcolare la funzione di mappatura richiesta. I punti sono distribuiti uniformemente su di una griglia cartesiana e, la dimensione e la forma della griglia dipendono dalla sezione di prova. Per ottenere la massima accuratezza, è preferibile che i punti della griglia occupino l'intero campo di vista inquadrato dalle due telecamere. In generale due sono i parametri caratteristici di una griglia: il numero di punti e la spaziatura tra due punti consecutivi. Il numero di punti è proporzionale alle dimensioni della superficie di acquisizione, mentre le dimensioni delle celle della griglia sono inversamente proporzionali all'entità della deformazione nell'esperimento.

Idealmente, sarebbe auspicabile trovare una funzione di mappatura \underline{F} in grado di determinare senza errori la posizione \underline{X} sul piano immagine di ogni punto \underline{x} sul piano oggetto. Nella pratica, ci si accontenta di effettuare una stima della funzione con un'espressione analitica. Se le deformazioni non sono eccessive, si utilizza uno stimatore polinomiale multidimensionale con dipendenza cubica in x ed y , e dipendenza quadratica in z :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{F}}(\underline{x}) = & \underline{a}_0 + \underline{a}_1 x + \underline{a}_2 y + \underline{a}_3 z + \underline{a}_4 x^2 + \underline{a}_5 xy + \underline{a}_6 y^2 + \underline{a}_7 xz + \underline{a}_8 yz + \underline{a}_9 z^2 + \\ & \underline{a}_{10} x^3 + \underline{a}_{11} x^2 y + \underline{a}_{12} xy^2 + \underline{a}_{13} y^3 + \underline{a}_{14} x^2 z + \underline{a}_{15} xyz + \underline{a}_{16} y^2 z + \underline{a}_{17} xz^2 + \underline{a}_{18} yz^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

dove gli \underline{a}_i costituiscono i vettori dei coefficienti da determinare. Il metodo più semplice per ottenere i coefficienti si basa sul metodo dei minimi quadrati, la cui soluzione si determina minimizzando l'errore quadratico medio così definito:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{N_C} \sum_{\{\underline{x}_C\}} \left| \underline{F}(\underline{x}_C) - \hat{\underline{F}}(\underline{x}_C) \right|^2, \quad (4.47)$$

dove $\{\underline{x}_C\}$ rappresenta l'insieme dei punti della griglia ed N_C rappresenta il numero totale di punti della griglia. In presenza di forti distorsioni è preferibile utilizzare una spline interpolante per determinare polinomi locali. La scelta di una funzione cubica in x e y si basa soltanto su valuta-

zioni qualitative della deformazione dell'immagine. La scelta di una dipendenza quadratica rispetto alla variabile z , invece, deriva soltanto dalla limitazione matematica dovuta all'utilizzo di tre piani xy per la calibrazione. Generalizzando, se si effettua una calibrazione su quattro o più piani, è possibile introdurre nel polinomio termini in z di ordine superiore. Per i nostri scopi, tre piani, distanziati di una quantità paragonabile allo spessore del fascio di luce laser, sono ritenuti sufficienti. Occorre sottolineare che tre rappresenta il numero minimo di piani di calibrazione, per cui con l'espressione (4.46) è comunque possibile effettuare anche in questo caso una calibrazione su più piani. Per determinare la posizione dei punti della griglia sul piano immagine rispetto all'origine generalmente fissata nel punto in alto a sinistra, si possono utilizzare due metodi. Un primo metodo consiste nell'utilizzo del metodo PIV basato sulla mutua correlazione. In pratica, l'immagine della griglia ed un'immagine campione simile a quella presente sulla griglia sono correlate determinando così la deformazione dell'immagine. Un secondo metodo consiste nell'utilizzare, per punti di forma appropriata (di solito circolare), una stima della posizione basata sul baricentro locale. Per quanto riguarda i punti del piano oggetto, di solito, si utilizza come origine del sistema di riferimento un punto della griglia e, rispetto a questo, si calcolano le coordinate degli altri punti. In Figura 4.7 è riportato lo schema della procedura nel caso in cui si utilizzino due telecamere.

Dopo aver introdotto le principali problematiche connesse alla calibrazione, è ora possibile descrivere in maniera più dettagliata la procedura stereoscopica alla base di questo metodo. Il diagramma di flusso relativo alla procedura descritta è riportato in Figura 4.8, mentre i passi principali in cui si articola sono i seguenti:

1. Il primo passo, naturalmente consiste nell'allineamento delle telecamere in base alla condizione di Scheimpflug inquadrando una zona di misura in comune. Una volta acquisite le immagini della griglia di calibrazione per tutti e tre i piani, si determina la posizione dei punti della griglia sul piano immagine e sul piano oggetto come descritto.
2. Con le informazioni ottenute si possono determinare i valori dei coefficienti dell'equazione (4.46) per ciascuna delle due telecamere.

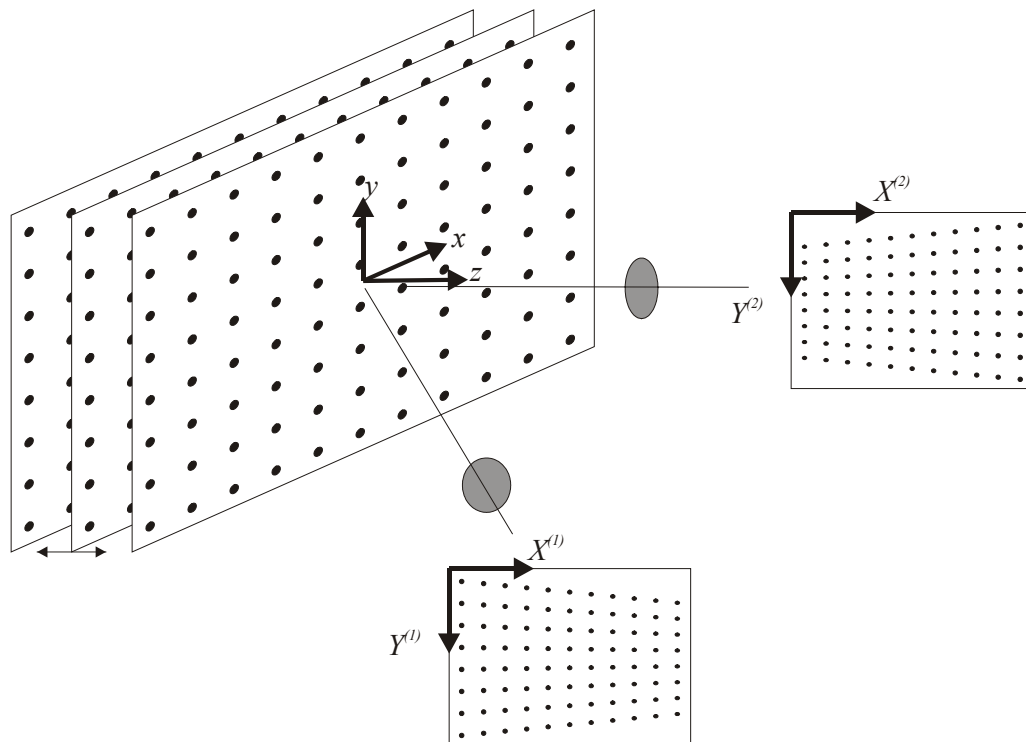


Figura 4.7 Schema della procedura di calibrazione stereoscopica per il metodo con mappatura tridimensionale. La funzione di mappatura è valida all'interno del volume descritto dallo spostamento della griglia lungo z .

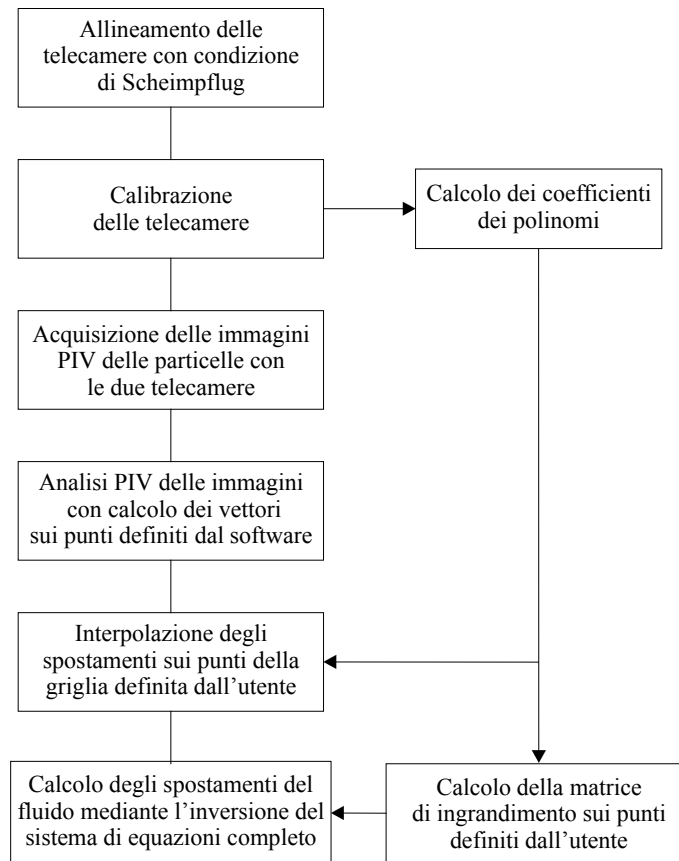


Figura 4.8 Diagramma di flusso della procedura PIV stereoscopica per il metodo con mappatura tridimensionale.

3. Dopo aver effettuato la calibrazione si procede normalmente con l'acquisizione delle immagini. Per ciascuna telecamera si esegue un processo di interrogazione PIV standard con il calcolo dei vettori spostamento nel piano immagine in corrispondenza delle posizioni $\{\underline{X}_I^{(c)}\}$ definite dal software di interrogazione.
4. Utilizzando una griglia di punti definita dall'utente nello spazio fisico $\{\underline{x}_g\}$, sulla quale sono richiesti i valori delle componenti effettive del vettore spostamento, si costruisce una nuova griglia di punti $\{\underline{X}_g^{(c)}\}$ sul piano immagine, facendo attenzione ad escludere i punti di bordo ed i punti che non sono in comune alle due telecamere. I vettori calcolati sull'insieme di punti $\{\underline{X}_I^{(c)}\}$ sono quindi interpolati sul nuovo insieme di punti $\{\underline{X}_g^{(c)}\}$.
5. Sui punti di griglia definiti dall'utente $\{\underline{x}_g\}$, in base ai valori dei vettori dei coefficienti della funzione di mappatura, si calcolano gli elementi della matrice di ingrandimento.
6. Risolvendo il sistema (4.44) con uno dei metodi noti dall'algebra lineare e, tenendo conto dell'intervallo tra i due impulsi del laser, si calcolano le componenti del vettore velocità sul piano oggetto in corrispondenza della griglia di punti $\{\underline{x}_g\}$.

4.3.3. Metodo con stima locale della deformazione

Il metodo, introdotto da Lawson e Wu (1997), si basa su di una calibrazione diretta effettuata per mezzo di un blocco di prova PIV sintetico e, assumendo come accettabile la linearità tra il piano oggetto ed il piano immagine ad una certa distanza, si utilizzano routine di calcolo semplificate. Anche in questo caso è necessario effettuare una calibrazione preliminare per tener conto delle distorsioni prospettiche. La procedura di calibrazione fornisce, in uscita su tutta l'immagine, una mappa della deformazione dell'immagine e dei coefficienti di calibrazione che sono collegati alla distorsione spaziale dell'immagine stessa. Una griglia di punti viene posta al centro del fascio laser, fissando un'origine sulla griglia in modo da fissare una zona di ripresa comune per le due telecamere. Le immagini della griglia sono utilizzate per determinare la deformazione delle co-

ordinate spaziali x ed y del piano oggetto. Invece, per ottenere i coefficienti di calibrazione, si registrano due immagini di un blocco di prova traslate lungo i tre assi l'una rispetto all'altra e si utilizzano gli algoritmi di calcolo della mutua correlazione. Il blocco è costituito da sfere di vetro immerse in ardelite solida ed è illuminato dal laser.

La procedura di calcolo delle componenti reali del flusso, il cui schema è illustrato in Figura 4.9, si può suddividere sostanzialmente in tre parti, ciascuna delle quali utilizza semplici algoritmi di correlazione ed interpolazione. Le prime due parti riguardano la procedura di calibrazione, la terza concerne il calcolo delle tre componenti dello spostamento. La semplicità degli algoritmi, come già accennato è legata all'ipotesi di linearità tra piano oggetto e piano immagine ed al disaccoppiamento delle caratteristiche lungo i tre assi.

Con la prima routine, utilizzando le immagini della griglia registrate dalle due telecamere, per ciascuna di esse è possibile determinare le funzioni di deformazione delle coordinate x , y dei punti nel piano oggetto in quelle in pixel X , Y nel piano immagine, cioè $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$ e $X_2(x, y)$, $Y_2(x, y)$. Queste funzioni si ottengono calcolando la posizione degli $M_g \times N_g$ punti della griglia su ogni punto delle immagini corrispondenti di coordinate (X_1^i, Y_1^j) e (X_2^i, Y_2^j) e, successivamente, effettuando una interpolazione spline bicubica; con i, j si sono indicati gli indici di riga e colonna della griglia. La posizione x, y nello spazio fisico è determinata, come al solito, a partire dal numero e dalla spaziatura di punti della griglia. In questo modo è possibile calcolare le posizioni nel piano immagine X_1, Y_1 e X_2, Y_2 a partire dalla posizione nello spazio fisico x, y e viceversa.

La seconda routine è utilizzata per la stima delle funzioni dei coefficienti di calibrazione x, y e z a partire dalle immagini PIV registrate. Per ottenere i coefficienti si calcolano, su una griglia di punti i, j del piano immagine con spaziatura uniforme, le funzioni di mutua correlazione delle coppie di immagini che, per ciascuna delle telecamere sono date da:

$$R_1(\xi, \eta)_{i,j} = \iint I_1'(X_1, Y_1)_{i,j} I_1''(X_1 - \xi, Y_1 - \eta)_{i,j} dX_1 dY_1, \quad (4.48)$$

$$R_2(\xi, \eta)_{i,j} = \iint I_2'(X_2, Y_2)_{i,j} I_2''(X_2 - \xi, Y_2 - \eta)_{i,j} dX_2 dY_2, \quad (4.49)$$

dove I_1', I_2' e I_1'', I_2'' sono le immagini rispettivamente della prima e della seconda esposizione nella regione di interrogazione. I dati per effettuare la calibrazione lungo le direzioni x e z si ottengono dalle componenti lungo X del vettore calcolati con la funzione di mutua correlazione ed indicati con $R_1(\xi, 0)_{i,j}$ e $R_2(\xi, 0)_{i,j}$. Per la calibrazione lungo la direzione y si utilizzano, invece, le componenti del vettore lungo Y , $R_1(0, \eta)_{i,j}$ e $R_2(0, \eta)_{i,j}$. Per ottenere le funzioni dei coefficienti di calibrazione lungo gli assi x, y e z , le componenti del vettore della correlazione sono opportunamente convertite in quantità aventi le dimensioni di pixel mm^{-1} per ciascun punto della griglia (X_1^i, Y_1^j) e (X_2^i, Y_2^j) mediante le relazioni:

$$a_1(X_1^i, Y_1^j) = \frac{R_1(\xi, 0)_{i,j}}{\Delta x_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}}, \quad a_2(X_2^i, Y_2^j) = \frac{R_2(\xi, 0)_{i,j}}{\Delta x_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}} \quad (4.50)$$

$$b_1(X_1^i, Y_1^j) = \frac{R_1(0, \eta)_{i,j}}{\Delta y_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}}, \quad b_2(X_2^i, Y_2^j) = \frac{R_2(0, \eta)_{i,j}}{\Delta y_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}} \quad (4.51)$$

$$c_1(X_1^i, Y_1^j) = \frac{R_1(0, \eta)_{i,j}}{\Delta y_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}}, \quad c_2(X_2^i, Y_2^j) = \frac{R_2(0, \eta)_{i,j}}{\Delta y_{cal}} \bigg|_{j=1, N_{cal}}^{i=1, M_{cal}} \quad (4.52)$$

dove M_{cal}, N_{cal} sono le dimensioni della griglia di punti per il calcolo dei coefficienti a, b e c e $\Delta x_{cal}, \Delta y_{cal}$ e Δz_{cal} sono gli spostamenti del blocco di prova PIV lungo le direzioni x, y e z rispettivamente. Anche in questo caso, per mezzo di un'interpolazione spline bicubica, si ottengono le funzioni dei coefficienti di calibrazione $a_1(X_1, Y_1)$, $a_2(X_2, Y_2)$, $b_1(X_1, Y_1)$, $b_2(X_2, Y_2)$ e $c_1(X_1, Y_1)$, $c_2(X_2, Y_2)$ che consentono di calcolare i coefficienti di calibrazione lungo x, y e z in corrispon-

denza di qualsiasi posizione sull'immagine valutata in pixel.

La terza routine è utilizzata per calcolare le tre componenti del campo di moto effettivo del flusso a partire dalle immagini PIV delle particelle del flusso. Le immagini sono analizzate con le procedure di interrogazione PIV standard, le quali forniscono, in uscita, le componenti bidimensionali del campo di spostamento sul piano immagine di ciascuna delle due telecamere, $\Delta X_1(X_1^i, Y_1^j)$, $\Delta Y_1(X_1^i, Y_1^j)$ e $\Delta X_2(X_2^i, Y_2^j)$, $\Delta Y_2(X_2^i, Y_2^j)$, calcolate su di una griglia con spaziatura uniforme e date da:

$$\Delta X_1(X_1^i, Y_1^j) = R_1(\xi, 0) \Big|_{i,j}^{i=1, M_f, j=1, N_f}, \quad \Delta Y_1(X_1^i, Y_1^j) = R_1(0, \eta) \Big|_{i,j}^{i=1, M_f, j=1, N_f} \quad (4.53)$$

$$\Delta X_2(X_2^i, Y_2^j) = R_2(\xi, 0) \Big|_{i,j}^{i=1, M_f, j=1, N_f}, \quad \Delta Y_2(X_2^i, Y_2^j) = R_2(0, \eta) \Big|_{i,j}^{i=1, M_f, j=1, N_f} \quad (4.54)$$

dove M_f ed N_f sono le dimensioni della griglia nello spazio fisico del flusso. Ancora una volta, con un'interpolazione bicubica di tipo spline si ottengono le funzioni di spostamento $\Delta X_1(X_1, Y_1)$, $\Delta Y_1(X_1, Y_1)$ e $\Delta X_2(X_2, Y_2)$, $\Delta Y_2(X_2, Y_2)$ che consentono di calcolare il valore dello spostamento in corrispondenza di ogni punto del piano immagine. A partire dalle funzioni di spostamento e dalle funzioni dei coefficienti di calibrazione è possibile effettuare una stima delle tre componenti dello spostamento (Δx , Δy , Δz) in ciascun punto (x_i, y_j) del piano di misura, utilizzando le formule di ricostruzione stereoscopica²⁰:

$$\Delta x(x_i, y_j) = \frac{b_2(X_2^i, Y_2^j)\Delta X_1(X_1^i, Y_1^j) - b_1(X_1^i, Y_1^j)\Delta X_2(X_2^i, Y_2^j)}{a_1(X_1^i, Y_1^j)b_2(X_2^i, Y_2^j) - a_2(X_2^i, Y_2^j)b_1(X_1^i, Y_1^j)}, \quad (4.55)$$

$$\Delta y(x_i, y_j) = \frac{c_1(X_1^i, Y_1^j)\Delta Y_1(X_1^i, Y_1^j) + c_2(X_2^i, Y_2^j)\Delta Y_2(X_2^i, Y_2^j)}{2}, \quad (4.56)$$

$$\Delta z(x_i, y_j) = \frac{a_2(X_2^i, Y_2^j)\Delta X_1(X_1^i, Y_1^j) - a_1(X_1^i, Y_1^j)\Delta X_2(X_2^i, Y_2^j)}{a_2(X_2^i, Y_2^j)b_1(X_1^i, Y_1^j) - a_1(X_1^i, Y_1^j)b_2(X_2^i, Y_2^j)}, \quad (4.57)$$

dove le coordinate sul piano immagine (X_1^i, Y_1^j) e (X_2^i, Y_2^j) sono calcolate mediante le funzioni di deformazione X, Y :

$$X_1^i = X_1(x_i, y_j), \quad Y_1^j = Y_1(x_i, y_j), \quad X_2^i = X_2(x_i, y_j) \quad \text{e} \quad Y_2^j = Y_2(x_i, y_j). \quad (4.58)$$

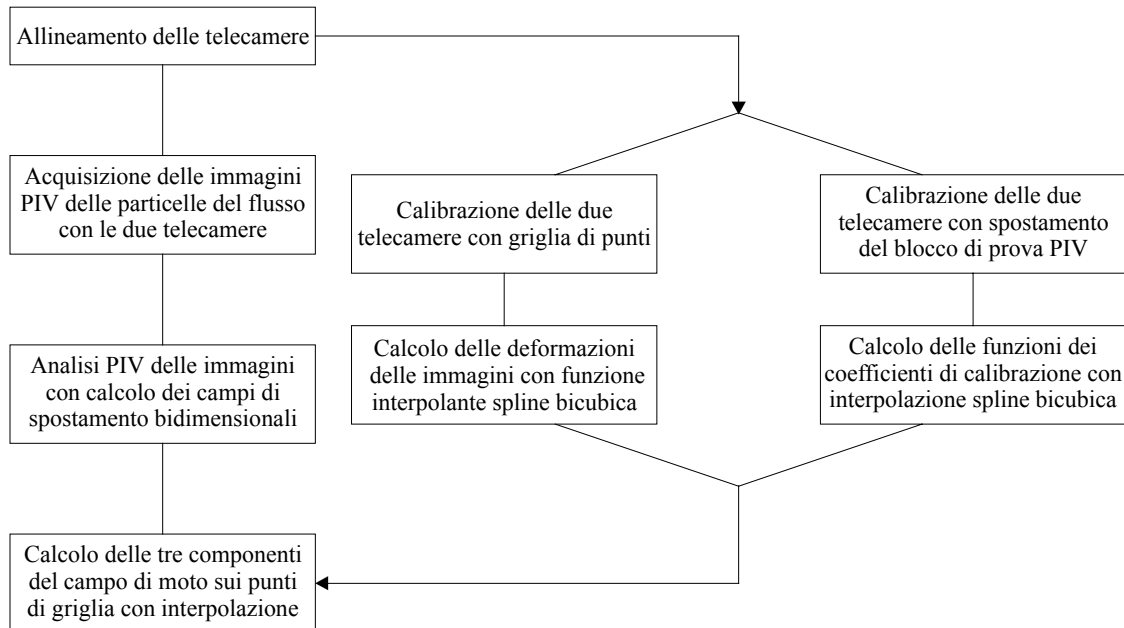


Figura 4.9 Schema della procedura PIV stereoscopica per il metodo con stima locale della deformazione.

²⁰ Le formule di ricostruzione stereoscopica riportate (4.55)-(4.57) saranno ricavate nel paragrafo successivo.

4.4. Analisi dell'errore nelle tecniche PIV stereoscopiche

Allo scopo di determinare l'errore commesso nella misura delle tre componenti del campo di moto è indispensabile effettuare un'analisi accurata dell'errore per i vari tipi di configurazione stereoscopica. Per tale ragione, di seguito è riportata un'analisi abbastanza accurata condotta da Lawson e Wu (1997).

4.4.1. Derivazione delle formule teoriche dell'errore

Con riferimento alla Figura 4.10, si consideri il caso generale in cui due telecamere, indicate con il generico indice $j = 1, 2$, inquadrano un oggetto comune nel fluido in cui sia fissato un sistema di riferimento di coordinate (x, y, z) ed origine O e si indichino con (X_j, Y_j) le coordinate del piano immagine. Si assuma che gli assi ottici delle due telecamere siano distanti dall'origine O una quantità h_j valutata lungo l'asse x e, inoltre, siano ruotati di un angolo α_j rispetto all'asse z . Se entrambe le lenti delle telecamere hanno le stesse distanze d_o e d_i dal piano oggetto e dal piano immagine rispettivamente, allora la posizione di una particella che si sia mossa nel piano di misura è data da:

$$X_j = -M_j x'_j, \quad Y_j = -M_j y'_j \quad (4.59)$$

dove il fattore di ingrandimento M_j è dato da:

$$M_j = \frac{d_i}{d_o - z'_j} \quad (4.60)$$

e x'_j, y'_j, z'_j sono le coordinate del piano parallelo al piano immagine mostrato in Figura 4.10 e sono legate alle coordinate del piano oggetto dalle relazioni:

$$x'_j = -z \sin \alpha_j + (x - h_j) \cos \alpha_j \quad (4.61)$$

$$y'_j = y \quad (4.62)$$

$$z'_j = z \cos \alpha_j + (x - h_j) \sin \alpha_j. \quad (4.63)$$

Differenziando le (4.59) rispetto ad x, y e z si ottengono le relazioni tra lo spostamento della particella $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ e gli spostamenti delle particelle sul piano immagine $(\Delta X_j, \Delta Y_j)$:

$$\Delta X_j = \frac{\partial X_j}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial X_j}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial X_j}{\partial z} \Delta z \quad (4.64)$$

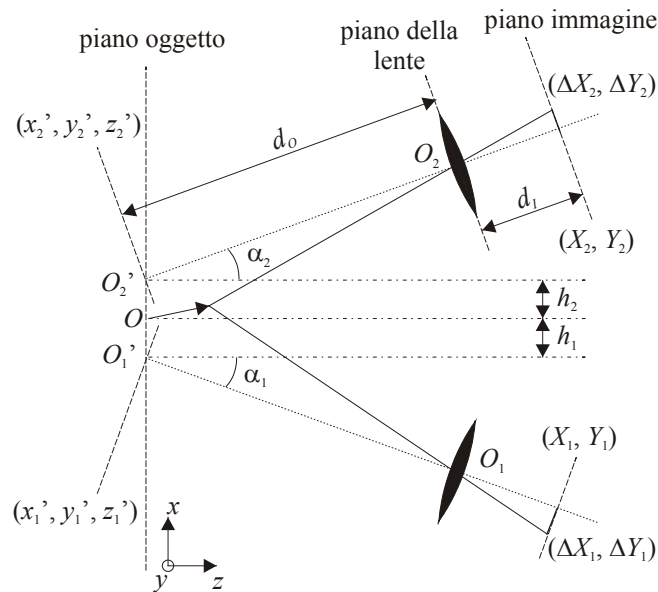


Figura 4.10 Schema di una configurazione stereoscopica generale.

$$\Delta Y_j = \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Y_j}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Y_j}{\partial z} \Delta z. \quad (4.65)$$

Se si assume che la configurazione sia simmetrica, cioè $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = +\alpha$, $h_1 = -h$ e $h_2 = +h$, sostituendo le (4.61)-(4.63) nelle (4.59), è possibile riscrivere le (4.64) e (4.65) in termini di x , y e z ottenendo:

$$\Delta X_1 = a_1 \Delta x + b_1 \Delta z \quad (4.66)$$

$$\Delta Y_1 = -M_1 \left(\Delta y + \frac{y}{d_{o1}} (\Delta x \sin \alpha + \Delta z \cos \alpha) \right) \quad (4.67)$$

$$\Delta X_2 = a_2 \Delta x + b_2 \Delta z \quad (4.68)$$

$$\Delta Y_2 = -M_2 \left(\Delta y - \frac{y}{d_{o2}} (\Delta x \sin \alpha - \Delta z \cos \alpha) \right), \quad (4.69)$$

dove

$$d_{o1} = d_o - z \cos \alpha - (x - h) \sin \alpha, \quad (4.70)$$

$$d_{o2} = d_o - z \cos \alpha + (x + h) \sin \alpha, \quad (4.71)$$

$$M_1 = d_l / d_{o1} \text{ e } M_2 = d_l / d_{o2} \quad (4.72)$$

ed i coefficienti a_1 , a_2 , b_1 e b_2 sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$a_1 = -M_1 \cos \alpha + \left(\frac{M_1 \sin \alpha}{d_{o1}} \right) [z \sin \alpha - (x - h) \cos \alpha] \quad (4.73)$$

$$a_2 = -M_2 \cos \alpha + \left(\frac{M_2 \sin \alpha}{d_{o2}} \right) [z \sin \alpha + (x + h) \cos \alpha] \quad (4.74)$$

$$b_1 = M_1 \sin \alpha + \left(\frac{M_1 \cos \alpha}{d_{o1}} \right) [z \sin \alpha - (x - h) \cos \alpha] \quad (4.75)$$

$$b_2 = -M_2 \sin \alpha - \left(\frac{M_2 \cos \alpha}{d_{o2}} \right) [z \sin \alpha + (x + h) \cos \alpha]. \quad (4.76)$$

Risolvendo le equazioni (4.66)-(4.69) rispetto a $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ si ottengono le formule di ricostruzione stereoscopica basate sull'ottica geometrica:

$$\Delta x = \frac{b_2 \Delta X_1 - b_1 \Delta X_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (4.77)$$

$$\Delta y = -\frac{1}{M_1 + M_2} \left\{ \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + y \left[\left(\frac{M_1}{d_{o1}} + \frac{M_2}{d_{o2}} \right) \Delta z \cos \alpha - \left(\frac{M_2}{d_{o2}} - \frac{M_1}{d_{o1}} \right) \Delta x \sin \alpha \right] \right\} \quad (4.78)$$

$$\Delta z = \frac{a_2 \Delta X_1 - a_1 \Delta X_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}. \quad (4.79)$$

Infine, dividendo le (4.77)-(4.79) per l'intervallo di tempo Δt tra le due esposizioni è possibile calcolare le tre componenti del vettore velocità.

Nel seguito saranno analizzati gli errori nelle due configurazioni stereoscopiche più comunemente utilizzate, ossia la configurazione del metodo con traslazione e quella del metodo con spostamento angolare. Si assume che le incertezze nella misura delle grandezze α , h , d_o e d_l siano trascurabili e che gli errori sugli spostamenti nel piano immagine $(\Delta X_1, \Delta Y_1)$ e $(\Delta X_2, \Delta Y_2)$ siano uguali in maniera da avere:

$$\delta(\Delta X_j) = \delta(\Delta Y_j) = \delta(\Delta X) \quad (4.80)$$

per $j = 1, 2$ dove il simbolo $\delta(\)$ rappresenta l'errore per una data variabile. Utilizzando il metodo standard di analisi degli errori e le (4.77)-(4.79), le incertezze nella misura degli spostamenti nel

piano oggetto Δx , Δy , Δz sono date da:

$$\delta(\Delta x) = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} \delta(\Delta X) \quad (4.81)$$

$$\delta(\Delta y) = \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \right) \delta(\Delta X) \quad (4.82)$$

$$\delta(\Delta z) = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|a_2 b_1 - a_1 b_2|} \delta(\Delta X) \quad (4.83)$$

dove i coefficienti c_1 , c_2 e c_3 sono definiti dalle:

$$c_1 = -\frac{2}{M_1 + M_2} \quad (4.84)$$

$$c_2 = -\frac{y \cos \alpha}{M_1 + M_2} \left[\left(\frac{M_1}{d_{o1}} + \frac{M_2}{d_{o2}} \right) \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right] \quad (4.85)$$

$$c_3 = \frac{y \sin \alpha}{M_1 + M_2} \left[\left(\frac{M_2}{d_{o2}} - \frac{M_1}{d_{o1}} \right) \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right]. \quad (4.86)$$

Dalle relazioni (4.81)-(4.86) è possibile effettuare una stima individuale degli errori nel piano oggetto $\delta(\Delta x)$, $\delta(\Delta y)$ e $\delta(\Delta z)$, un'analisi più generale, però, può essere effettuata prendendo in considerazione i parametri adimensionali definiti dal rapporto tra gli errori delle singole componenti. Questi parametri possono essere utilizzati per analizzare l'accuratezza relativa dell'errore di una data componente del sistema. Considerando che l'obiettivo di un sistema di PIV stereoscopica è la misura della componente ortogonale al piano di misura, una valida misura dell'accuratezza del sistema può essere fornita dal rapporto tra l'incertezza di misura lungo la direzione normale al piano e l'errore di misura nel piano. Pertanto, ai fini dell'analisi delle incertezze, verrà considerato il rapporto tra l'errore normale al piano e l'errore nel piano, ossia la quantità e_r denominata rapporto degli errori che, per ogni valore di x , y e z , ha la seguente espressione:

$$e_r = \frac{\delta(\Delta z)}{\delta(\Delta x)} \bigg|_{x,y,z} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \quad (4.87)$$

4.4.2. Analisi degli errori

È ora possibile effettuare un'analisi degli errori per le due configurazioni descritte nel paragrafo precedente. Nel caso del metodo con traslazione, essendo $\alpha = 0$ ed assumendo che le due telecamere siano identiche, ne consegue che $M_1 = M_2 = M$ e $d_{o1} = d_{o2} = d_o$ da cui, in base alla (4.87) si ha:

$$e_r = \frac{1}{\sqrt{(x/d_o)^2 + (x/d_o)^2}} \bigg|_{x,y,z}. \quad (4.88)$$

Dalla (4.88) si deduce che il rapporto degli errori è indipendente da y e da z , ma varia in funzione di x . Al centro del campo di misura in cui $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, l'espressione del rapporto degli errori diventa:

$$e_r = \frac{1}{(h/d_o)} \bigg|_{x=0,y=0,z=0}. \quad (4.89)$$

L'espressione (4.89) è diagrammata in Figura 4.11 e può essere utilizzata come linea guida iniziale nella progettazione di un sistema di PIV stereoscopica nel metodo con traslazione. Il diagramma è riportato soltanto nell'intervallo di valori 0.1-1 di h/d_o .

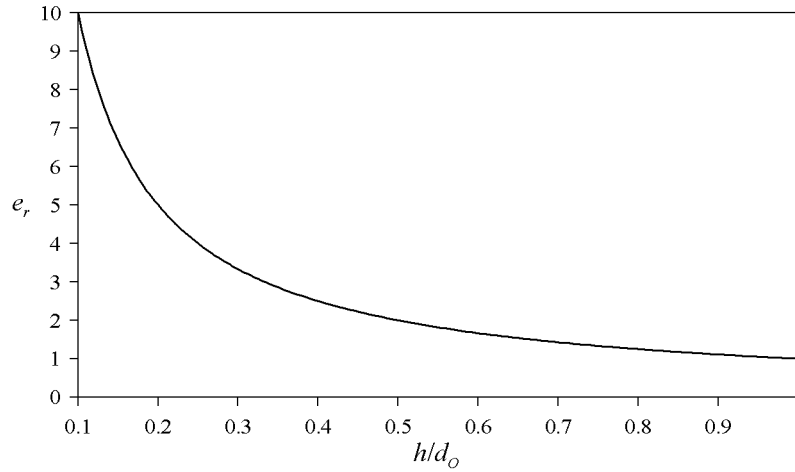


Figura 4.11 Andamento del rapporto degli errori nel metodo con traslazione al centro del campo di misura ($x = 0, y = 0, z = 0$).

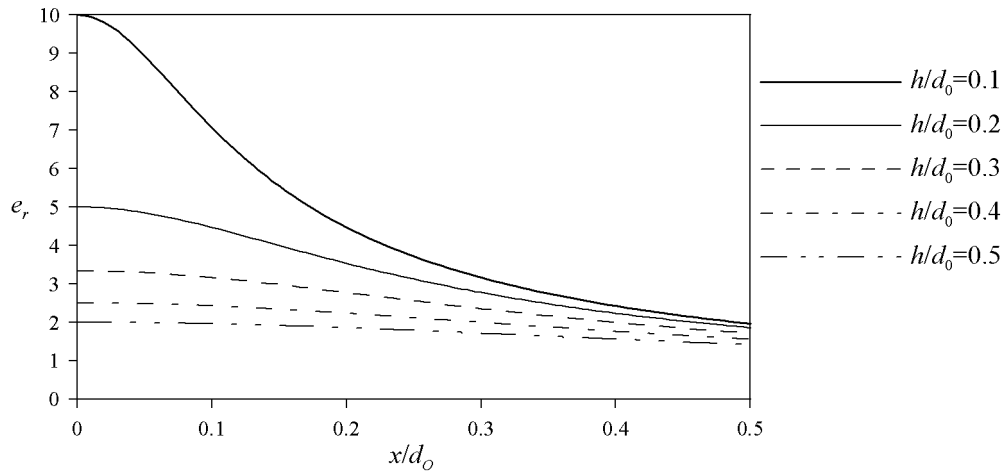


Figura 4.12 Andamento del rapporto degli errori in funzione della distanza dal centro del campo di misura per diversi valori del rapporto h/d_o e per $y = 0, z = 0$.

L'espressione del rapporto degli errori, per posizioni non coincidenti con il centro del piano di misura, è più complessa ed è riportata in Figura 4.12 per valori di x/d_o nell'intervallo 0-0.5 e per diversi valori di h/d_o . I digrammi mostrano chiaramente che il rapporto degli errori diminuisce rapidamente allontanandosi dal centro del campo. La riduzione di e_r è dovuta all'aumento dell'angolo di vista effettivo in corrispondenza delle posizioni lontane dall'asse ottico. L'aumento dell'angolo di vista provoca un incremento delle componenti dello spostamento nel piano immagine ΔX_1 e ΔX_2 per un dato spostamento della particella; ciò comporta una migliore stima di Δz e, di conseguenza, una riduzione del valore di e_r .

Se si analizza l'accuratezza della misura nel caso del metodo con spostamento angolare, ipotizzando che le telecamere siano identiche, si ha che $h = 0, M_1 = M_2 = M$ e $d_{O1} = d_{O2} = d_o$ e la relazione del rapporto degli errori (4.87) diventa:

$$e_r = \frac{\left\{ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \left[2(z/d_o) \cos \alpha + (z/d_o)^2 \sin^2 \alpha + (x/d_o)^2 \cos^2 \alpha \right] \right\}^{1/2}}{\sin \alpha \left[1 + 2(z/d_o) \cos \alpha + (z/d_o)^2 \sin^2 \alpha + (x/d_o)^2 \cos^2 \alpha \right]^{1/2}} \Big|_{x,y,z} \quad (4.90)$$

Questo risultato è molto più complesso rispetto al metodo con traslazione descritto dall'equazione (4.88), avendosi una dipendenza del rapporto degli errori oltre che da x anche da z e da α . Al centro del campo di misura in cui $x = 0, y = 0, z = 0$, però, la relazione si semplifica notevolmente, riducendosi all'espressione:

$$e_r = \frac{1}{\tan \alpha} \Big|_{x=0,y=0,z=0} \quad (4.91)$$

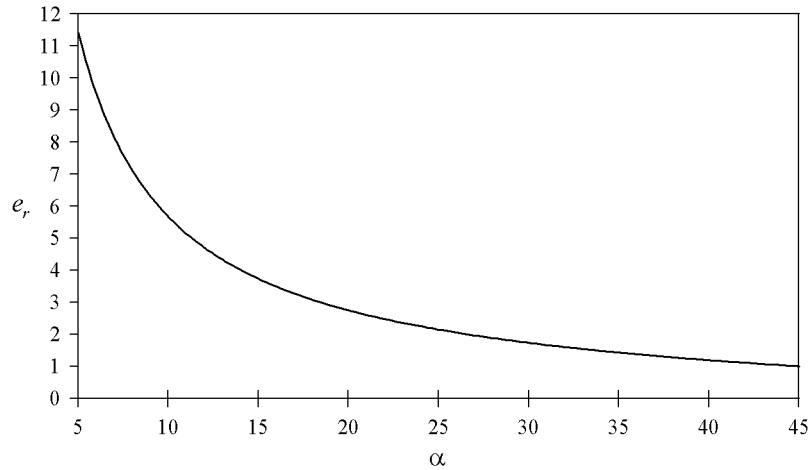


Figura 4.13 Andamento del rapporto degli errori in funzione dell'angolo nel metodo con spostamento angolare al centro del campo di misura ($x = 0, y = 0, z = 0$).

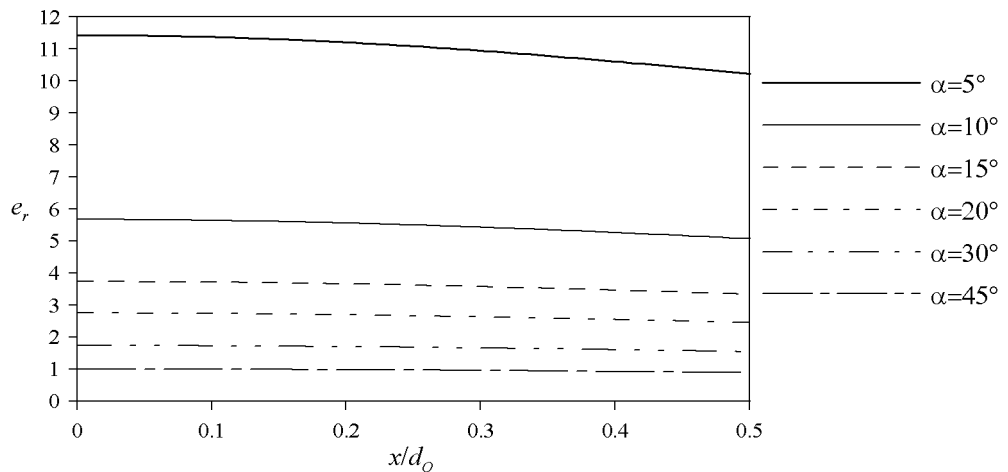


Figura 4.14 Andamento del rapporto degli errori in funzione della distanza dal centro del campo di misura per diversi valori dell'angolo α e per $y = 0, z = 0$.

Quest'ultima relazione, diagrammata in Figura 4.13, ha un andamento simile a quello ottenuto nel metodo con traslazione mostrato in Figura 4.11 e può comunque essere utilizzata come linea guida iniziale nella progettazione di un sistema di PIV stereoscopica nel metodo con spostamento angolare. In Figura 4.14 è mostrato l'andamento del rapporto degli errori per valori di x/d_o nell'intervallo 0-0.5 e per diversi valori di α . Analogamente al sistema traslazionale, i risultati evidenziano un andamento di e_r decrescente allontanandosi dal centro del campo di vista, anche se la riduzione non è significativa. Questa differenza di comportamento nel metodo con spostamento angolare è imputabile alla rotazione dell'asse della lente, la quale riduce la variazione dell'angolo di vista effettivo lungo il campo inquadrato delle due telecamere. Di conseguenza, per uno spostamento costante delle particelle, si ottengono piccole variazioni nei valori ΔX_1 e ΔX_2 lungo il piano immagine e, perciò, il miglioramento nella stima di Δz ed e_r è minore.

Nell'analisi effettuata finora non si è tenuto conto di fattori importanti che condizionano l'accuratezza della misura quali l'aberrazione delle lenti, la potenza del laser e la corrispondenza tra le immagini. Pertanto, è indispensabile una breve analisi dei suddetti problemi che è valida nell'ipotesi in cui si utilizzino tecniche di correlazione per la stima dello spostamento delle particelle.

Dall'analisi degli errori si è visto che, per ottenere valori accettabili del rapporto tra gli errori, sono richieste valori elevati della distanza o dell'angolo tra le telecamere. Per esempio, per ottenere un rapporto dell'errore sulla linea centrale $e_r = 2$, sono richiesti o una distanza tra le telecamere $h/d_o = 0.5$ ($\alpha = 0$) oppure un angolo tra le telecamere $\alpha = 26.6^\circ$ ($h = 0$). Queste geometrie,

però, provocano elevate aberrazioni delle lenti quali coma, astigmatismo e distorsioni ottiche e limitano il valore massimo dell'angolo e/o la distanza tra le telecamere e, di conseguenza, l'accuratezza nella misura di Δz . Come è stato già detto, questi effetti si possono ridurre utilizzando piccole aperture e lenti piane con grandi distanze focali. Inoltre, per migliorare la qualità dell'immagine si ricorre alla rotazione del piano del sensore (condizione di Scheimpflug) o all'utilizzo di prismi liquidi se si è in presenza di interfaccia liquido-aria. L'utilizzo di piccole aperture dell'obiettivo presenta lo svantaggio di utilizzare potenze laser maggiori rispetto alle misure di PIV con due componenti. A causa dei limiti nell'apertura e nella potenza dei laser, nel caso dei sistemi traslazionali, è difficile ottenere rapporti degli errori $e_r < 2$. Per tale ragione è preferibile utilizzare un sistema angolare con condizione di Scheimpflug e correzione degli errori prospettici secondo quanto visto nei paragrafi precedenti; utilizzando la stessa potenza del laser, si ottiene così un miglioramento nell'accuratezza della misura.

5. ERRORI DI ALLINEAMENTO NELLE MISURE STEREO-SCOPICHE

Nel descrivere le tecniche di misura stereoscopiche maggiormente utilizzate, si è accennato ad una delle principali fonti di errore che ricorre in ciascuno dei metodi descritti nel capitolo precedente e che è costituita dal non perfetto allineamento tra il piano della griglia, in cui è fatta la calibrazione, ed il piano di misura, che è illuminato dal fascio di luce laser. In questo capitolo ci si propone di analizzare più in dettaglio gli effetti degli errori sistematici indotti dal mancato allineamento dei suddetti piani. L'analisi teorica dell'errore, per semplicità, sarà effettuata soltanto nel caso di una disposizione simmetrica delle telecamere. Inoltre, per comprendere meglio l'influenza degli errori di allineamento, si studieranno separatamente gli errori nel caso di campi di moto uniformi da quelli relativi ai campi di moto con gradienti di velocità. Alla fine del capitolo, alla luce di quanto esposto, sarà proposta una tecnica per la correzione degli errori di allineamento per ciascuno dei metodi analizzati nel presente lavoro.

5.1. Campo di moto uniforme

Al fine di facilitare la comprensione dell'analisi degli errori, è necessario considerare separatamente gli errori dovuti ad una traslazione del piano di misura rispetto a quello di calibrazione da quelli dovuti alla rotazione del primo rispetto al secondo. Una volta analizzati singolarmente i suddetti casi, l'estensione dei risultati per un generico errore di allineamento diventa banale.

5.1.1. Traslazione del piano di misura

Per ricavare le relazioni geometriche dell'errore di allineamento, occorre considerare come variano le componenti misurate dalle due telecamere al variare della posizione nello spazio del piano di misura rispetto al piano di calibrazione. Nel capitolo precedente si sono ricavate le relazioni tra le componenti del campo di spostamento effettivo e le proiezioni misurate con le due telecamere, ottenendo le espressioni²¹:

$$u = \frac{B(u_s + u_d) + x_p(u_d - u_s)}{2B + u_s - u_d} \quad (5.1)$$

$$v = \frac{y_p(u_d - u_s) + 2Bv_s}{2B + u_s - u_d} = \frac{y_p(u_d - u_s) + 2Bv_d}{2B + u_s - u_d} \quad (5.2)$$

$$w = H \frac{u_s - u_d}{2B + u_s - u_d}. \quad (5.3)$$

Risolvendo il sistema di equazioni (5.1)-(5.3) rispetto alle componenti di spostamento misurate dalle due telecamere, con banali passaggi, si ricava:

$$u_s = \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} \quad (5.4)$$

$$u_d = \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w} \quad (5.5)$$

$$v_s = v_d = \frac{Hv + y_p w}{H - w}. \quad (5.6)$$

Con riferimento alla Figura 5.1, siano π e π' il piano di calibrazione ed il piano di misura effettivo traslati di $-\Delta z$ l'uno rispetto all'altro e sia P un punto generico del piano di calibrazione. A causa della traslazione del piano di misura, sul piano dell'immagine della telecamera di sini-

²¹ In questo capitolo sarà adottata, per quanto possibile, la stessa simbologia utilizzata nel capitolo precedente. Pertanto, al fine di evitare inutili ripetizioni, ove non sia esplicitamente indicato, si assumerà per le grandezze utilizzate lo stesso significato già introdotto precedentemente.

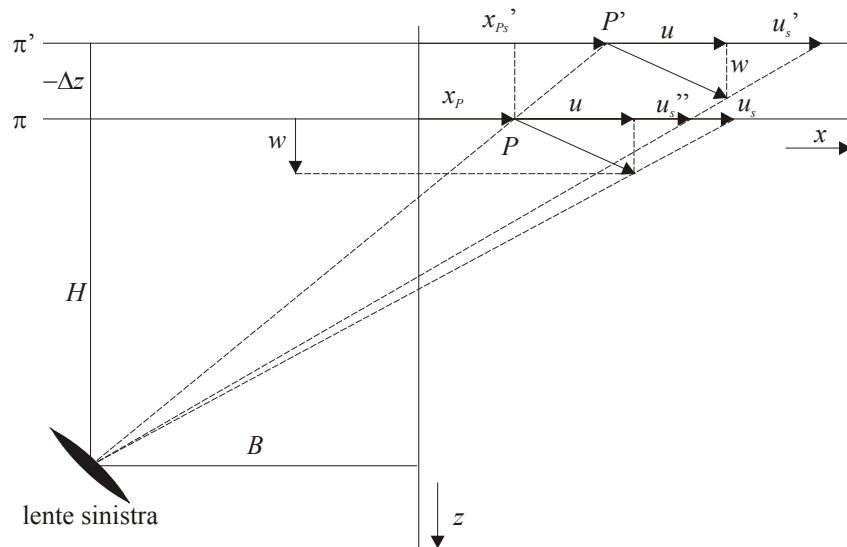


Figura 5.1 Rappresentazione schematica per il calcolo della proiezione della componente orizzontale dello spostamento sulla telecamera sinistra in corrispondenza di una traslazione del piano di misura.

stra si proietterà il vettore che occupa nello spazio fisico la posizione P' ed ha come proiezione sul piano π' la componente u_s' . Poiché la calibrazione è stata effettuata nel piano π , la telecamera di sinistra, però, misura una proiezione dello spostamento pari a u_s'' che è minore sia di u_s che di u_s' . Ipotizzando che il vettore spostamento in P' coincida con quello presente in P , è possibile calcolare agevolmente l'espressione di u_s'' . Utilizzando la similitudine tra i triangoli mostrati nella figura, si possono scrivere i seguenti rapporti:

$$\frac{x'_{ps} - x_p}{-\Delta z} = \frac{B + x_p}{H} \quad (5.7)$$

$$\frac{B + x'_{p_s} + u'_s}{H - \Delta z} = \frac{u'_s - u}{w} = \frac{B + x_p + u''_s}{H}. \quad (5.8)$$

Dalla (5.7) si può ricavare l'espressione dell'ascissa del punto P' :

$$x'_{p_s} = x_p - \Delta z \frac{(B + x_p)}{H}, \quad (5.9)$$

dai primi due rapporti nella (5.8) si ottiene l'espressione di u_s' in funzione dei parametri geometrici e del vettore spostamento effettivo:

$$u'_s = \frac{u(H - \Delta z) + w(B + x'_{Ps})}{H - \Delta z - w}. \quad (5.10)$$

Dall'ultima uguaglianza nella (5.8), tenendo conto delle (5.9) e (5.10), segue l'espressione ricercata per la componente u_s'' :

$$\begin{aligned}
 u_s'' &= \frac{H}{w} (u_s' - u) - (B + x_p) = \frac{H \left[\frac{u(H - \Delta z) + w(B + x_{ps}')}{H - \Delta z - w} - u \right] - w(B + x_p)}{w} = \\
 &= \frac{H[u(H - \Delta z) + w(B + x_{ps}') - u(H - \Delta z - w)] - w(B + x_p)(H - \Delta z - w)}{w(H - \Delta z - w)} = \\
 &= \frac{H \left[B + x_p - \Delta z \frac{(B + x_p)}{H} + u \right] - (B + x_p)(H - \Delta z - w)}{H - \Delta z - w} = \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w}. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Ricordando la (5.4), la relazione appena ricavata si può scrivere in una forma che risulterà utile nel prosieguo della trattazione:

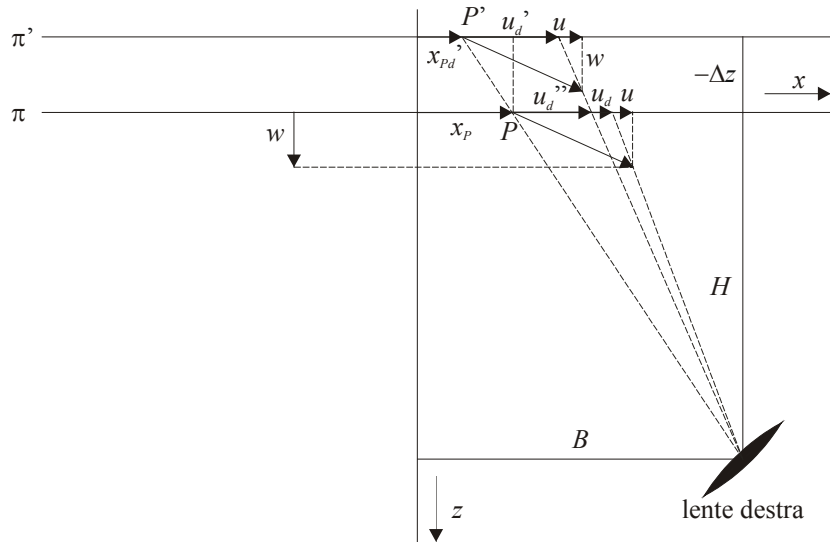


Figura 5.2 Rappresentazione schematica per il calcolo della proiezione della componente orizzontale dello spostamento sulla telecamera destra in corrispondenza di una traslazione del piano di misura.

$$u_s'' = u_s \left(1 + \frac{\Delta z}{H - w - \Delta z} \right). \quad (5.12)$$

Adoperando lo stesso criterio utilizzato per il calcolo della componente misurata dalla telecamera di sinistra, è possibile ricavare una relazione analoga alla (5.12) anche per la componente misurata dalla telecamera destra. Dalle similitudini dei triangoli mostrati in Figura 5.2 si ottengono le relazioni:

$$\frac{x_p - x'_{pd}}{-\Delta z} = \frac{B - x_p}{H} \quad (5.13)$$

$$\frac{B - x'_{pd} - u'_d}{H - \Delta z} = \frac{u - u'_d}{w} = \frac{B - x_p - u''_d}{H}, \quad (5.14)$$

da cui, risolvendo la (5.13) rispetto ad x'_{pd} e la prima uguaglianza della (5.14) rispetto ad u'_d , si ricava:

$$x'_{pd} = x_p + \Delta z \frac{(B - x_p)}{H} \quad (5.15)$$

$$u'_d = \frac{u(H - \Delta z) - w(B - x'_{Pd})}{H - \Delta z - w}. \quad (5.16)$$

Dalla prima delle uguaglianze (5.14), tenendo conto della (5.15) e della (5.16), si ottiene analogamente al caso precedente:

$$\begin{aligned}
 u_d'' &= \frac{H}{w} (u_d' - u) + (B - x_p) = \frac{H \left[\frac{u(H - \Delta z) - w(B - x_{pd}')}{H - \Delta z - w} - u \right] + w(B - x_p)}{w} = \\
 &= \frac{H[u(H - \Delta z) - w(B - x_{pd}') - u(H - \Delta z - w)] + w(B - x_p)(H - \Delta z - w)}{w(H - \Delta z - w)} = \\
 &= \frac{H \left[u - (B - x_p) + \Delta z \frac{(B - x_p)}{H} \right] + (B - x_p)(H - \Delta z - w)}{H - \Delta z - w} = \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w}. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Dal confronto con la (5.5), si ha che anche la (5.17) può essere riscritta nella forma:

$$u_d'' = u_d \left(1 + \frac{\Delta z}{H - w - \Lambda z} \right). \quad (5.18)$$

Noto il valore delle proiezioni misurate con le due telecamere, è possibile stimare il valore

delle componenti dello spostamento calcolato con la tecnica stereoscopica e, dal confronto con il valore effettivo dello spostamento, risalire all'errore di allineamento. Per ottenere le componenti u e w è sufficiente sostituire la (5.11) e la (5.17) al posto di u_s ed u_d all'interno delle equazioni (5.1) ed (5.3) rispettivamente. Indicando con u' il valore misurato della componente u , si ha:

$$u' = \frac{B \left[\frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} + \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w} \right] + x_p \left[\frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} \right]}{2B + \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w}} = \frac{B(2Hu + 2wx_p) - 2wBx_p}{2B(H - \Delta z - w) + 2wB} = \frac{Hu}{H - \Delta z}, \quad (5.19)$$

per cui l'errore relativo ε_u nella misura della componente u , dovuto ad un errore di allineamento tra i piani pari a Δz , è dato da:

$$\varepsilon_u = \frac{u' - u}{u} = \frac{\frac{Hu}{H - \Delta z} - u}{u} = \frac{\Delta z}{H - \Delta z}. \quad (5.20)$$

Operando nella stessa maniera, per la componente w' risulta:

$$w' = \frac{H \left[\frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w} \right]}{2B + \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w}} = \frac{2wBH}{2B(H - \Delta z - w) + 2wB} = \frac{Hw}{H - \Delta z} \quad (5.21)$$

e

$$\varepsilon_w = \frac{w' - w}{w} = \frac{\frac{Hw}{H - \Delta z} - w}{w} = \frac{\Delta z}{H - \Delta z}. \quad (5.22)$$

Dalle (5.20) e (5.22) si deduce che l'errore relativo sulle due componenti dello spostamento è identico ed indipendente dal valore dello spostamento stesso. L'errore cresce al crescere della distanza tra i piani, mentre diminuisce all'aumentare della distanza delle telecamere dal piano di misura.

Resta ora da valutare l'effetto dell'errore di allineamento sulla componente v del campo di spostamento. In questo caso, per ciascuna delle due telecamere valgono le seguenti relazioni geometriche (cfr. Figura 5.3):

$$\frac{y_P}{y'_{Ps}} = \frac{H}{H - \Delta z} \quad (5.23)$$

$$\frac{v'_s - v}{w} = \frac{v'_s + y'_{Ps}}{H - \Delta z} = \frac{v''_s + y_P}{H}. \quad (5.24)$$

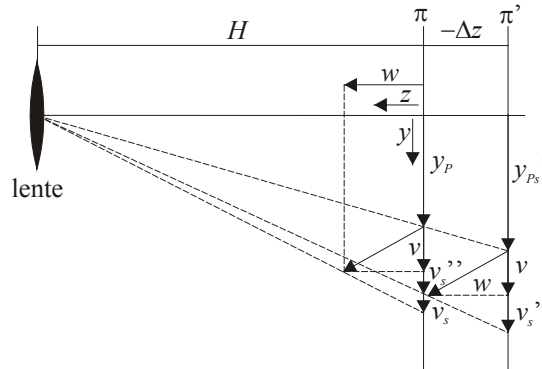


Figura 5.3 Rappresentazione schematica per il calcolo della proiezione della componente verticale dello spostamento sulle telecamere destra e sinistra in corrispondenza di una traslazione del piano di misura.

Da cui si deduce:

$$y'_{pd} = y'_{ps} = y_p - \frac{\Delta z}{H} y_p \quad (5.25)$$

$$v'_d = v'_s = \frac{wy'_{ps} + v(H - \Delta z)}{H - \Delta z - w} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} v''_d = v''_s &= \frac{H}{w} (v'_s - v) - y_p = \frac{H}{w} \left[\frac{w \left(y_p - \frac{\Delta z}{H} y_p \right) + v(H - \Delta z)}{H - \Delta z - w} - v \right] - y_p = \\ &= \frac{(H - \Delta z)y_p + Hv}{H - \Delta z - w} - y_p = \frac{Hv + y_p w}{H - \Delta z - w}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Tenendo conto della (5.6) anche quest'ultima equazione può essere riscritta nella forma:

$$v''_s = v_s \left(1 + \frac{\Delta z}{H - \Delta z - w} \right). \quad (5.28)$$

Infine, utilizzando la (5.27) e ricordando le (5.2), (5.11) ed (5.17), si ricavano il valore effettivo e l'errore relativo per la componente verticale dello spostamento:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{y_p \left[\frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} \right] + 2B \left(\frac{Hv + y_p w}{H - \Delta z - w} \right)}{2B + \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - \Delta z - w} - \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - \Delta z - w}} = \\ &= \frac{-2y_p w B + 2BHv + 2By_p w}{2B(H - \Delta z - w) + 2wB} = \frac{Hv}{H - \Delta z}; \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_v = \frac{v' - v}{v} = \frac{\frac{Hv}{H - \Delta z} - v}{v} = \frac{\Delta z}{H - \Delta z}. \quad (5.30)$$

La (5.30) mostra che la componente verticale dello spostamento presenta un errore identico a quello delle altre due componenti.

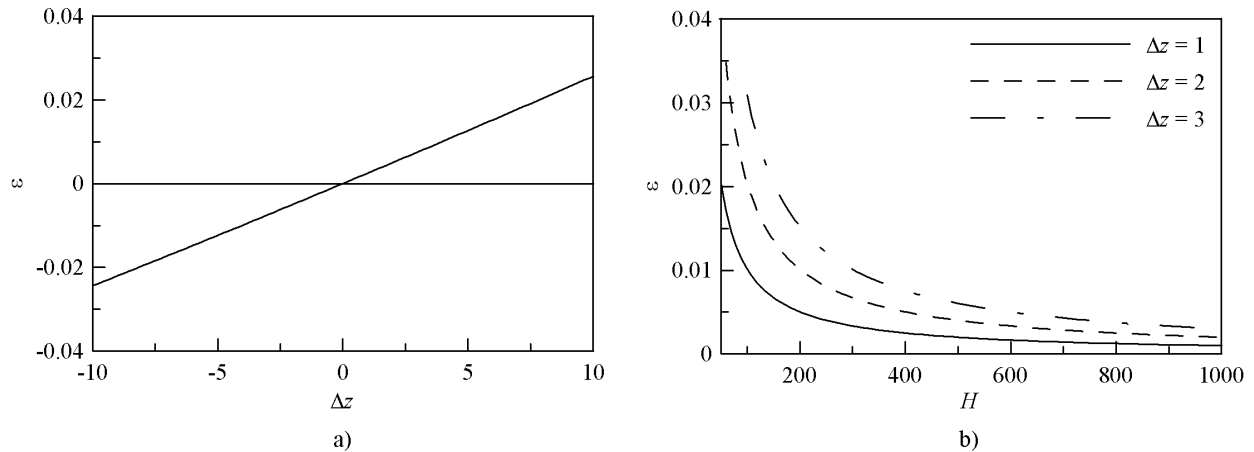


Figura 5.4 Errore di traslazione del piano di misura. a) Andamento dell'errore in funzione della distanza Δz tra i piani per $H = 400$ mm. b) Andamento dell'errore in funzione di H e per diverse distanze tra i piani.

In Figura 5.4(a) è mostrato l'andamento dell'errore relativo, identico per le tre componenti del campo di spostamento, in funzione della distanza Δz tra i piani e per un valore della distanza H delle telecamere dal piano di misura pari a 400 mm. Per la quasi totalità dei valori riportati in figura, il valore dell'errore risulta inferiore al 2%, mentre per $-2 \text{ mm} < \Delta z < 2 \text{ mm}$ l'errore è inferiore a 0.5%. L'effetto della distanza delle telecamere dal piano di misura è mostrato in Figura

5.4(b), in cui è riportato l'andamento dell'errore in funzione della suddetta distanza per tre diverse disposizioni dei piani di calibrazione e di misura. L'errore diventa significativo per distanze dal piano di misura inferiori a 200mm e per $\Delta z > 2$ e tende ad annullarsi al crescere di H . Essendo questi ultimi valori difficilmente incontrati nella pratica, ne consegue che, in presenza di un campo di spostamento uniforme e per i valori che tipicamente si riscontrano nelle prove sperimentali, una traslazione del piano di misura rispetto a quello di calibrazione induce un errore trascurabile su tutte le componenti della velocità misurate.

5.1.2. Rotazione del piano di misura nel piano xz

La stima degli errori in presenza di una rotazione del piano di misura può essere ricondotta al caso precedentemente analizzato. Infatti, la suddetta rotazione, su ciascun punto P del piano, produce lo stesso errore causato da una traslazione Δz pari alla distanza dal piano di calibrazione della proiezione P' del punto sul piano di misura. Quest'ultima distanza è diversa per ciascuna delle due telecamere, per cui il metodo di valutazione dell'errore relativo si complica leggermente. Ai fini della stima degli errori, pertanto, il problema si riduce al calcolo delle distanze delle proiezioni del punto per le due telecamere. Si noti sin d'ora che, al contrario di quanto accadeva nel caso esaminato in precedenza, l'errore relativo non è costante sul piano di misura a causa dell'asimmetria prodotta dalla rotazione relativa dei due piani.

Con riferimento alla Figura 5.5 si osservi che, trattandosi di spostamento rigido piano, l'errore di allineamento in esame si può interpretare come una rotazione rigida di un angolo α attorno ad un centro di rotazione²² C sull'asse x . Indicando con x_C la distanza di C dall'origine degli assi, dalla figura si deduce che la distanza del punto P' dal piano di calibrazione, indicato con Δz_s , è data da:

$$-\Delta z_s = (-x_C + x'_{Ps}) \operatorname{tg} \alpha \quad (5.31)$$

che in base alla (5.9) diventa:

$$-\Delta z_s = \left[-x_C + x_P - \Delta z_s \frac{(B + x_P)}{H} \right] \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.32)$$

Risolvendo la (5.32) rispetto a Δz_s si ricava l'espressione desiderata:

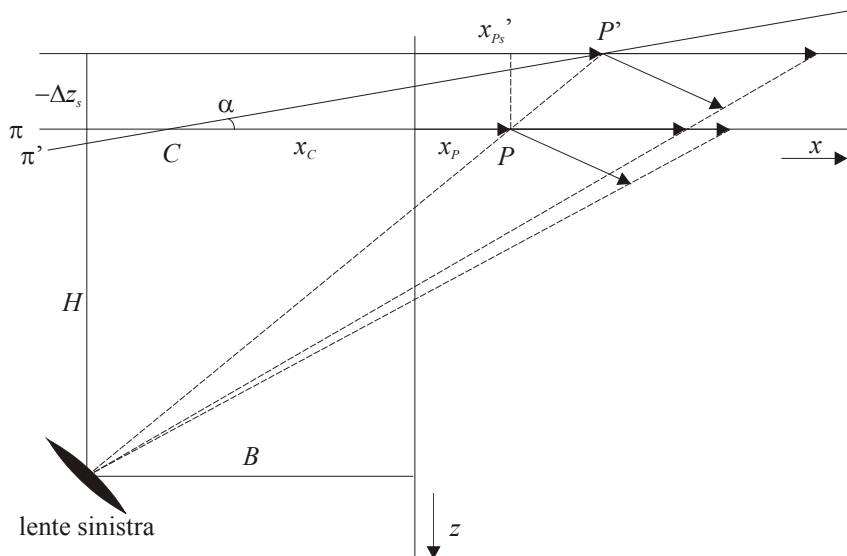


Figura 5.5 Effetto di una rotazione α del piano di misura nel piano xz sulla componente di spostamento orizzontale misurata dalla telecamera sinistra.

²² Si noti che, senza togliere generalità all'analisi, sarebbe sufficiente esaminare il caso in cui il centro di rotazione si trovi nell'origine, in quanto ogni altra posizione di C nel piano si può ottenere con una traslazione del piano di misura.

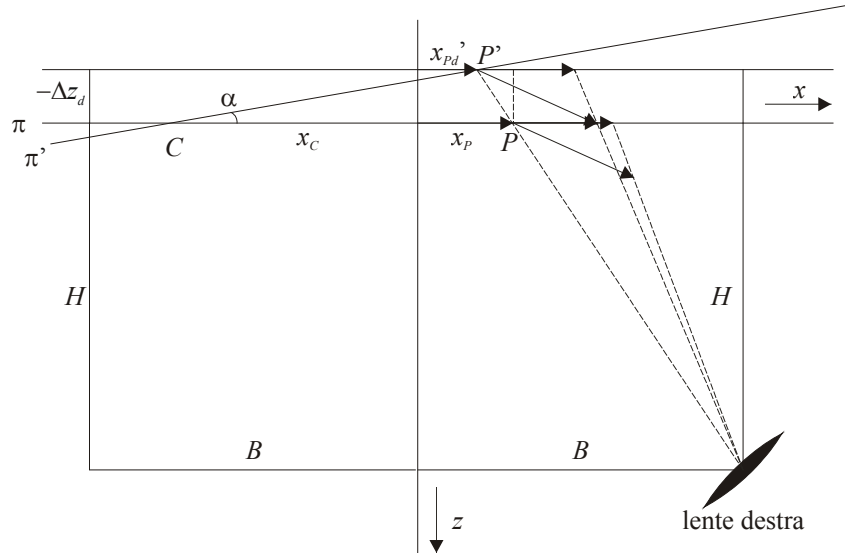


Figura 5.6 Effetto di una rotazione α del piano di misura nel piano xz sulla componente di spostamento orizzontale misurata dalla telecamera destra.

$$\Delta z_s = \frac{H \operatorname{tg} \alpha (x_P - x_C)}{(x_P + B) \operatorname{tg} \alpha - H}. \quad (5.33)$$

Adottando la stessa simbologia utilizzata precedentemente, si può effettuare facilmente il calcolo della distanza Δz_d dal piano di calibrazione della proiezione del punto P sul piano di misura. In base a considerazioni geometriche deducibili dalla Figura 5.6 si ottiene:

$$-\Delta z_d = (-x_C + x'_{Pd}) \operatorname{tg} \alpha \quad (5.34)$$

e, sostituendo la (5.15) nella precedente, si ha l'equazione:

$$-\Delta z_d = \left[-x_C + x_P + \Delta z_d \frac{(B - x_P)}{H} \right] \operatorname{tg} \alpha \quad (5.35)$$

che risolta rispetto a Δz_d fornisce:

$$\Delta z_d = \frac{H(x_P - x_C) \operatorname{tg} \alpha}{(x_P - B) \operatorname{tg} \alpha - H}. \quad (5.36)$$

La assenza di simmetria tra le proiezioni destra e sinistra delle telecamere complica notevolmente il calcolo delle componenti di spostamento effettivo e, di conseguenza, l'espressione dell'errore relativo assume una forma molto diversa dalla (5.20). Per rendere più agevole il calcolo dell'espressione analitica dell'errore, è conveniente introdurre dei coefficienti di correzione per le proiezioni delle componenti di spostamento orizzontale delle due telecamere definiti come $f_s = \Delta z_s / (H - w - \Delta z_s)$ e $f_d = \Delta z_d / (H - w - \Delta z_d)$. Effettuando le opportune sostituzioni e semplificazioni, si giunge alle seguenti espressioni per gli errori relativi (vedi Appendice D.1):

$$\varepsilon_u = \frac{1}{u} \frac{Bu(H - w)(f_s + f_d) - [(Hu + wx_P)(u + x_P) - wB^2](f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_P)(f_s - f_d)} \quad (5.37)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{v} \frac{Bv(H - w)(f_s + f_d) - (v + y_P)(Hu + wx_P)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_P)(f_s - f_d)} \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_w = \frac{H - w}{w} \frac{Bw(f_s + f_d) + (Hu + wx_P)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_P)(f_s - f_d)}. \quad (5.39)$$

Nella forma in cui sono state scritte, le (5.37)-(5.39) evidenziano i due termini di cui si compone l'errore: un termine simmetrico in cui compare la somma dei coefficienti di correzione ed un termine asimmetrico in cui compare la differenza tra i coefficienti. È immediato verificare come, in presenza di una traslazione tra il piano di misura e quello di calibrazione, tenendo conto della simmetria e della definizione dei coefficienti correttivi, le (5.37)-(5.39) si riducano alle (5.20),

(5.24) ed (5.30) rispettivamente. Ricordando la definizione dei coefficienti correttivi e sostituendo le (5.33) e (5.36) (cfr. Appendice D.2), si ottengono le espressioni degli errori relativi nel caso particolare in cui l'angolo formato tra i piani sia pari ad α :

$$\varepsilon_u = \frac{(H-w)(x_p-x_c)tg\alpha Hu[w-H+(x_c+u+x_p)tg\alpha]+w(x_p^2-B^2)tg\alpha}{u(D_1^2-D_2)} \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_v = \frac{(H-w)(x_p-x_c)tg\alpha Hv[w-H+(x_c+u)tg\alpha]+y_p(Hu+wx_p)tg\alpha}{v(D_1^2-D_2)} \quad (5.41)$$

$$\varepsilon_w = \frac{H(H-w)(x_p-x_c)tg\alpha w[w-H+(x_c-x_p+u)tg\alpha]-Hu tg\alpha}{w(D_1^2-D_2)} \quad (5.42)$$

con:

$$D_1 = H(H-w) + (wx_p - Hx_c)tg\alpha$$

e

$$D_2 = (H-w)^2 B^2 tg^2 \alpha - H tg \alpha (x_p - x_c) [w(w-H) + (wx_c - wx_p - Hu + uw) tg \alpha].$$

Per piccoli spostamenti e per piccoli α , trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si vede che ciascuna componente presenta un identico errore relativo e le (5.40)-(5.42) assumono la forma particolarmente semplice:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_v = \varepsilon_w = \frac{(x_c - x_p)}{H} tg \alpha \quad (5.43)$$

per cui, per piccoli spostamenti ed errori di allineamento, l'errore relativo sulla misura delle tre componenti del campo di spostamento è identico per ciascuna componente ed è dato dal rapporto tra l'entità dell'errore di allineamento ($\Delta z_{s,d}$) e la distanza delle telecamere dal piano di calibrazione.

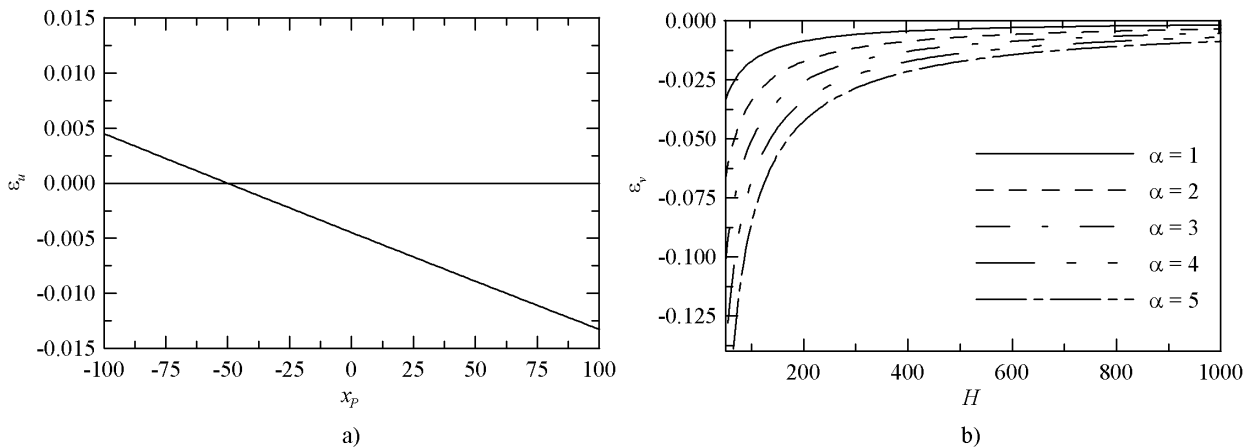


Figura 5.7 Errore di rotazione nel piano xz . a) Andamento dell'errore sulla componente u lungo l'asse x per $u = v = w = 0.4mm$, $x_c = -50mm$, $H = 400mm$, $B = 350mm$ ed $\alpha = 2^\circ$; b) andamento dell'errore sulla componente v al variare della distanza H per diversi angoli di rotazione nel punto $x_p = 50mm$, $y_p = 50mm$.

Rispetto al caso precedentemente esaminato, l'errore di allineamento questa volta varia notevolmente lungo la direzione x del piano di misura e, per la componente v dello spostamento si ha una variazione anche lungo la direzione y . In Figura 5.7(a) è mostrato l'andamento dell'errore sulla componente u per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4mm$, per parametri geometrici $H = 400mm$ e $B = 350mm$ e per una rotazione del piano di misura di 2° . Si è assunto come centro di rotazione il punto avente ascissa $x_c = -50mm$; gli altri casi non sono esaminati in quanto l'effetto dello spostamento del centro di rotazione è del tutto analogo ad una traslazione del piano di misura. Come si vede dal grafico, avendo assunto degli spostamenti piccoli, l'errore ha un andamento pressoché lineare in accordo con la (5.43) e l'errore massimo, raggiunto in corrispondenza della massima distanza dal centro di rotazione, risulta inferiore ad 1.5%.

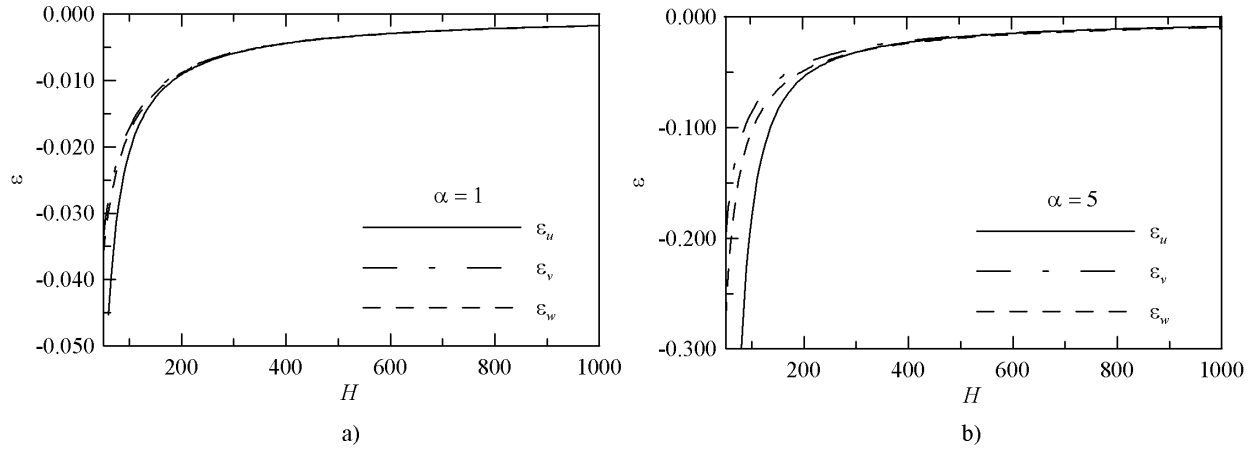


Figura 5.8 Andamento dell'errore relativo sulle tre componenti di spostamento al variare della distanza delle telecamere dal piano di misura per $u=v=w=0.4mm$. a) $\alpha=1$; b) $\alpha=5$.

L'influenza della distanza dal piano di misura e dell'angolo di inclinazione rispetto al piano di calibrazione sull'errore di allineamento è analizzata in Figura 5.7(b), in cui è riportato l'errore sulla componente v nelle stesse condizioni di misura in corrispondenza del punto del piano di misura di coordinate $x_P = 50mm$, $y_P = 50mm$. Per basse distanze dal piano di misura l'errore aumenta rapidamente al crescere dell'angolo α , mentre al crescere di H la variazione è più contenuta; nelle condizioni tipiche di misura, ossia in corrispondenza di $H = 400mm$, per $\alpha = 1$ l'errore è inferiore allo 0.5%, per $\alpha = 5$ si hanno errori superiori al 2%. Si noti che, nelle suddette condizioni, la distanza tra le telecamere ($2B$) ha un'influenza molto ridotta sull'errore e che al decrescere di H , in base alle (5.40)-(5.42), la differenza tra gli errori sulle singole componenti del campo di spostamento diventa significativa. Ciò è mostrato in maniera evidente in Figura 5.8, in cui sono riportati gli errori sulle componenti per $\alpha = 1$ e $\alpha = 5$. In entrambi i casi, l'errore maggiore si ha sulla componente u , gli errori sulle componenti v e w hanno andamenti simili e, per $H > 400mm$ la differenza di comportamento tra le tre componenti scompare.

5.1.3. Rotazione del piano di misura nel piano yz

In presenza di una rotazione di un angolo β del piano di misura rispetto al piano di calibrazione, la distanza effettiva tra i due piani, pur variando da punto a punto, è identica sia per le telecamere di sinistra che per quella destra. Dalla Figura 5.9 si ha:

$$(y'_{Ps} - y_C) \operatorname{tg} \beta = -\Delta z \quad (5.44)$$

che, tenendo conto della (5.25), diventa:

$$\left(y_P - \frac{\Delta z}{H} y_P - y_C \right) \operatorname{tg} \beta = -\Delta z. \quad (5.45)$$

Risolvendo la (5.45) rispetto a Δz , si ricava la distanza effettiva tra i piani, data da:

$$\Delta z_s = \Delta z_d = \frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{y_P \operatorname{tg} \beta - H}. \quad (5.46)$$

Ricordando la definizione dei coefficienti di correzione si ricava:

$$f_d = f_s = \frac{\frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{y_P \operatorname{tg} \beta - H}}{H - w - \frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{y_P \operatorname{tg} \beta - H}} = \frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{(y_P \operatorname{tg} \beta - H)(H - w) - H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}. \quad (5.47)$$

La simmetria tra le due telecamere semplifica notevolmente il calcolo degli errori relativi delle tre componenti di spostamento, infatti, sostituendo la (5.47) nelle (5.37)-(5.39) le espressioni degli errori assumono la forma:

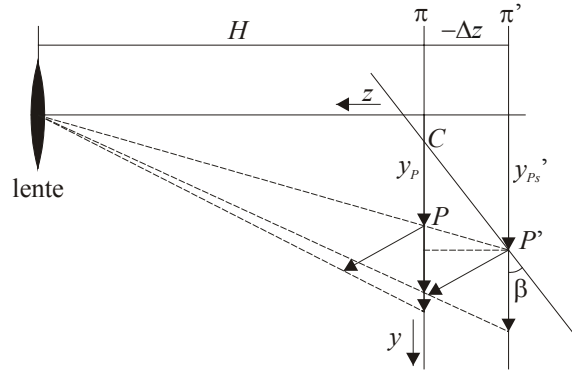


Figura 5.9 Effetto di una rotazione β del piano di misura nel piano yz sulla componente di spostamento verticale misurata dalla telecamera sinistra.

$$\begin{aligned} \varepsilon_u = \varepsilon_v = \varepsilon_w &= \frac{B(H-w)(f_s + f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d)} = \frac{B(H-w)2 \left[\frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{(y_P \operatorname{tg} \beta - H)(H-w) - H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta} \right]}{2BH + wB2 \left[\frac{H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{(y_P \operatorname{tg} \beta - H)(H-w) - H(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta} \right]} = \\ &= \frac{(H-w)(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta}{(y_P \operatorname{tg} \beta - H)(H-w) - (H-w)(y_P - y_C) \operatorname{tg} \beta} = \frac{(y_C - y_P) \operatorname{tg} \beta}{H - y_C \operatorname{tg} \beta}; \end{aligned} \quad (5.48)$$

Quest'ultima relazione mostra che anche in questo caso gli errori relativi non dipendono né dallo spostamento né dalla distanza tra le telecamere e sono identici per ciascuna componente. Inoltre, se si confronta la (5.48) con la (5.43) si nota che, per un fissato angolo β e per un fissato centro di rotazione, le due leggi sono identiche a meno di un termine costante che compare al denominatore per cui valgono la maggior parte delle considerazioni fatte per una rotazione nel piano xz . Alla scopo è sufficiente ripetere l'analisi sostituendo l'angolo α con l'angolo β e le ascisse del centro di rotazione C e del punto generico P del piano di calibrazione con le rispettive ordinate. Si tenga presente che gli scostamenti più marcati tra le due leggi si hanno in maniera più evidente per valori bassi di H e per angoli elevati, valori per i quali la (5.43) non è più valida.

5.1.4. Errore di allineamento generico

Finora si è discusso degli errori che si commettono quando il piano di misura si trova in posizioni particolari rispetto al piano di calibrazione, nella pratica, però, il piano di misura si può trovare in qualsiasi posizione dello spazio rispetto al piano di calibrazione e, perciò, l'analisi effettuata sembrerebbe inadeguata a descrivere gli errori che si riscontrano in una misura reale. Tuttavia, attraverso semplici considerazioni, i risultati ottenuti sono ugualmente utilizzabili per valutare l'andamento degli errori sistematici nel caso di un qualunque posizionamento relativo tra i due piani.

Come è noto, per determinare un piano qualsiasi dello spazio fisico è necessario conoscere i valori di quattro parametri. Se si escludono i piani paralleli all'asse zeta, come è lecito assumere nel nostro caso, l'equazione generica del piano si scrive in forma esplicita come:

$$z = ax + by + c \quad (5.49)$$

ed i parametri si riducono a tre. Il parametro a rappresenta l'inclinazione di tutte le rette intersezione del piano in esame con i piani paralleli al piano xz , il parametro b rappresenta l'inclinazione di tutte le rette intersezione del piano in esame con i piani paralleli al piano yz ed il parametro c rappresenta, infine, l'intercetta del piano sull'asse z . In definitiva, la (5.49) rappresenta una generalizzazione di tutti i casi finora analizzati. Per stimare gli errori dovuti ad un generico disallineamento, si può procedere in maniera analoga a quanto fatto finora, ovvero è sufficiente calcolare la distanza Δz per entrambe le telecamere e per ciascun punto del piano di calibrazione e successivamente, attraverso i coefficienti correttivi, ricavare l'espressione generale dell'errore.

Rispetto alle situazioni esaminate nei paragrafi precedenti, in questo caso la quantità Δz varia su ciascun punto del piano di calibrazione e ciò rende il calcolo leggermente più complicato.

Per calcolare le distanze di cui sopra è sufficiente individuare la posizione del punto $P' \equiv (x'_{P'}, y'_{P'}, z'_{P'})$ nel sistema di riferimento su cui è stata fatta la calibrazione del sistema. Detta posizione può essere determinata dall'intersezione del raggio proiettante con il piano in esame e, per fare ciò è necessario scrivere l'equazione della retta passante per il centro della lente e per il punto P del piano di coordinate $(x_P, y_P, 0)$. Il risultato, ovviamente, sarà diverso a seconda che si prenda in esame la telecamera di sinistra oppure quella di destra. Per la telecamera sinistra le coordinate della lente sono $L_s \equiv (-B, 0, H)$ per cui l'equazione del raggio proiettante passante per P ed L_s è data dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+B}{x_P+B} = \frac{y}{y_P} \\ \frac{x+B}{x_P+B} = \frac{z-H}{-H} \end{cases} \quad (5.50)$$

Risolvendo il sistema costituito dalle (5.49) e (5.50) si ottengono le coordinate del punto P'_s :

$$\begin{cases} x_{P'_s} = \frac{(H-c)x_P - bBy_P - cB}{H + a(x_P + B) + by_P} \\ y_{P'_s} = \frac{H-c+aB}{H + a(x_P + B) + by_P} y_P \\ z_{P'_s} = H \frac{ax_P + by_P + c}{H + a(x_P + B) + by_P} \end{cases} \quad (5.51)$$

Pertanto, in base all'ultima delle (5.51), si ha.

$$\Delta z_s = H \frac{ax_P + by_P + c}{H + a(x_P + B) + by_P}. \quad (5.52)$$

Analogamente, dovendo il raggio proiettante della lente destra passare per i punti P e $L_d \equiv (B, 0, H)$, si ricava:

$$\Delta z_d = H \frac{ax_P + by_P + c}{H + a(x_P - B) + by_P}. \quad (5.53)$$

Considerando gli angoli α e β introdotti precedentemente ed indicando con Δz l'intercetta del piano con l'asse z , i coefficienti nelle (5.52) e (5.53) assumono rispettivamente le seguenti espressioni:

$$a = -tg\alpha, \quad b = -tg\beta \quad \text{e} \quad c = \Delta z. \quad (5.54)$$

I segni negativi nelle (5.54) si giustificano osservando che per valori positivi degli angoli le pendenze delle rette sono negative. Tenendo conto delle (5.54), le (5.52)-(5.53) diventano:

$$\Delta z_s = H \frac{-x_P tg\alpha - y_P tg\beta + \Delta z}{H - (x_P + B)tg\alpha - y_P tg\beta} \quad (5.55)$$

$$\Delta z_d = H \frac{-x_P tg\alpha - y_P tg\beta + \Delta z}{H - (x_P - B)tg\alpha - y_P tg\beta} \quad (5.56)$$

si osservi che, ponendo a turno nelle (5.55) e (5.56) $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ e tenendo conto dell'espressione assunta da Δz , si riottengono come caso particolare le relazioni (5.34), (5.36) ed (5.46) rispettivamente. Utilizzando le (5.52) e (5.53) le espressioni degli errori relativi sono date da (vedi Appendice D.3):

$$\varepsilon_u = \frac{(H-w)(c + ax_P + by_P)}{u} \frac{Hu[H-w-c + (u+x_P)a] + w[(x_P^2 - B^2)a - uy_P b]}{C_1^2 - C_2} \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_v = \frac{(H-w)(c+ax_p+by_p)}{v} \frac{Hv(H-w-c+ua)+y_p[(Hu+wx_p)a-vwb]}{C_1^2-C_2} \quad (5.58)$$

$$\varepsilon_w = \frac{(H-w)(c+ax_p+by_p)}{w} \frac{Hw[H-w-c+(u-x_p)a]-w^2by_p-H^2ua}{C_1^2-C_2} \quad (5.59)$$

con

$$C_1 = H(H-w-c) - w(ax_p+by_p)$$

e

$$C_2 = a^2 B^2 (H-w)^2 - (c+ax_p+by_p)[Hw(H-w-c) + Ha(uw-Hu-wx_p) - w^2by_p].$$

Supponendo che gli errori di allineamento e gli spostamenti siano piccoli le (5.57)-(5.59) assumono anche in questo caso una forma semplificata²³:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_v = \varepsilon_w = \frac{c+ax_p+by_p}{H} = \frac{\Delta z - x_p \operatorname{tg} \alpha - y_p \operatorname{tg} \beta}{H}. \quad (5.60)$$

Confrontando la (5.60) con la (5.43) si nota un'analogia nella legge di dipendenza dell'errore dalle variabili, per cui le stesse considerazioni fatte per la (5.43) continuano a valere con le dovute modifiche anche per l'errore relativo ad un piano generico dello spazio. In particolare, in questo caso l'errore complessivo varia linearmente sia con l'ascissa che con l'ordinata del punto P del piano di calibrazione esaminato, mentre varia in maniera inversa rispetto alla distanza delle telecamere dal piano stesso. Anche le considerazioni sugli errori relativi delle singole componenti, sull'influenza della distanza tra le lenti e sull'effetto della variazione degli angoli di inclinazione del piano di misura si estendono banalmente al caso generale.

5.2. Campo di moto non uniforme

Nel ricavare le espressioni analitiche degli errori di allineamento si è assunto che il campo di spostamento fosse costante nell'intorno della zona di misura. Questa ipotesi è lecita soltanto se si è in presenza di un campo di moto con piccoli gradienti di velocità, nella maggior parte dei flussi studiati, tuttavia, ci si trova ad effettuare misure con gradienti di velocità elevati come nello studio di flussi turbolenti, di vortici liberi e di parete ed in prossimità di superfici di separazione tra due flussi. L'esistenza di moti con gradienti di velocità rende necessario lo studio dell'effetto che essi hanno sugli errori nelle misure stereoscopiche. Ciò è quanto verrà fatto in questo paragrafo in cui, in particolare, ci si concentrerà su alcuni campi di moto che si possono incontrare nelle misure su flussi turbolenti.

5.2.1. Formule generali dell'errore

Per determinare l'errore in presenza di un campo di spostamento non uniforme, a meno di opportune correzioni, si può procedere in maniera simile a quanto fatto finora. Innanzitutto, si definiscono i coefficienti di correzione per le proiezioni misurate dalle due telecamere attraverso le relazioni:

$$u_s'' = u_s(1+f_s''), u_d'' = u_d(1+f_d''), v_s'' = v_s(1+f_s'') \text{ e } v_d'' = v_d(1+f_d''). \quad (5.61)$$

La non uniformità del campo di spostamento ha reso necessario distinguere i coefficienti di correzione per le componenti orizzontali di spostamento (aventi come apice la lettera u) da quelli per le componenti verticali (aventi come apice la lettera v) in quanto, come si vedrà tra breve, i secondi assumono in generale valori diversi dai primi. Con la simbologia introdotta nelle (5.61), è banale verificare che le (5.37)-(5.39) diventano:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{u} \frac{Bu(H-w)(f_s''+f_d'') - [(Hu+wx_p)(u+x_p) - wB^2](f_s''-f_d'')}{2BH + wB(f_s''+f_d'') + (Hu+wx_p)(f_s''-f_d'')} \quad (5.62)$$

²³ L'ipotesi che gli spostamenti e gli angoli siano piccoli risulta verificata se u, v e $w \ll H, B$ e se l'angolo è minore di $3-5^\circ$. Il limite per il valore ammissibile dell'angolo dipende principalmente dai valori assunti dalle altre grandezze che compaiono nelle formule dell'errore.

$$\varepsilon_v = \frac{1}{v} \frac{B(Hv + y_P w)(f_s^v + f_d^v) - (v + y_P)(Hu + wx_P)(f_s^u - f_d^u) - wB(v + y_P)(f_s^u + f_d^u)}{2BH + wB(f_s^u + f_d^u) + (Hu + wx_P)(f_s^u - f_d^u)} \quad (5.63)$$

$$\varepsilon_w = \frac{H - w}{w} \frac{Bw(f_s^u + f_d^u) + (Hu + wx_P)(f_s^u - f_d^u)}{2BH + wB(f_s^u + f_d^u) + (Hu + wx_P)(f_s^u - f_d^u)}. \quad (5.64)$$

L'effetto dello spostamento non uniforme si può valutare introducendo dei coefficienti correttivi per le componenti effettive del campo di spostamento. Indicando con u, v, w le componenti di spostamento nel punto P del piano di calibrazione e con u_{es}, v_{es}, w_{es} e u_{ed}, v_{ed}, w_{ed} le componenti dello spostamento nei punti P_s' e P_d' del piano di misura rispettivamente, i coefficienti di correzione per le velocità effettive si definiscono attraverso le relazioni:

$$u_{es} = u(1 + f_{eus}), \quad v_{es} = v(1 + f_{evs}), \quad w_{es} = w(1 + f_{ews}) \quad (5.65)$$

$$u_{ed} = u(1 + f_{eud}), \quad v_{ed} = v(1 + f_{evd}), \quad w_{ed} = w(1 + f_{ewd}). \quad (5.66)$$

Effettuando le opportune sostituzioni, non è difficile ricavare le formule che esprimono i coefficienti di correzione per le proiezioni definiti dalle (5.61) in funzione dei coefficienti di correzione per le componenti di spostamento definiti dalle (5.65) e (5.66) (vedi Appendice D.4):

$$f_s^u = \frac{1}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \left\{ \Delta z_s + \frac{H[uf_{eus}(H - w) + wf_{ews}(B + x_P + u)]}{Hu + w(B + x_P)} \right\} \quad (5.67)$$

$$f_d^u = \frac{1}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \left\{ \Delta z_d + \frac{H[uf_{eud}(H - w) + wf_{ewd}(u - B + x_P)]}{Hu - w(B - x_P)} \right\} \quad (5.68)$$

$$f_s^v = \frac{1}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \left\{ \Delta z_s + \frac{H[vf_{evs}(H - w) + wf_{ews}(v + y_P)]}{Hv + y_P w} \right\} \quad (5.69)$$

$$f_d^v = \frac{1}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \left\{ \Delta z_d + \frac{H[vf_{evd}(H - w) + wf_{ewd}(v + y_P)]}{Hv + y_P w} \right\}. \quad (5.70)$$

Sostituendo, infine, le (5.67)-(5.70) nelle (5.62)-(5.64) si possono ricavare le espressioni degli errori relativi in funzione dei coefficienti di correzione delle velocità effettive e della distanza del piano di misura da quello di calibrazione per ciascuna telecamera. Le suddette espressioni però assumono una forma piuttosto complicata e, per valutare l'effetto della non uniformità del campo di spostamento, è preferibile rappresentare graficamente le equazioni dell'errore.

Per comprendere meglio l'effetto della non uniformità del campo di moto, è opportuno valutare separatamente il contributo di ciascuna componente del campo di spostamento. Nell'effettuare l'analisi si prenderà in considerazione un campo di spostamento fortemente tridimensionale con $u = v = w = 0.4mm$ nel punto del piano di calibrazione di coordinate $x_P = 50mm$, $y_P = 50mm$ e si supporrà che il piano di misura sia traslato di una quantità pari a $\Delta z = -0.5mm$ rispetto al piano di calibrazione. Quest'ultimo si suppone che sia posizionato ad una distanza $H = 400mm$ dal piano delle due lenti distanziate a loro volta di una quantità pari a $2B = 700mm$. Il fatto che non sia considerata l'eventualità di una rotazione del piano di misura non toglie generalità ai risultati, in quanto detta rotazione contribuisce ad incrementare l'errore relativo e ad introdurre un'ulteriore asimmetria nella misura in maniera simile a quanto visto per un campo di spostamento uniforme. Per valutare soltanto l'effetto della componente u si impone che siano nulli i coefficienti $f_{evs}, f_{evd}, f_{ews}$ ed f_{ewd} . In Figura 5.10 sono riportati gli errori relativi alle tre componenti al variare del parametro f_{eus} e per diversi valori di f_{eud} . Con i parametri utilizzati, per tutte le componenti l'andamento dell'errore è con buona approssimazione lineare rispetto a f_{eus} e, al contrario delle altre componenti, per la componente v l'errore è decrescente con il coefficiente correttivo. Al crescere di f_{eud} le curve traslano verso l'alto per le componenti u e v , mentre il contrario accade per la w . Dal grafico si deduce che l'errore è influenzato notevolmente dal gradiente della componente u e, in generale, sulla componente v si commette un errore che è un ordine di grandezza inferiore rispetto alle altre due. Inoltre, anche in presenza di gradienti non eccessivamente elevati si pos-

sono commettere errori di poco inferiori al 5%. Se si confrontano i risultati con gli analoghi ottenuti per un campo di moto uniforme si nota che in questo caso gli errori non sono più trascurabili. Ai fini di una corretta valutazione dell'errore va ricordato, però, che si è assunto che la variazione della componente u rappresentata dai coefficienti correttivi avvenga alla distanza di $\sim 1mm$ all'interno del fluido. Infine, in Figura 5.10(a-c) è riportata la curva rappresentativa dei punti aventi $f_{eus} = f_{eud}$ in corrispondenza dei quali si ha un comportamento singolare: le componenti v e w presentano un errore identico ed indipendente dal valore assunto dei coefficienti correttivi, mentre la componente u assume un valore molto vicino al valore della velocità effettiva nel piano di misura. Quest'ultima caratteristica si può spiegare facilmente ricordando il significato dei coefficienti correttivi. Quando i coefficienti correttivi sono diversi per le due telecamere, per misurare la velocità si utilizzano le proiezioni di vettori distinti aventi componenti diverse. Se i coefficienti coincidono, invece, per la ricostruzione si adoperano vettori distinti ma aventi le componenti uguali e perciò si commette un errore identico a quello calcolato con un campo di moto uniforme con la differenza che la velocità di riferimento è quella effettiva del piano di misura anziché quella presente nel punto sul piano di calibrazione. Infatti, confrontando gli errori deducibili dai grafici di Figura 5.10 con l'errore calcolato per un campo di moto uniforme si ha una coincidenza dei valori per v e w , mentre per u il valore calcolato differisce da quello della componente nel piano di misura di una quantità pari proprio all'errore di misura per un campo di spostamento uniforme, valore che per una traslazione del piano di misura coincide con l'errore sulle altre due componenti. Si noti anche che qualora il piano di misura fosse ruotato, l'errore su v e w non sarebbe costante con f_{eus} a causa della dipendenza dell'errore dal valore effettivo di u .

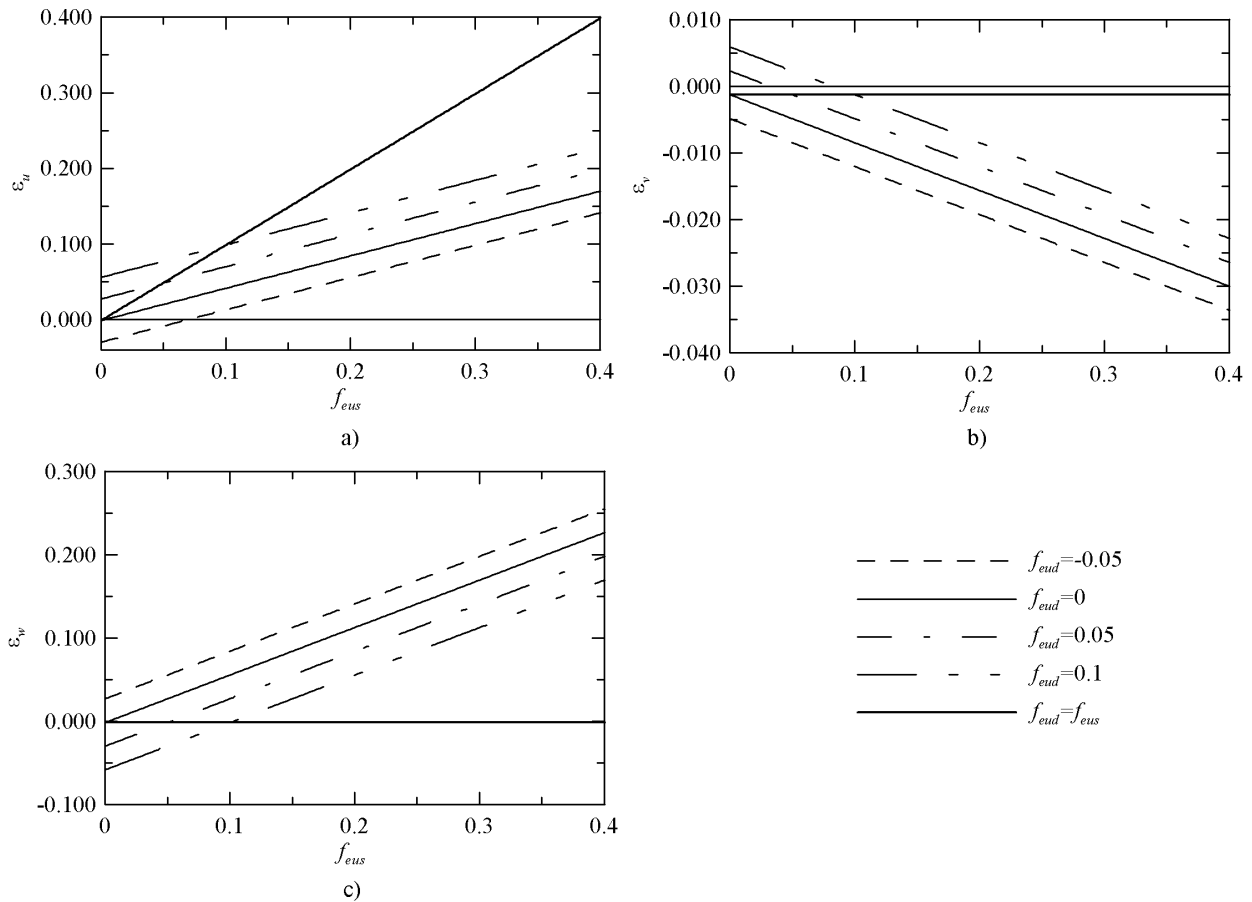


Figura 5.10 Andamento dell'errore relativo nel punto $x_p = 50mm$, $y_p = 50mm$ per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4mm$ e per un errore di allineamento $\Delta z = -0.5mm$ in funzione del parametro f_{eus} e per diversi valori di f_{eud} . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

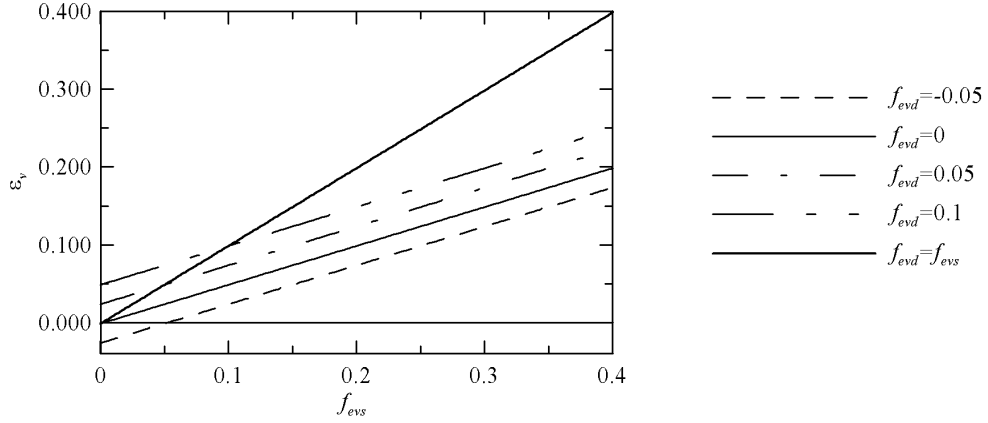


Figura 5.11 Andamento dell'errore relativo sulla componente v nel punto $x_P = 50mm$, $y_P = 50mm$ per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4mm$ e per un errore di allineamento $\Delta z = -0.5mm$ in funzione del parametro f_{ews} e per diversi valori di f_{ewd} .

Lo stesso tipo di analisi può essere condotta anche per i parametri f_{ews} e f_{ewd} , ottenendo il grafico riportato in Figura 5.11. In questo caso non sono riportati i grafici degli errori sulle componenti u e w in quanto questi, come si vede dalle (5.62)-(5.64) e (5.67)-(5.68), non dipendono dalla componente v e di conseguenza neanche dai coefficienti correttivi della componente stessa. L'andamento dell'errore per la v , invece, è pressoché identico a quello relativo alla u in Figura 5.10(a) e una perfetta coincidenza si ha per la curva rappresentativa della condizione $f_{ews} = f_{ewd}$. Quest'ultima circostanza consente di estendere all'errore sulla v le considerazioni fatte per la u .

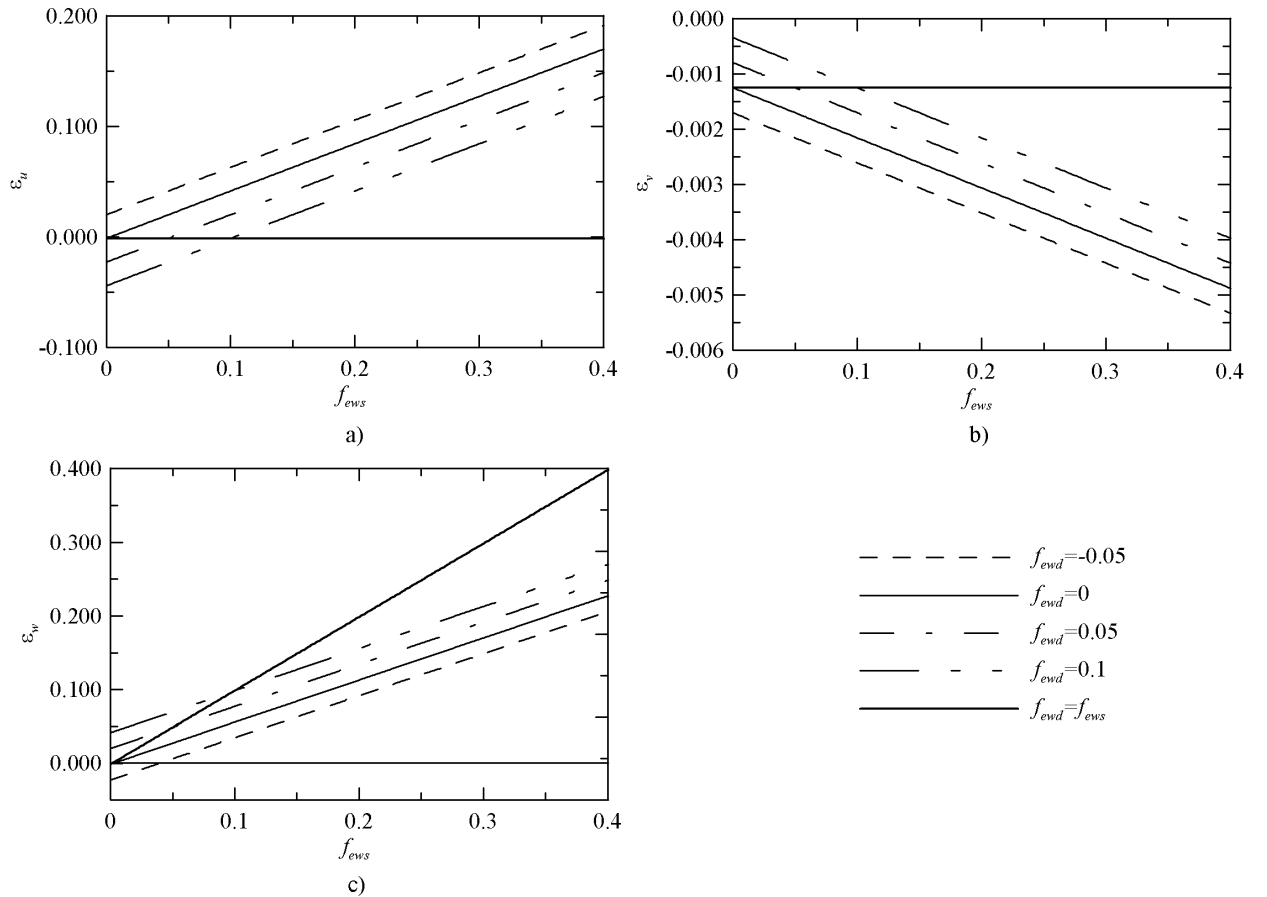


Figura 5.12 Andamento dell'errore relativo nel punto $x_P = 50mm$, $y_P = 50mm$ per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4mm$ e per un errore di allineamento $\Delta z = -0.5mm$ in funzione del parametro f_{ews} e per diversi valori di f_{ewd} . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

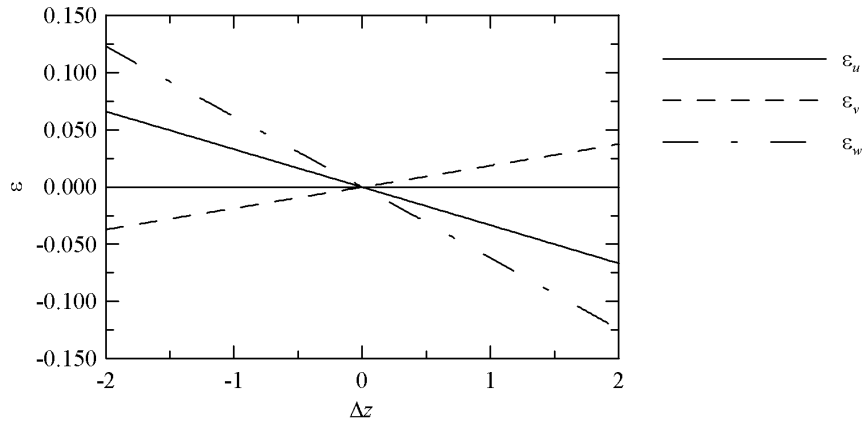


Figura 5.13 Andamento dell'errore relativo sulle tre componenti al variare di Δz nel punto $x_P = 50\text{mm}$, $y_P = 50\text{mm}$ per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4\text{mm}$ e per un fissato gradiente di velocità.

Analizzando i grafici dell'errore in funzione dei coefficienti f_{ews} e f_{ewd} (vedi Figura 5.12), per le curve si ottengono andamenti simili a quelli visti per gli altri coefficienti. In particolare, l'errore sulla componente v è del tutto simile a quello riportato in Figura 5.10(b), mentre gli andamenti per gli errori su u e w risultano invertiti rispetto a quelli di Figura 5.10. Vale la pena a questo punto fare qualche ulteriore considerazione su quanto visto finora. Innanzitutto, si osservi che nelle curve riportate è stato valutato l'effetto dei gradienti di velocità singolarmente per ogni componente. Nel caso più generale di moti fortemente tridimensionali, l'effetto della variazione delle singole componenti dello spostamento tende a sommarsi (anche se non linearmente) secondo i grafici riportati. Tuttavia, poiché l'errore a seconda dei coefficienti correttivi può essere tanto positivo quanto negativo, l'effetto combinato della non uniformità delle singole componenti può fornire errori inferiori rispetto all'eventualità in cui soltanto una componente non sia costante nello spazio. Pertanto, non è possibile fornire un ordine di grandezza dell'errore valido in generale per una particolare rotazione o traslazione del piano di misura. In secondo luogo, si noti che, in base a quanto detto precedentemente, i gradienti di velocità nella direzione ortogonale al piano di misura incidono in minima parte sull'errore mentre, in prima approssimazione, c'è un disaccoppiamento tra gli errori sulle componenti u e w e quello sulla componente v . Quest'ultima caratteristica si giustifica considerando che gli errori sulla u e sulla w non dipendono dai gradienti sulla componente v , mentre gli errori sulla v dovuti alle variazioni spaziali delle altre componenti nell'ipotesi di piccoli spostamenti sono inferiori allo 0.5%. Per spiegare la scarsa influenza della variazione di velocità in direzione ortogonale al piano di calibrazione è sufficiente richiamare all'attenzione il fatto che, in presenza di siffatti gradienti, i coefficienti correttivi destro e sinistro coincidono e l'errore sul vettore velocità effettivo del piano di misura, seppure non coincida con quello nel piano di calibrazione, risulta minimo e si riduce alla misura di un vettore in punto diverso dello spazio. Si potrebbe obiettare che anche in presenza di gradienti ortogonali al piano di calibrazione, in presenza di rotazioni del piano di misura non c'è coincidenza tra i coefficienti correttivi a causa della diversa distanza dal piano stesso dei punti proiettatisi sulle due telecamere. Se però si considera che l'errore di allineamento non è eccessivo, la differenza tra le quote dei due punti è piccola e l'incidenza sull'errore è ridotta.

Finora si è analizzato l'errore di allineamento soltanto in funzione dei gradienti di velocità disinteressandosi all'entità della traslazione del piano di misura. Per comprendere meglio quest'ultimo aspetto, in Figura 5.13 sono riportati gli andamenti degli errori sulle tre componenti rispetto alla distanza Δz tra il piano di misura e quello di calibrazione per un fissato campo di spostamento nel punto di coordinate $x_P = 50\text{mm}$, $y_P = 50\text{mm}$. Si sono scelti uno spostamento con $u = v = w = 0.4\text{mm}$ nel punto P ed un gradiente costante pari al 5% della velocità in 1mm . L'errore risulta in prima approssimazione lineare con Δz ed in questo caso fornisce errori più elevati per la componente w . Purtroppo anche per un gradiente non molto elevato, l'errore risulta del 3% per la componente w dell'1.6% per la u e $\sim 1\%$ per la v . In presenza di gradienti maggiori o per distanze

maggiori tra i piani l'errore aumenta notevolmente e ciò pone limitazioni notevoli alla tecnica rendendo necessaria una riduzione a priori dell'errore di allineamento ed eventualmente una correzione a posteriori dell'errore residuo. Alla luce di quanto appena esposto si deduce che in fase di progettazione dell'esperimento, al fine di contenere l'errore di allineamento, conviene posizionare ove sia possibile il piano di misura nel modo più favorevole rispetto ai gradienti del campo di spostamento.

5.2.2. Campo di moto rotatorio

In questo paragrafo, a titolo di esempio, è esaminato un particolare tipo di campo di moto in cui sono presenti gradienti di velocità e di particolare interesse nelle misure sui fluidi. Il moto preso in esame è un moto di rotazione rigida in quanto, come si vedrà successivamente, risulta agevole verificare sperimentalmente questo tipo di moto con slitte rotazionali. È opportuno analizzare le rotazioni in ciascuno dei piani coordinati, poiché, come vedremo, la disposizione dell'asse di rotazione rispetto al piano di calibrazione influenza notevolmente l'errore di misura.

Imponendo un campo di moto rotatorio nel piano xz con centro di rotazione C e angolo di rotazione α in presenza di un piano di misura spostato rispetto a quello di calibrazione, nel generico punto P del piano, i coefficienti di correzione per le velocità effettive sono espressi dalle seguenti equazioni (vedi Appendice D.5):

$$f_{eus} = \Delta z_s \frac{(B + x_p)(1 - \cos \alpha) + H \sin \alpha}{H(x_C - x_p)(1 - \cos \alpha)}, \quad f_{eud} = \Delta z_d \frac{(x_p - B)(1 - \cos \alpha) + H \sin \alpha}{H(x_C - x_p)(1 - \cos \alpha)} \quad (5.71)$$

$$f_{evs} = f_{evd} = 0 \quad (5.72)$$

$$f_{ews} = \Delta z_s \frac{(B + x_p) \sin \alpha - H(1 - \cos \alpha)}{H(x_C - x_p) \sin \alpha}, \quad f_{ewd} = \Delta z_d \frac{(x_p - B) \sin \alpha - H(1 - \cos \alpha)}{H(x_C - x_p) \sin \alpha} \quad (5.73)$$

dove il significato dei termini che compaiono nelle (5.71)-(5.73) è il consueto. Per determinare le formule dell'errore per le tre componenti è necessario sostituire le (5.71)-(5.73) nelle (5.62)-(5.64) passando attraverso le (5.67)-(5.70). Le espressioni finali sono piuttosto complicate e non sono riportate poiché, per gli scopi del presente lavoro, è sufficiente discutere soltanto i risultati principali.

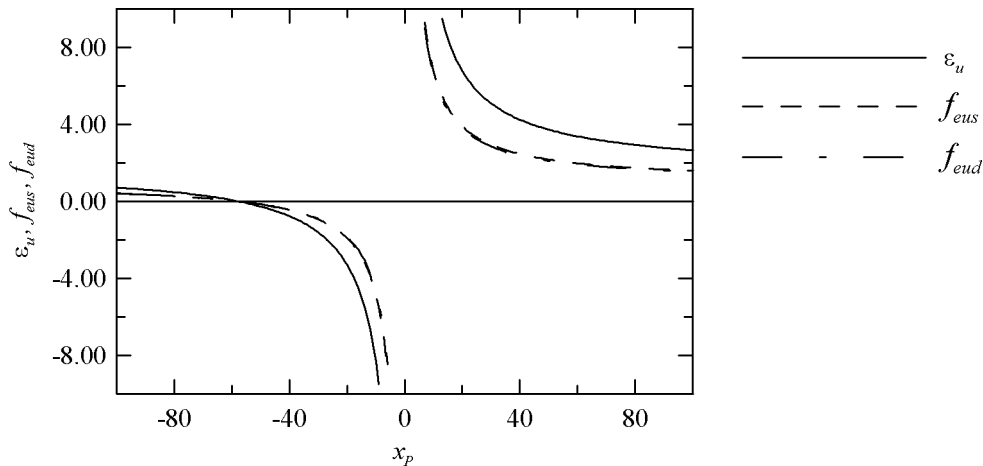


Figura 5.14 Andamento dell'errore e dei coefficienti correttivi sull'immagine per un campo di spostamento rotatorio di 1° intorno all'asse y nel punto $y_P = 50\text{mm}$ e per un piano di misura ruotato di 0.5° e con intercetta $\Delta z = -0.5\text{mm}$ rispetto al piano di calibrazione.

In Figura 5.14 è riportato in funzione dell'ascissa del punto P del piano di calibrazione soltanto l'errore relativo alla componente u in quanto, se si eccettua la zona nelle immediate vicinanze del centro di rotazione; per le altre componenti gli errori sono trascurabili e sempre inferiori allo 0.3%. I valori riportati in figura sono relativi ad un campo di spostamento rotatorio di 1° intorno all'asse y in corrispondenza dell'ordinata $y_P = 50\text{mm}$ con piano di misura inclinato di un angolo α

$= 0.5^\circ$ ed avente con l'asse z un'intercetta pari a $-0.5mm$. Per gli altri parametri, come al solito, si sono utilizzati i valori tipicamente riscontrati nelle misure sperimentali: $H = 400mm$, $B = 350mm$ e $w = 0.4mm$. Come si evince dal grafico, il diagramma dell'errore presenta un asintoto verticale in corrispondenza del punto $x_P = 0$ in quanto l'errore rimane finito mentre la componente u si annulla. In generale i valori dell'errore sono elevatissimi eccetto che in prossimità di $x_P = -57mm$ valore per cui il piano di misura interseca il piano di calibrazione. Riportando nella stessa figura i valori dei coefficienti forniti dalla (5.71), si osserva che le curve relative a questi ultimi sono coincidenti tra di loro ma sono molto distanti da quella dell'errore e, perciò, la misura della componente di spostamento effettiva è lontana anche dal valore dello spostamento sul piano di misura. Quest'ultima circostanza si giustifica con l'asimmetria che si riscontra nei coefficienti correttivi per la componente w . Questa asimmetria incide principalmente sulla componente u , assumendo questa valori di uno o due ordini di grandezza inferiori rispetto alle altre componenti.

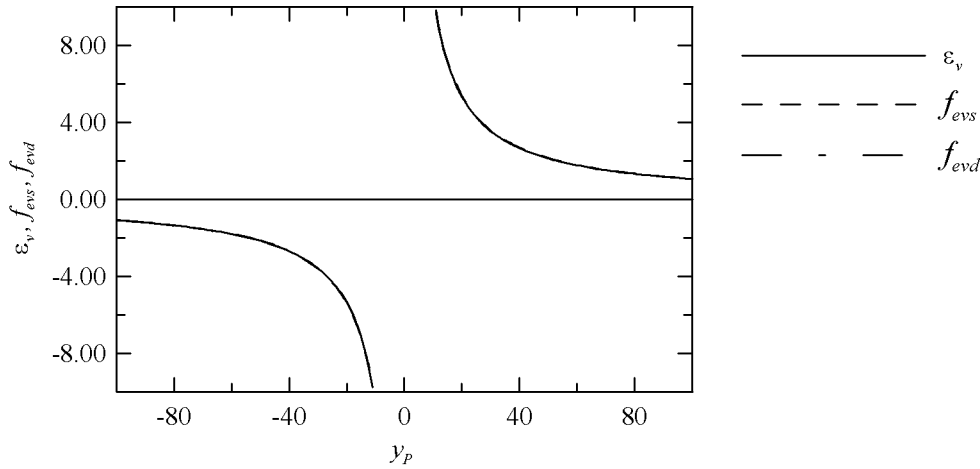


Figura 5.15 Andamento dell'errore e dei coefficienti correttivi sull'immagine per un campo di spostamento rotatorio di 1° intorno all'asse x nel punto $x_P = 50mm$ e per un piano di misura ruotato di 0.5° nel piano xz e con intercetta $\Delta z = -0.5mm$ rispetto al piano di calibrazione.

Imponendo un campo di spostamento rotatorio di un angolo β nel piano yz (vedi Appendice D), le equazioni degli errori nel punto P del piano di $z = 0$ si modificano nelle seguenti:

$$f_{eus} = f_{eud} = 0 \quad (5.74)$$

$$f_{evs} = \Delta z_s \frac{y_P(1 - \cos \beta) + H \sin \beta}{H(y_C - y_P)(1 - \cos \beta)}, \quad f_{evd} = \Delta z_d \frac{y_P(1 - \cos \beta) + H \sin \beta}{H(y_C - y_P)(1 - \cos \beta)} \quad (5.75)$$

$$f_{ews} = \Delta z_s \frac{y_P \sin \beta - H(1 - \cos \beta)}{H(y_C - y_P) \sin \beta}, \quad f_{ewd} = \Delta z_d \frac{y_P \sin \beta - H(1 - \cos \beta)}{H(y_C - y_P) \sin \beta} \quad (5.76)$$

Sostituendo le (5.74)-(5.76) in maniera analoga a quanto fatto per la rotazione intorno all'asse y si perviene all'espressione finale degli errori. Per una rotazione $\beta = 0.5^\circ$, un intercetta del piano di misura con l'asse z pari a $-0.5mm$ e per $H = 400mm$, $B = 350mm$ e $u = 0.4mm$ si ha che, ad eccezione dell'intorno del punto C per la componente w , l'errore sulla u e sulla w stessa è inferiore a 0.3% su tutta l'immagine mentre la componente v assume errori elevatissimi. A differenza di prima, però, grazie alla simmetria dei coefficienti di correzione per la componente lungo z , il valore di v discosta di poco dal valore della velocità effettiva nel punto che si trova sul piano di misura. Quanto detto è mostrato in Figura 5.15, in cui è riportato l'andamento dell'errore su v nel punto $x_P = 50mm$ lungo la direzione y del piano coordinato xy : le curve rappresentative dell'errore di misura e dei coefficienti correttivi sono praticamente indistinguibili.

Infine, per un campo di spostamento rotatorio intorno all'asse z si ottengono le formule (vedi Appendice D.5):

$$f_{eus} = \frac{\Delta z_s}{H} \frac{y_p \sin \gamma - (B + x_p)(\cos \gamma - 1)}{(x_p - x_c)(\cos \gamma - 1) - (y_p - y_c) \sin \gamma} \quad (5.77)$$

$$f_{eud} = \frac{\Delta z_d}{H} \frac{y_p \sin \gamma - (x_p - B)(\cos \gamma - 1)}{(x_p - x_c)(\cos \gamma - 1) - (y_p - y_c) \sin \gamma} \quad (5.78)$$

$$f_{evs} = -\frac{\Delta z_s}{H} \frac{y_p(\cos \gamma - 1) + (B + x_p) \sin \gamma}{(y_p - y_c)(\cos \gamma - 1) + (x_p - x_c) \sin \gamma} \quad (5.79)$$

$$f_{evd} = -\frac{\Delta z_d}{H} \frac{y_p(\cos \gamma - 1) + (x_p - B) \sin \gamma}{(y_p - y_c)(\cos \gamma - 1) + (x_p - x_c) \sin \gamma} \quad (5.80)$$

Per questo tipo di spostamento, l'errore sulle componenti u e v è trascurabile su tutto il piano di misura, mentre, come mostrato in Figura 5.16 in cui è riportato l'errore su w lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante del piano coordinato xy , l'errore sulla terza componente raggiunge un valore pari a 0.4% soltanto in corrispondenza delle estremità del piano di misura.

Riepilogando quanto visto in questo paragrafo, si ha che il campo di moto più critico in presenza di un errore di allineamento del piano di misura è quello rotatorio nel piano xz , il quale induce un grosso errore sulla componente orizzontale della velocità. Un campo di moto rotatorio nel piano yz causa un grosso errore soltanto sulla componente v . Il valore della velocità calcolato è in prima approssimazione pari al valore della v nel punto del piano di misura effettivo. Infine, un campo di moto rotatorio nel piano xy produce errori trascurabili su tutte le componenti. Se ne deduce che per ridurre gli errori di allineamento, se è possibile, si può disporre il piano di misura in maniera tale che i moti vorticosi eventualmente presenti nel fluido abbiano l'asse di rotazione ortogonale al piano stesso.

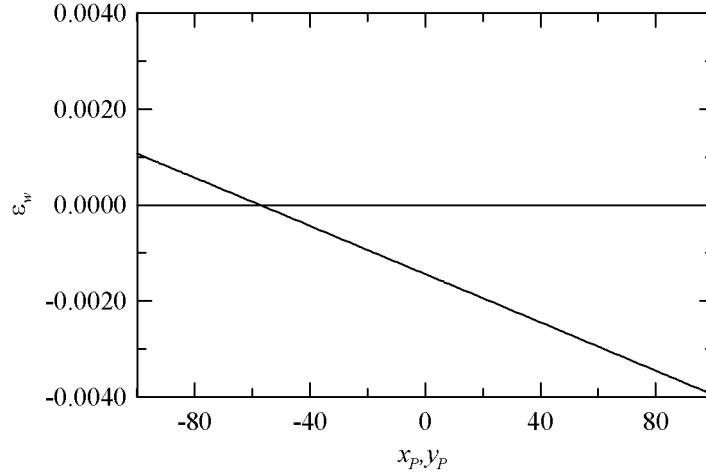


Figura 5.16 Andamento dell'errore su w nel piano di calibrazione per un campo di spostamento rotatorio di 1° intorno all'asse z nei punti $x_p = y_p$ e per un piano di misura ruotato di 0.5° nel piano xz e con intercetta $\Delta z = -0.5 \text{ mm}$ rispetto al piano di calibrazione.

5.3. Correzione degli errori di allineamento

Nei paragrafi precedenti si è ampiamente discusso degli effetti del non perfetto allineamento tra il piano di calibrazione ed il piano di misura e si è visto che, in taluni casi, anche piccoli errori di allineamento possono fornire misure molto diverse dal valore effettivo della velocità. Purtroppo, i limiti dell'attuale sistema di misura della PIV non consentono di ottenere allineamenti con il richiesto grado di accuratezza e rendono necessaria una correzione degli errori o quantomeno una valutazione accurata di questi ultimi.

Se si effettua la misura con un piano di luce ruotato senza adoperare il laser in fase per effettuare la calibrazione, non è possibile risalire in alcun modo al valore effettivo della velocità nei punti desiderati non avendo alcuna informazione su di essa. In questo caso si possono seguire due strade per tentare di ridurre gli errori. Un primo metodo consiste nel verificare l'entità del-

l'errore effettuando una misura su un campo di moto noto e nello spostare, successivamente, il piano di luce laser ripetendo la misura finché l'errore non si riduce ad un valore accettabile. Questa metodologia è praticabile soltanto se si possiede apparati in grado di regolare con una certa precisione la direzione del fascio di luce ed ha l'inconveniente di allungare notevolmente le operazioni di calibrazione del sistema PIV. Una seconda metodologia consiste nel determinare la posizione del piano di misura rispetto al piano di calibrazione e nel correggere gli errori di allineamento sulle velocità calcolate su detto piano; in tal modo si ottiene un campo di velocità privo di errori, sebbene valutato in un piano diverso da quello su cui è stata fatta la calibrazione. Quest'ultima metodologia sarà illustrata nei paragrafi successivi per le due tecniche di ricostruzione utilizzate nel presente lavoro di tesi. Infine, va ricordato sin d'ora che tutto quanto esposto finora e nei prossimi paragrafi è stato ottenuto ipotizzando che il fascio di luce laser sia piano. L'ipotesi nella pratica non è verificata e i risultati si possono estendere alle misure reali, assumendo come piano di misura il piano mediano del fascio laser. Per verificare la fondatezza di quest'ultima assunzione sono richieste accurate verifiche sperimentali.

5.3.1. Metodo con ricostruzione geometrica

Per poter effettuare una correzione sulle componenti misurate con la tecnica stereoscopica è necessario conoscere la posizione del piano di misura effettivo, determinando i parametri che compaiono nelle (5.55)-(5.56). Una volta calcolati i suddetti parametri, come si vedrà tra breve, la correzione degli errori diventa alquanto agevole.

In primo luogo si osservi che, se si indicano, con u_{es} , v_{es} , w_{es} , le componenti di velocità sul piano di misura che si proiettano sulla telecamera di sinistra e, con u_{ed} , v_{ed} , w_{ed} , le componenti del vettore velocità che si proietta sulla telecamera destra, in base alle (5.11), (5.17) e (5.27) si ha che le proiezioni misurate dalle telecamere nel punto (x_P, y_P) sono date da:

$$u_s'' = \frac{Hu_{es} + w_{es}(B + x_P)}{H - \Delta z_s - w_{es}} \quad (5.81)$$

$$v_s'' = \frac{Hv_{es} + y_P w_{es}}{H - \Delta z_s - w_{es}} \quad (5.82)$$

$$u_d'' = \frac{Hu_{ed} - w_{ed}(B - x_P)}{H - \Delta z_d - w_{ed}} \quad (5.83)$$

$$v_d'' = \frac{Hv_{ed} + y_P w_{ed}}{H - \Delta z_d - w_{ed}}. \quad (5.84)$$

Nota la geometria e misurate le proiezioni sulle due telecamere, le (5.81)-(5.84) costituiscono un sistema di 4 equazioni in 8 incognite e, pertanto, da una semplice misura di un campo di moto incognito non è possibile determinare né le componenti di velocità effettive, né le quantità Δz_s , Δz_d in alcun punto del piano di misura. Per chiudere il sistema e determinare queste ultime grandezze è perciò indispensabile avere maggiori informazioni sul campo di moto. Ad esempio, misurando le proiezioni di un campo di moto noto, è possibile determinare, attraverso le (5.81)-(5.84) e su ciascun punto della griglia Δz_s , Δz_d . Dalla matrice di dati così ottenuta si stimano i parametri necessari ad individuare l'orientazione del piano nello spazio nella maniera descritta di seguito.

Le equazioni che forniscono la posizione del piano, scritte come rapporto tra polinomi, assumono l'espressione²⁴:

$$\frac{\Delta z_s}{H} = \frac{a_0 + a_1 x_P + a_2 y_P}{a_3 + a_4 x_P + a_5 y_P} \quad (5.85)$$

²⁴ A rigore, per determinare i parametri dell'orientazione del piano di misura sarebbe sufficiente soltanto la (5.85). Tuttavia, per ridurre l'incertezza nella stima dei parametri, è preferibile utilizzare entrambe le espressioni.

$$\frac{\Delta z_d}{H} = \frac{b_0 + b_1 x_P + b_2 y_P}{b_3 + b_4 x_P + b_5 y_P} \quad (5.86)$$

dove i coefficienti $a_0 \dots a_5$ e $b_0 \dots b_5$ sono determinati con il metodo di Levenberg-Marquart e sono legati ai parametri del piano dalle relazioni:

$$a_0 = b_0 = \Delta z, \quad a_1 = b_1 = -\tan \alpha, \quad a_2 = b_2 = -\tan \beta \quad (5.87)$$

$$a_3 = H + B a_1, \quad b_3 = H - B b_1, \quad a_4 = b_4 = -\tan \alpha, \quad a_5 = b_5 = -\tan \beta. \quad (5.88)$$

Le (5.87)-(5.88) si possono esprimere più agevolmente in forma matriciale:

$$\underline{\underline{M}} \underline{x} = \underline{q} \quad (5.89)$$

dove il vettore delle incognite è costituito dai parametri del piano:

$$\underline{x} = \{\Delta z \quad \tan \alpha \quad \tan \beta\}^T, \quad (5.90)$$

il vettore dei termini noti è fornito da:

$$\underline{q} = \{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 - H \quad a_4 \quad a_5 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 - H \quad b_4 \quad b_5\}^T$$

e la matrice del sistema ha la forma seguente:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -B & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Il sistema (5.89) è sovradeterminato e una soluzione si ricava risolvendo il sistema ottenuto premoltiplicando per la trasposta della matrice $\underline{\underline{M}}$ entrambi i membri della (5.89), ossia:

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}} \underline{x} = \underline{\underline{M}}^T \underline{q}.$$

Una volta che siano stati determinati i parametri (5.90) è possibile effettuare la correzione sulle misure degli spostamenti. Allo scopo è sufficiente scrivere le formule di ricostruzione delle componenti nei punti di misura effettivi. Scegliendo di ricostruire con i valori relativi alla telecamera sinistra, le (5.1)-(5.3) diventano:

$$u_{es} = \frac{B(u_s^s + u_d^s) + x_P^s(u_d^s - u_s^s)}{2B + u_s^s - u_d^s} \quad (5.91)$$

$$v_{es} = \frac{y_P^s(u_d^s - u_s^s) + B(v_s^s + v_d^s)}{2B + u_s^s - u_d^s} \quad (5.92)$$

$$w_{es} = (H - \Delta z_s) \frac{u_s^s - u_d^s}{2B + u_s^s - u_d^s} \quad (5.93)$$

in cui l'apice s sta ad indicare che i valori che compaiono nella formula sono riferiti al punto del piano di misura e non al punto del piano di calibrazione. Le x_P^s e y_P^s sono date rispettivamente dalle (5.9) e (5.25) sostituendo Δz_s al posto di Δz , mentre le proiezioni da inserire nelle formule di ricostruzione sono espresse in funzione di quelle misurate dalle due telecamere da:

$$u_s^s = \frac{H - \Delta z_s}{H} u_s, \quad u_d^s = \frac{H - \Delta z_s}{H} u_d, \quad v_s^s = \frac{H - \Delta z_s}{H} v_s, \quad v_d^s = \frac{H - \Delta z_s}{H} v_d. \quad (5.94)$$

Per effettuare una ricostruzione corretta, però, è necessario che le proiezioni misurate dalle due telecamere siano relative allo stesso vettore. Ciò si ottiene prendendo le proiezioni sinistre u_s e v_s nel punto x_P, y_P e le proiezioni destre u_d e v_d nel punto $x_P - 2\Delta z_s B / (H - \Delta z_s), y_P$ del piano di calibrazione. Se si sceglie di effettuare il calcolo a partire dai valori calcolati con la telecamera destra, in maniera analoga si ricavano le relazioni:

$$u_{ed} = \frac{B(u_s^d + u_d^d) + x_P^d(u_d^d - u_s^d)}{2B + u_s^d - u_d^d} \quad (5.95)$$

$$v_{ed} = \frac{y_p^d (u_d^d - u_s^d) + B(v_s^d + v_d^d)}{2B + u_s^d - u_d^d} \quad (5.96)$$

$$w_{ed} = (H - \Delta z_d) \frac{u_s^d - u_d^d}{2B + u_s^d - u_d^d} \quad (5.97)$$

dove:

$$u_s^d = \frac{H - \Delta z_d}{H} u_s, \quad u_d^d = \frac{H - \Delta z_d}{H} u_d, \quad v_s^d = \frac{H - \Delta z_d}{H} v_s, \quad v_d^d = \frac{H - \Delta z_d}{H} v_d. \quad (5.98)$$

Le proiezioni sinistre u_s e v_s questa volta sono valutate nel punto $x_P + 2\Delta z_d B / (H - \Delta z_d)$, y_P mentre quelle destre u_d e v_d sono valutate nel punto x_P , y_P . Si noti che, essendo in generale il piano di misura ruotato rispetto a quello di calibrazione, la zona in comune inquadrata dalle due telecamere si riduce rispetto a quella calcolata in fase di calibrazione.

5.3.2. Metodo con mappatura tridimensionale

Utilizzando il metodo con mappatura tridimensionale la correzione delle velocità è immediata, mentre, come si vedrà tra breve, il calcolo della posizione del piano di misura presenta qualche difficoltà.

Innanzitutto, si osservi che anche con questo metodo non è possibile ricavare la posizione del piano di misura sfruttando il sistema di equazioni:

$$\overline{\Delta X}_A = (\nabla F)_A \overline{\Delta x}. \quad (5.99)$$

A differenza del metodo descritto nel paragrafo precedente, in questo caso non si può calcolare in maniera univoca la posizione del piano di misura neanche conoscendo il valore degli spostamenti effettivi nel fluido. Nel sistema (5.99) i termini noti sono i valori degli spostamenti effettivi, mentre le incognite sono costituite dalle coordinate spaziali del punto di cui è noto il vettore spostamento da cui dipendono sia i coefficienti della matrice di ingrandimento che i valori delle proiezioni misurate dalle due telecamere. Quest'ultima dipendenza risulta più chiara se si considera che al variare delle coordinate del punto in esame cambiano anche le coordinate del punto del piano immagine in cui è misurato lo spostamento. Poiché i singoli elementi della matrice di ingrandimento hanno una dipendenza cubica nelle coordinate x e y e quadratica in z , il sistema di equazioni che si ottiene è non lineare e non necessariamente ammette una soluzione univoca e/o possibile. D'altra parte, poiché il problema deve ammettere una soluzione fisica, si può ricercare una soluzione approssimata per tentativi, procedura questa che, rispetto al metodo con ricostruzione geometrica, presenta un onere computazionale notevole.

Una volta calcolati i valori delle coordinate effettive dei punti per ogni cella di interrogazione, resta il problema di determinare le quantità Δz_s , Δz_d . Per fare ciò bisogna stabilire la giusta corrispondenza tra i punti calcolati per tentativi ed i punti del piano di calibrazione; procedendo ancora una volta per tentativi, si può trovare il punto corrispondente del piano di calibrazione imponendo che questo abbia la stessa posizione sul piano della telecamera sinistra o destra rispettivamente. A questo punto il calcolo dei parametri del piano di misura avviene in maniera identica a quanto esposto al paragrafo precedente. Note le coordinate dei punti del piano di misura, le effettive componenti del vettore spostamento si calcolano banalmente determinando la matrice di ingrandimento e le proiezioni degli spostamenti corrispondenti ai suddetti punti.

6. TECNICHE DI MISURA DEI FLUSSI TERMICI

La misura dei flussi e/o dei coefficienti di scambio termico per convezione tra una superficie ed una corrente, richiedendo misure di temperatura, è usualmente più complessa di quella di altre grandezze fluidodinamiche di interesse. Infatti, nelle tecniche di misura ordinarie, per determinare lo scambio termico su di una superficie, si utilizzano i sensori di flusso termico generalmente costituiti da corpi a comportamento termico noto, la cui temperatura (o la variazione spaziale di temperatura, o la sua variazione temporale) è misurata in opportuni punti. Adottando un modello di sensore ed analizzandolo dal punto di vista della trasmissione del calore, si ricava la relazione attraverso la quale, a partire da misure di temperatura, è possibile risalire al flusso termico cui la superficie è sottoposta. Pertanto, la misura dei flussi termici convettivi comporta una duplice scelta: quella del modello fisico-matematico che meglio si adatta al problema oggetto di studio e quella dei sensori di temperatura più idonei. La scelta di un determinato sensore di flusso termico è legata all'ordine di grandezza delle variazioni spaziali e temporali del flusso termico stesso.

Utilizzando tecniche di tipo tradizionale (quali termocoppie, termoresistenze, pirometri) per la misura della temperatura, il sensore fornisce il flusso di calore locale in un solo punto e risulta zero-dimensionale. Le tecniche menzionate appaiono quindi inadeguate quando si studiano problematiche in cui sono presenti elevati gradienti spaziali dei flussi termici o qualora si richieda un'accurata visualizzazione dell'andamento del flusso termico sulla superficie di scambio.

Un primo passo verso il superamento dei limiti delle tecniche zero-dimensionali è rappresentato dall'uso di "cristalli liquidi incapsulati" (Cooper et al., 1975) che, in linea di principio, potrebbero essere considerati come sensori di temperatura bidimensionali in quanto consentono di visualizzare mappe superficiali di temperatura. Tuttavia, poiché il colore dei cristalli cambia in un piccolo intervallo di temperatura, si riesce a visualizzare una sola isotema alla volta rendendo la tecnica inefficace per misurazioni bidimensionali istantanee. Inoltre, un'altra limitazione è dovuta al non ampio intervallo di temperatura misurabile (tra -40 e 285°C).

I sensori di temperatura superficiale di corpi si distinguono in invasivi e non invasivi. I primi sono generalmente caratterizzati da una maggiore precisione, ma disturbano con la loro stessa presenza il fenomeno in osservazione. Sensori di temperatura considerati invasivi sono le termocoppie, i *thin films* e gli RTD e gli errori principali sono riconducibili essenzialmente a due cause: la variazione delle condizioni termiche, provocata dal sensore, nella zona circostante il punto nel quale esso è applicato (ad es., la conduzione attraverso i cavi della termocoppia) e la dimensione finita del sensore che consente di avere soltanto una misura mediata nello spazio anche in presenza di elevati gradienti di temperatura.

Infine, bisogna aver presente che, per avere una conoscenza dettagliata della distribuzione superficiale dei flussi termici, occorrono misurazioni sia qualitative che quantitative. Le prime sono generalmente invasive, mentre le seconde hanno lo svantaggio di essere zero-dimensionali. Le tecniche termografiche che utilizzano il radiometro a scansione nell'infrarosso (*Infrared Scanning Radiometer*, IRSR), o semplicemente termografo all'infrarosso, inglobano contemporaneamente le caratteristiche sia delle misure qualitative sia di quelle quantitative e, essendo bidimensionali e non invasive, permettono di superare i limiti di entrambe le tecniche. Nel seguito sono descritti più in dettaglio i modelli di sensori termici più utilizzati ed i principi fondamentali su cui si basa la tecnica termografica. Prima di addentrarsi nell'analisi è d'uopo effettuare qualche breve richiamo sullo scambio termico convettivo.

6.1. Scambio termico per convezione

Lo studio del trasporto di energia all'interfaccia tra una superficie solida ed un fluido costituisce uno dei problemi centrali in fluidodinamica ed in trasmissione del calore. Lo scambio termico per convezione si realizza mediante l'azione combinata del trasporto convettivo e diffusivo di energia; in prossimità della superficie solida il secondo effetto diventa preponderante.

Quando il moto del fluido è generato da forze di volume indotte da condizioni di disuniformità della densità in seno al fluido, oppure da forze superficiali legate a variazione della tensione superficiale, si parla di convezione libera o naturale. In questo caso la disuniformità stessa di alcune grandezze all'interno del campo di moto è causa della convezione (le forze spingenti sono costituite da condizioni al contorno disuniformi per la temperatura e/o per la concentrazione). Se, invece, il campo fluidodinamico è indotto da cause esterne (differenze di pressione e/o di velocità), si parla di convezione forzata. Evidentemente sono anche possibili situazioni in cui entrambi gli effetti sono rilevanti, in questo caso il fenomeno viene chiamato convezione mista.

L'equazione di Newton:

$$q_w = h_c (T_w - T_R) \quad (6.1)$$

descrive la dipendenza funzionale del flusso termico q_w all'interfaccia con la differenza tra la temperatura della parete T_w ed una opportuna temperatura di riferimento T_R . Inoltre, essa introduce il parametro h_c definito in trasmissione del calore come conduttanza convettiva o coefficiente di scambio termico convettivo. La (6.1) propone una fenomenologia lineare ed effettivamente il legame tra il flusso di calore e la differenza di temperatura può, in molti casi di interesse pratico, essere considerato di semplice proporzionalità. Tuttavia, h_c risulta funzione dei parametri geometrici, fluidodinamici e termofisici del sistema in esame. Per regimi di moto in cui questi ultimi sono intrinsecamente legati alle condizioni sulla temperatura (convezione libera), la conduttanza convettiva stessa porta con sé una forte dipendenza dalla differenza di temperatura ed il legame prima citato può divenire non lineare. Ciò non toglie che l'equazione di Newton rimane ancora valida nella definizione del parametro h_c .

In numerose applicazioni pratiche non è richiesta la conoscenza dell'intero campo di temperatura e di velocità, quanto piuttosto la conoscenza della quantità di calore scambiata tra il corpo e la corrente fluida. Tale quantità può essere espressa con l'aiuto del coefficiente di scambio termico convettivo, definibile tanto come grandezza locale quanto come quantità mediata sulla superficie in esame. Anche se la potenza termica, per unità di area, scambiata per convezione tra un solido ed un fluido è esprimibile mediante l'equazione di Newton, è fondamentale esprimere l'efficienza del trasporto di energia per convezione mediante un parametro adimensionale, in modo che sia possibile trovare una correlazione fra il gruppo di interesse ed i raggruppamenti adimensionali caratteristici del problema. Una possibile adimensionalizzazione (Kreith, 1973), che risulterà utile nel seguito, può essere ottenuta considerando il rapporto tra la conduttanza termica convettiva ed il trasporto per conduzione nel fluido.

Considerando un sistema di riferimento con asse y localmente normale alla superficie solida ed uscente da essa, in corrispondenza della superficie del corpo ($y = 0$), ritenendo, per l'ipotesi del continuo, le particelle di fluido ferme rispetto alla parete, lo scambio termico avviene esclusivamente per conduzione a causa della presenza di un gradiente di temperatura alla parete. Allontanandosi dalla superficie, invece, il moto del fluido contribuisce al trasporto di energia e quindi si realizza un gradiente di temperature meno intenso. Poiché, come si è già detto, all'interfaccia solido-fluido ($y = 0$) il calore fluisce solo per conduzione, in accordo con la legge di Fourier, si può scrivere:

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (6.2)$$

e, ricordando la (6.1) si ricava:

$$h_c (T_w - T_R) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (6.3)$$

dove k rappresenta la conducibilità termica del fluido.

Introducendo una lunghezza di riferimento L e ponendo:

$$T^* = \frac{T_w - T}{T_w - T_R}, \quad y^* = \frac{y}{L} \quad (6.4)$$

la derivata parziale a secondo membro della (6.3) in forma adimensionale diventa:

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_{y=0} = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{T_w - T_R}{L}} = \frac{h_c L}{k} \quad (6.5)$$

Il gruppo dimensionale a destra della (6.5) è conosciuto come numero di Nusselt (Nu). In genere il numero di Nusselt, oltre a dipendere in maniera complessa dalle grandezze geometriche, è funzione anche di altri numeri adimensionali, caratteristici del problema, che possono essere: Gr , Pr , Re , Ec e M , a seconda dei casi. In base alla sua definizione, il numero di Nusselt esprime l'importanza relativa della conduttanza convettiva rispetto a quella conduttiva, ovvero relativa allo stesso sistema ma con il fluido in quiete. È quindi ovvio che ci si debba aspettare che i valori che il Nusselt può assumere siano maggiori dell'unità e tanto più elevati quanto più forte risulta la convezione forzata.

Riscrivendo l'equazione di Newton, tenendo conto della definizione del numero di Nusselt, il flusso termico diventa:

$$q_w = Nu \frac{k}{L} (T_w - T_R). \quad (6.6)$$

In base alla (6.6) e dalla conoscenza di q_w , k , L , T_R e dalla misura di T_w , è così possibile valutare la distribuzione superficiale del numero di Nusselt.

6.2. Sensori di flusso termico

Le metodologie per la misura del flusso termico si distinguono in tre categorie a seconda che ci si trovi in condizioni di tipo instazionario, quasi stazionario o stazionario. Ciascuno dei tre casi è analizzato nei paragrafi successivi, facendo riferimento alla Figura 6.1 in cui è rappresentato lo schema generico di un sensore di flusso termico avente spessore L e temperature e flussi alle superfici pari a T_1 , T_2 e q_1 , q_2 rispettivamente.

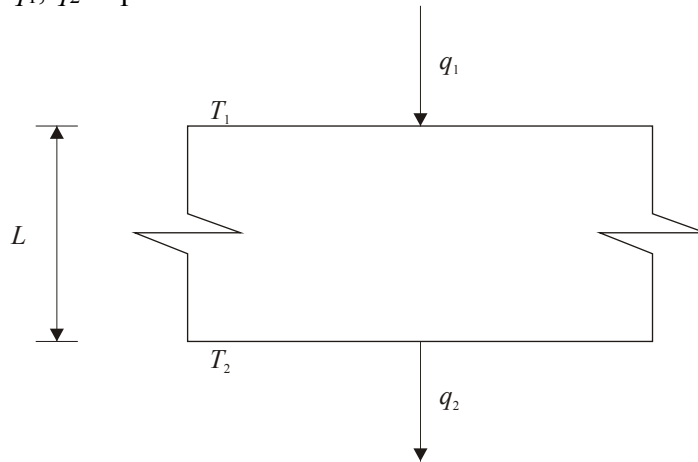


Figura 6.1 Schema generico del sensore di flusso termico.

6.2.1. Flussi instazionari

Per analizzare i flussi in stazionari (Carlomagno & de Luca, 1989), si supponga che il flusso termico q_1 vari in funzione del tempo t con legge sinusoidale del tipo:

$$q_1 = |q_1| \sin(\phi t) \quad (6.7)$$

dove ϕ è la frequenza della sollecitazione termica. Quest'ultima deve essere confrontata con la frequenza caratteristica del sistema α/L^2 che rappresenta l'inverso del tempo impiegato dal sensore per adeguarsi alle variazioni di temperatura. L , come già detto, rappresenta lo spessore del sensore termico, mentre con α si è indicata la diffusività termica del sensore. Per confrontare le suddette frequenze, però, è necessario fissare il flusso q_2 agente sulla parte interna del sensore

(vedi Figura 6.1).

Assumendo $q_2 = 0$, si hanno situazioni diverse a seconda del valore assunto dal rapporto $\phi/(\alpha/L^2)$. Per valori elevati del rapporto il tempo di adeguamento alle mutate condizioni di temperatura è così elevato da poter ritenere che solo la superficie 1, investita dal flusso, risenta di tali variazioni, mentre la superficie 2 si può considerare in condizioni praticamente stazionarie. In tal caso, il modello fisico-matematico descrittivo del fenomeno assume il nome di *thin film* e viene studiato mediante la teoria della parete semi-infinita, che mette in relazione la temperatura T_1 con il flusso di calore in direzione normale al sensore. In presenza di questo tipo di fenomenologia l'utilizzo del termografo sembra facilmente realizzabile; il problema risiede, però, nel suo tempo di risposta relativamente elevato (dell'ordine del decimo di secondo), mentre nelle tecniche ordinarie il *thin film* è associato a misure tramite termoresistenze o termocoppie con tempi di risposta dell'ordine dei microsecondi.

Quando invece il rapporto $\phi/(\alpha/L^2)$ assume valori molto piccoli, il tempo di adeguamento del sensore è così breve che consente di potersi considerare isoterma istante per istante. In tal caso il modello fisico-matematico assume il nome di *thin skin*, o pelle sottile: in esso il sensore è considerato come un calorimetro ideale (quindi la sua temperatura può essere considerata costante attraverso il suo spessore) riscaldato su una faccia e termicamente isolato dall'altra e si può caratterizzare con le condizioni $T_1 = T_2 = T$; $q_2 = 0$. In questo caso l'uso del termografo si rivela vantaggioso rispetto alle altre tecniche di misura in quanto la misurazione della temperatura viene effettuata sulla superficie riscaldata che diviene, alle alte frequenze, quella adiabatica risultando insensibile alle fluttuazioni del flusso termico.

6.2.2. Flussi quasi stazionari

In presenza di flussi termici quasi stazionari, un metodo classico è quello di usare il sensore a gradiente, il cui modello fisico-matematico resta sempre quello rappresentato in Figura 6.1 con $q_1 = q_2 = q$: in tal modo si cerca di calcolare il flusso termico in direzione normale alla superficie mediante la misura della differenza di temperatura ΔT tra le due facce del sensore. La difficoltà principale di questo metodo (che può prevedere comunque l'utilizzo del termografo) risiede nell'impossibilità di misurare in modo semplice la distribuzione di temperatura su entrambe le facce dello strato metallico.

6.2.3. Flussi stazionari

La metodologia utilizzata nel presente lavoro, relativa alla misura di un flusso termico stazionario, assume il nome di *heated thin foil* (Carlomagno & de Luca, 1989). Lo schema di questo tipo di sensore è quello riportato in Figura 6.2. La misura del coefficiente di scambio termico h tra il corpo ed una corrente d'aria su esso incidente si effettua dopo aver riscaldato per effetto Joule un sottile strato di materiale metallico ricoprente la superficie del corpo ed aver raggiunto le condizioni stazionarie. La superficie opposta a quella su cui avviene lo scambio termico, tra il corpo ed il flusso d'aria, deve essere resa adiabatica. Affinché sia valida la metodologia di misura il flusso termico superficiale deve essere mantenuto costante ed il numero di Biot relativo al corpo deve essere molto inferiore all'unità. La seconda condizione garantisce l'assenza di gradienti di temperatura lungo lo spessore dello strato riscaldato (da cui il nome *heated thin foil*). Anche in questo caso la superficie inquadrata dal termografo può essere opposta a quella su cui avviene lo scambio termico tra corpo ed aria. Se si opera tale scelta, bisognerà realizzare un opportuno sistema per ottenere la condizione di adiabaticità (a meno dei flussi radiativi naturalmente) con l'ambiente esterno.

Assumendo un coefficiente di scambio termico h costante sulla superficie del sensore, esso può essere calcolato attraverso la relazione:

$$h = \frac{q_j - q_r - q_n}{T_w - T_R} \quad (6.8)$$

dove q_j è la potenza termica per unità di superficie dissipata per effetto Joule, q_r è la potenza

termica per unità di superficie dissipata per irraggiamento, q_n è l'eventuale potenza termica per unità di superficie dissipata per convezione naturale, T_w è la temperatura del corpo a contatto con il fluido e T_R , infine, è la temperatura di riferimento che solitamente coincide con la temperatura di parete adiabatica T_{aw} .

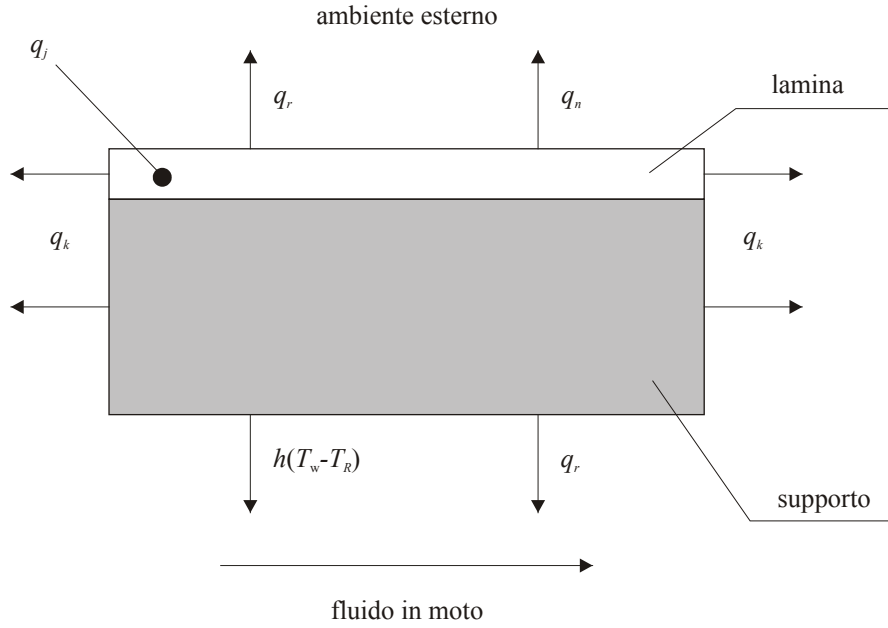


Figura 6.2 Schema del sensore di flusso termico *heated thin foil*,

Il modello *heated thin foil*, se associato ad un'opportuna tecnica di misura delle temperature, si estende facilmente alle misure bidimensionali. In tal caso, per tenere in conto anche gli effetti dovuti alla potenza termica q_k per unità di superficie dissipata per conduzione in direzione tangenziale (all'interno del sensore), la (6.8) si modifica nella seguente relazione:

$$h = \frac{q_j - q_r - q_n - q_k}{T_w - T_{aw}} \quad (6.9)$$

Utilizzando un termografo all'infrarosso, il suddetto modello permette di effettuare delle rapide visualizzazioni della mappa bidimensionale dello scambio termico convettivo superficiale. Si noti che, poiché il flusso termico q_j è costante, se i termine dissipativi sono trascurabili oppure sono uniformemente distribuiti sulla superficie di misura, le curve a temperatura costante rappresentano anche linee a coefficiente di scambio termico convettivo costante.

Per calcolare il coefficiente di scambio termico convettivo, è necessario determinare ciascuno dei termini che compaiono nell'equazione (6.9). Il termine dissipato per effetto Joule si calcola facilmente misurando la potenza elettrica dissipata dal circuito riscaldante, mentre il termine dovuto all'irraggiamento su ciascun punto della superficie di coordinate x, y si calcola con la nota formula:

$$q_r(x, y) = \sigma \varepsilon [T_w^4(x, y) - T_a^4] \quad (6.10)$$

dove σ è la costante di Boltzman, ε è il coefficiente di emissività della superficie di misura e T_a è la temperatura ambiente. Il termine dovuto alla convezione naturale²⁵, qualora non sia trascurabile, è dato dalla relazione:

$$q_n(x, y) = h_n [T_w(x, y) - T_a] \quad (6.11)$$

dove h_n è il coefficiente di scambio termico dovuto alla convezione naturale e può essere stimato sperimentalmente.

²⁵ Il contributo della convezione naturale è generalmente trascurabile sulla superficie a contatto con il fluido quando la velocità del fluido è sufficientemente elevata. Sulla parete opposta, invece, se non è stata resa adiabatica, il termine relativo alla convezione naturale può non essere trascurabile e va calcolato in accordo con la (6.11).

I contributi (6.10) e (6.11), a rigore, possono essere calcolati anche se si suppone che il sensore termico sia zero-dimensionale, in quanto essi dipendono da grandezze che possono essere misurate puntualmente ed il loro effetto è quello di ridurre i gradienti di temperatura. Il contributo dovuto alla conduzione tangenziale è, invece, intrinsecamente bidimensionale e, se si considera un bilancio di energia in condizioni stazionarie in un materiale omogeneo ed isotropo, si ottiene:

$$q_k(x, y) = -sk \nabla^2 T(x, y) \quad (6.12)$$

dove s e k sono lo spessore e la conducibilità termica della lamina (nel caso in esame un circuito stampato). La determinazione della potenza termica dissipata per conduzione tangenziale, a causa della forma della (6.12), presenta qualche inconveniente. Infatti, il sistema termografico genera rumore ad alta frequenza e l'applicazione dell'operatore Laplaciano discreto, tendendo ad amplificare proprio le frequenze più elevate, fa sì che i risultati siano affetti da un rumore elevato. Per ridurre il problema, pertanto, è necessario effettuare una operazione di filtraggio delle immagini termografiche.

Quando si utilizza un corpo disomogeneo ed anisotropo (Astarita & Cardone, 2000), la (6.12) assume un'espressione leggermente più complessa. Sia per semplificare l'analisi sia perché questa è la reale condizione utilizzata, nel seguito si supporrà che il materiale, anche se anisotropo e disomogeneo, abbia comunque due direzioni principali, poste a 90° l'una rispetto all'altra, lungo le quali le caratteristiche fisiche siano costanti. Infatti, per le prove sperimentali, è stato utilizzato come elemento riscaldante un circuito stampato, schematicamente rappresentato in Figura 6.3, le cui piste conduttive di rame (di spessore s_r) formano una greca su un supporto di vetronite di spessore s_v . Inoltre, come già detto, si supporrà che il numero di Biot sia molto minore dell'unità, in modo da poter considerare il sensore di flusso termico isoterma attraverso il suo spessore.

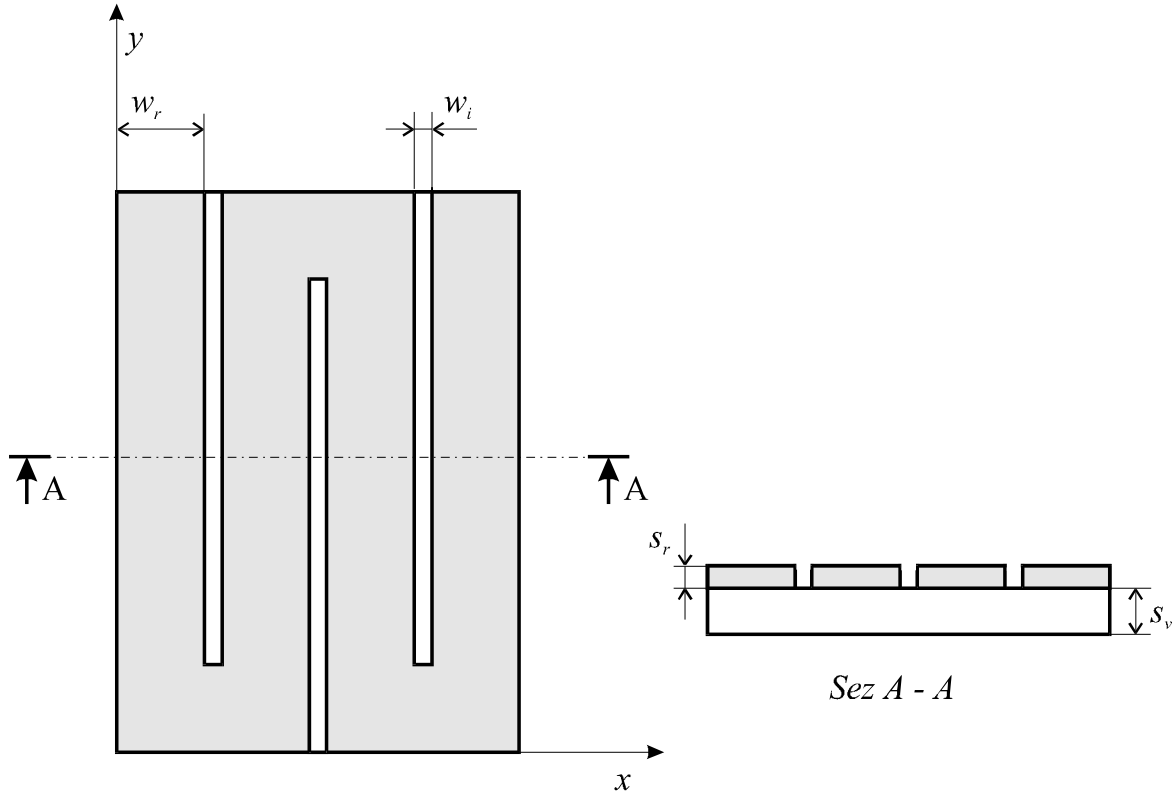


Figura 6.3 Schema di un circuito stampato.

Da un punto di vista teorico (utilizzando l'approccio del continuo) le disuniformità spaziali del materiale non dovrebbero generare alcuna difficoltà. Infatti, se si considera che lo spessore e la conducibilità termica sono funzioni note delle coordinate spaziali, la (6.12) diventa:

$$q_k(x, y) = -\nabla \cdot [s(x, y) \underline{k}(x, y) \cdot \nabla T(x, y)] \quad (6.13)$$

dove \underline{k} è il tensore conducibilità termica. È interessante notare che, se s e \underline{k} (considerate come

funzioni delle coordinate spaziali) sono discontinue, viene a mancare comunque l'ipotesi fondamentale del continuo. In pratica, pur conoscendo esattamente la distribuzione spaziale di s e k , utilizzando una tecnica termografica, non è possibile conoscere con esattezza la posizione fisica di ogni pixel, anche perché spesso la dimensione del pixel può essere maggiore della lunghezza caratteristica della disuniformità. Un approccio semplificato, che qui verrà applicato al caso di un circuito stampato di spessore supposto costante, si può basare su una separazione degli effetti dovuti alle piste di rame ed a quelli dovuti al supporto di vetronite.

Il problema dell'anisotropia, nelle ipotesi fatte, può essere facilmente risolto considerando, al posto dell'operatore Laplaciano, le derivate parziali seconde. La (6.13) scritta in un riferimento cartesiano in cui gli assi sono paralleli alle due direzioni principali e trascurando gli effetti incrociati diventa:

$$q_k(x, y) = -s \left[k_x(x, y) \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + k_y(x, y) \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right]. \quad (6.14)$$

6.3. Elementi di termografia all'infrarosso

Il termografo all'infrarosso è uno strumento in grado di effettuare una misura bidimensionale della radiazione emessa, in una banda dell'infrarosso, dalla superficie di un corpo (solido o liquido purché opaco in tale banda). Conoscendo l'emissività superficiale del corpo in esame è possibile risalire dalla mappa della radiazione alla mappa di temperatura attraverso una calibrazione dello strumento. I termografi possono differire tra loro per il tipo ed il numero dei sensori, per la banda dell'infrarosso in cui lavorano, per il metodo di raffreddamento del sensore, per l'intensità del segnale e per i supporti periferici utilizzati per l'elaborazione dei dati.

L'analisi dettagliata di tutte le caratteristiche principali dei termografi esula dallo scopo del presente lavoro, perciò nei paragrafi seguenti ci si limiterà ad esporre gli aspetti principali della tecnica. Anche in questo caso, prima di procedere in dettaglio è utile effettuare qualche breve richiamo sulla trasmissione del calore per irraggiamento.

6.3.1. Scambio termico per irraggiamento

Come è noto, tutti i corpi irradiano energia sotto forma di onde elettromagnetiche con uno spettro di emissione che dipende dalla temperatura e dalle caratteristiche superficiali dei corpi stessi. Per un corpo nero, lo spettro di potenza irradiato per unità di superficie alla temperatura T al variare della lunghezza d'onda λ è fornita dalla legge di Planck:

$$E_{n\lambda}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (6.15)$$

dove $E_{n\lambda}$ indica la densità spettrale di emissione e le due costanti dimensionali C_1 e C_2 sono date da:

$$C_1 = 2\pi h c^2 = 3.74 \cdot 10^8 \frac{W \mu m}{m^2} \text{ e } C_2 = \frac{hc}{k} = 1.44 \cdot 10^4 \mu m K.$$

Integrando la (6.15) su tutto l'intervallo di valori della lunghezza d'onda si ricava la nota legge di Stefan-Boltzmann sull'irraggiamento:

$$E_n = \int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (6.16)$$

in cui σ è la costante di Stefan-Boltzmann pari a $5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$. Lo spettro di emissione per un corpo nero a diverse temperature è riportato in Figura 6.4(a). La lunghezza d'onda λ_{max} alla quale è massimo il potere di emissione è data dalla legge di Wien:

$$\lambda_{max} T = 2898 \mu m K \quad (6.17)$$

che, in corrispondenza della temperatura ambiente, fornisce il valore $\lambda_{max} = 10 \mu m$.

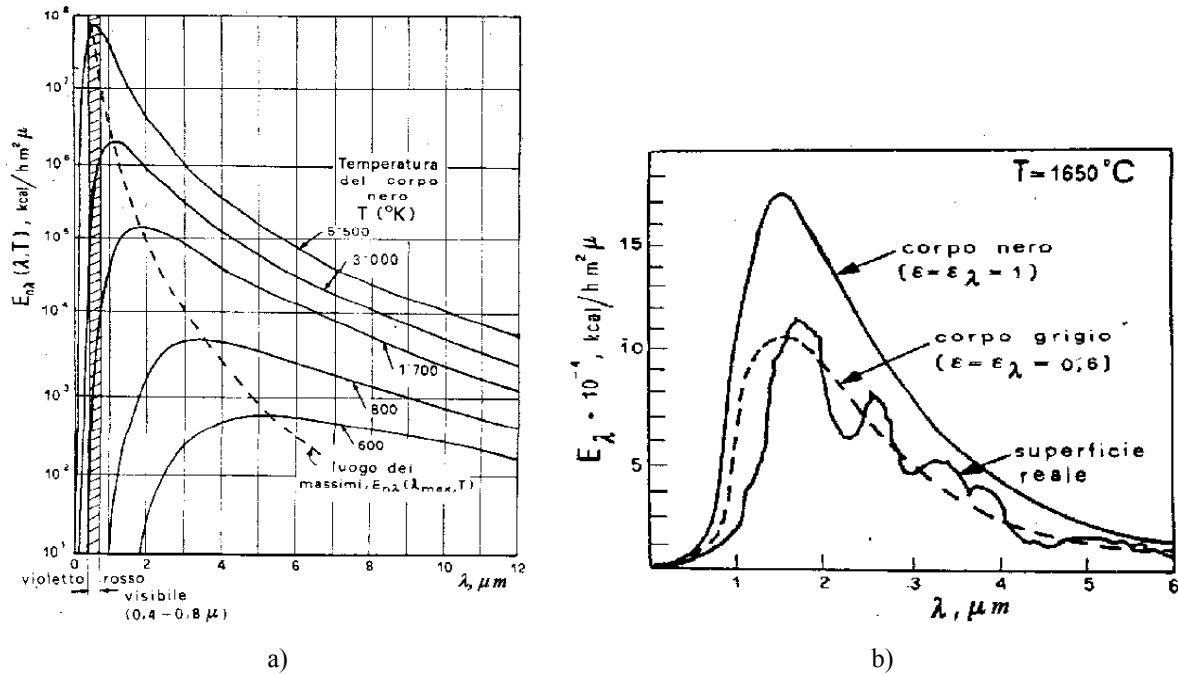


Figura 6.4 a) Spettro di emissione di un corpo nero per diversi valori della temperatura. b) Confronto tra gli spettri di emissione di un corpo nero e di uno grigio con quello di una superficie reale alla temperatura di 1650°C .

Le superfici reali emettono in genere, a parità di temperatura, solo una frazione dell'energia emessa da un corpo nero, espressa in generale dal parametro ϵ_λ detto *emissività emisferica monodimensionale* e dipendente dalla superficie e dalla temperatura del corpo, dalla lunghezza d'onda di emissione e da altri fattori. L'introduzione della grandezza ϵ_λ fa sì che le equazioni (6.15) e (6.16) si modifichino nelle:

$$E_\lambda = \epsilon_\lambda E_{n\lambda}(\lambda, T) = \frac{\epsilon_\lambda C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (6.18)$$

$$E = \int_0^\infty \epsilon_\lambda E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda \quad (6.19)$$

Se, in aggiunta, ϵ_λ è indipendente dalla lunghezza d'onda (ossia il corpo emette a qualsiasi lunghezza d'onda la stessa frazione di energia emessa dal corpo nero) si parla di corpo grigio e la legge di Stefan-Boltzmann si modifica nella seguente:

$$E = \epsilon \sigma T^4 \quad (6.20)$$

dove ϵ è l'emissività emisferica totale (rapporto tra il potere emissivo del corpo in esame e quello di un corpo nero che si trovi alla stessa temperatura), in questo caso coincidente con l'emissività emisferica monodimensionale. In Figura 6.4(b), a titolo di esempio, è riportato il confronto tra gli spettri di un corpo nero, uno grigio ed uno reale.

Dopo aver richiamato le leggi fondamentali dell'irraggiamento, occorre capire come si possa risalire al valore di temperatura a partire dalla misura di energia da parte del sensore. Ciò sarà illustrato più in dettaglio nel paragrafo successivo. In questa fase ci si limiterà ad osservare che, poiché il trasduttore del termografo è sensibile in una banda ristretta dell'infrarosso, le misure effettuate seguono in linea di principio la legge di Planck. Infine, è utile ricordare che la regione dell'infrarosso (IR) dello spettro della radiazione elettromagnetica, la cui banda ha lunghezza d'onda compresa tra 0.72 e $1000 \mu\text{m}$, viene generalmente suddivisa in quattro zone:

- IR vicino con radiazione di lunghezza d'onda compresa tra 0.75 e $3 \mu\text{m}$;

- IR intermedio con radiazione di lunghezza d'onda compresa tra 3 e 6 μm ;
- IR lontano con radiazione di lunghezza d'onda compresa tra 6 e 15 μm ;
- IR estremo con radiazione di lunghezza d'onda compresa tra 15 e 1000 μm .

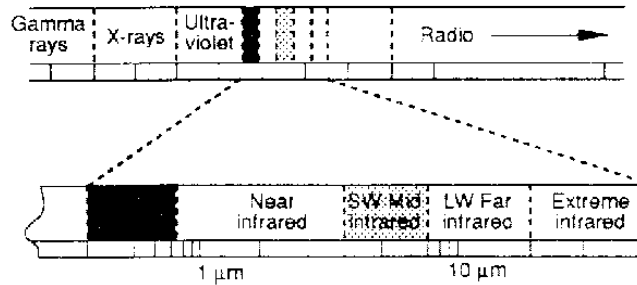


Figura 6.5 Spettro della radiazione elettromagnetica e suddivisione della banda dell'infrarosso.

6.3.2. Caratteristiche dei sensori

Attualmente i tipi di sensori utilizzati per la termografia sono classificati in due categorie che mostrano una diversa sensibilità alla radiazione infrarossa: i *thermal detectors* ed i *photon detectors*.

I *thermal detectors* sono quelli più diffusi e, per misurare l'irraggiamento di un corpo, utilizzano la variazione di resistenza elettrica di una pellicola di semiconduttore indotta dall'impatto della radiazione su di essa. Le caratteristiche principali di questa categoria di sensori sono un segnale d'uscita piatto, che si può ritenere praticamente costante in un ampio intervallo di lunghezze d'onda, ed il tempo di risposta relativamente lungo rispetto ai *photon detectors*. Il segnale P rilevato da un *thermal detector* risulta proporzionale con buona approssimazione alla potenza radiante assorbita, cioè:

$$P(T) = \int_{\lambda_c}^{\lambda_c + \Delta\lambda} E_{\lambda}(\lambda, T) \varepsilon_{\lambda}(T, \beta) R(\lambda) d\lambda \quad (6.21)$$

dove $R(\lambda)$ è la risposta dello strumento, β è l'angolo formato fra la normale alla superficie che emette e l'asse di vista, λ_c e $\Delta\lambda$ sono rispettivamente il limite inferiore e l'ampiezza della banda di sensibilità dello strumento. Per un corpo grigio, la (6.21) diventa:

$$P(T) = \varepsilon(\beta) \int_{\lambda_c}^{\lambda_c + \Delta\lambda} E_{\lambda}(\lambda, T) R(\lambda) d\lambda = \varepsilon(\beta) P_n(T) \quad (6.22)$$

dove $P_n(T)$ è il segnale ottenuto da un corpo nero alla stessa temperatura.

I *photon detectors*, invece, sono costituiti da materiali semiconduttori che emettono cariche elettriche in misura proporzionale all'aliquota di energia radiante incidente; è in questa categoria che devono essere inseriti i sensori fotoconduttivi e fotovoltaici. Nei primi la radiazione incidente libera un flusso di cariche elettriche provocando un aumento della conducibilità del sensore, nei secondi le cariche elettriche sono trascinate via da un campo elettrico dando luogo ad una differenza di potenziale. Entrambi i tipi di *photon detectors* sono realizzati con un materiale semiconduttore in cui il rilascio (fotoconduttivi) o il trasferimento (fotovoltaici) dei portatori di carica è direttamente proporzionale all'assorbimento dei fotoni incidenti. L'energia del fotone è, come si vedrà in seguito, inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda ad esso associata e la scomparsa dell'attività fotoelettrica a lunghezza d'onda più elevata della lunghezza d'onda di taglio λ_c (cut off in inglese) indica che l'energia associata ai fotoni non è sufficiente a liberare gli elettroni. In altri termini, i fotoni devono superare il cosiddetto 'salto di energia proibito' (forbidden energy gap) E_g nel materiale semiconduttore. La lunghezza d'onda di taglio è data da:

$$\lambda_c = \frac{hc}{E_g} \quad (6.23)$$

In generale, il valore di E_g cresce quando la temperatura diminuisce; di conseguenza, la lunghezza d'onda di taglio decresce quando il sensore viene raffreddato. Da ciò si deduce che questo tipo di sensore deve operare ad una temperatura molto bassa.

Per valutare la radiazione emessa dal corpo, ossia il numero di fotoni, si consideri che l'energia associata ad un singolo fotone è data da:

$$Q = \frac{hc}{\lambda} \quad (6.24)$$

da cui, tenendo conto della (6.15), si ricava il numero di fotoni $N_{n\lambda}$ emessi da un corpo nero per unità di superficie e di tempo e per una particolare lunghezza d'onda λ :

$$N_{n\lambda} = \frac{E_{n\lambda}(T, \lambda)}{Q} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right]^{-1} \quad (6.25)$$

Integrando su tutto lo spettro si giunge ad una dipendenza cubica rispetto alla temperatura del tipo:

$$N_n = \int_0^\infty N_{n\lambda} d\lambda = \frac{0.37}{k} \sigma T^3 \quad (6.26)$$

in cui N_n rappresenta ovviamente il numero complessivo di fotoni emessi per unità di superficie e di tempo. Poiché, di fatto, i sensori sono sensibili soltanto ad una banda di lunghezze d'onda, l'integrale che compare nella (6.26) va esteso soltanto all'intervallo di valori compreso tra λ_c e $\lambda_c + \Delta\lambda$. Di solito, le finestre di valori utilizzate per i sensori sono quelle ad onde corte e quelle ad onde lunghe. Nel primo caso, il sensore è generalmente costituito da Antimoniuro di Indio e dà una risposta relativamente elevata per lunghezze d'onda comprese tra 3.5 e 5.6 μm anche se si può far scendere il limite inferiore a circa 2 μm ; le lenti e i materiali ottici sono in silicio con rivestimento antiriflesso che assicura un massimo di trasmittanza ad una lunghezza d'onda di circa 5 μm . Nel campo delle lunghezze d'onda maggiori, il sensore è di Cadmio-Mercurio-Tellurio e fornisce una risposta elevata tra 8 e 14 μm ; la parte ottica dello strumento è costituita di Germanio con un rivestimento antiriflesso avente un picco di trasmittanza a circa 10 μm . La scelta del campo di lunghezza d'onda di lavoro dipende da diversi fattori. Alcune superfici hanno un coefficiente di emissività maggiore a lunghezze d'onda minori rendendo possibile l'impiego di sensori più economici del tipo SbIn. Quando si lavora nella banda a bassa lunghezza d'onda, non si riesce ad avere elevata precisione per distanze tra sensore e corpo maggiori di un metro anche in condizioni favorevoli di trasmittanza del mezzo. La presenza di vapore d'acqua può infatti dare luogo ad apprezzabili errori di misura difficilmente correggibili per atmosfere non controllate.

L'elemento sensibile descritto finora, come accade per la maggior parte dei sensori, è generalmente zero-dimensionale, e, per effettuare misure bidimensionali, bisogna disporre di un opportuno sistema di scansione. Quest'ultimo consta di una serie di specchi mobili e/o elementi rifrattivi combinati tra loro che consentono sia una scansione orizzontale che verticale del campo di vista.

Per analizzare le prestazioni di un radiometro a scansione nell'infrarosso occorre analizzare alcuni parametri che ne definiscono le caratteristiche: sensibilità termica, velocità di scansione, risoluzione spaziale dell'immagine e risoluzione dell'intensità del segnale.

Per capire il grado di precisione di una misura termografica, occorre tenere presente che la potenza emessa viene irradiata per effetto dei singoli fotoni il cui tempo di emissione è casuale; tale emissione casuale produce una variazione nell'intensità del segnale emesso dal sensore definita come rumore termico. Il parametro che fornisce l'ordine di grandezza del rumore è la *sensibilità* di una telecamera all'infrarosso espressa dalla quantità NETD (acronimo di Noise Equivalent Temperature Difference) che è la differenza di temperatura tra due immagini corrispondente ad un segnale uguale a quello del rumore di fondo. Il valore del NETD viene valutato ad una temperatura nota del campione in esame ed oscilla generalmente tra 0.07 e 0.5 °C per temperature dell'ordine di poche decine di gradi centigradi.

Un altro parametro importante è la *velocità di scansione*, definita come la velocità alla quale le immagini termiche vengono ‘riprese’ attraverso il meccanismo di scansione. Il campo di vista totale è acquisito dai sistemi di scansione orizzontale e verticale in un certo numero di linee e colonne; possono quindi definirsi una velocità di scansione per linea, una velocità di scansione per campo ed una per immagine. Si ricordi che, analogamente a quanto accade per i sensori CCD, un’immagine è composta da un certo numero di campi, spesso tra di loro interlacciati. Il fattore di interlacciamento, dato dal rapporto tra la velocità di scansione per campo e per immagine, è tipicamente pari a 2 o 4. Nel caso di immagini non interlacciate le due velocità ovviamente coincidono.

La *risoluzione spaziale* indica la capacità spaziale del sistema di individuare e misurare correttamente la temperatura in zone della superficie di dimensioni ridotte; questa caratteristica dipende dal tipo di sensore, dalle sue dimensioni e dal tempo di risposta. Per una data velocità di scansione, la grandezza del sensore determina in generale la risoluzione spaziale delle immagini. Queste sono quasi sempre digitalizzate elettronicamente in pixel molto più piccoli degli elementi con cui viene risolta l’immagine dal sensore. Generalmente la risoluzione dell’immagine è definita o mediante il campo di vista istantaneo del sensore (Instantaneous Field Of View o IFOV), o dal numero di IFOV che sono compresi nel campo di vista totale (FOV). In teoria, l’IFOV è dato dall’angolo corrispondente al rapporto tra l’ampiezza del sensore e la lunghezza focale della lente e viene espresso in *mrad*; tuttavia, questa è solo una definizione ideale (geometrica) in quanto, in pratica, ciò che interessa stabilire è la minima dimensione dell’oggetto o finestra termicamente distinguibile dal sensore per un determinato valore del contrasto. È conveniente allo scopo caratterizzare il sistema di registrazione delle immagini termiche con la risposta del sistema ad una fenditura di vari spessori. Al variare dello spessore si ottiene una curva che è detta funzione di risposta alla fenditura (Slit Response Function o SRF) e che in linea di principio può essere diversa in orizzontale ed in verticale. Così, un certo valore percentuale di SRF fornisce lo spessore della fenditura per la quale la temperatura mostrata è la stessa frazione percentuale del valore effettivo. I costruttori solitamente forniscono per l’IFOV il valore corrispondente a SRF=50%.

Infine, la *risoluzione in intensità* è, invece, quella che definisce la capacità del sistema termografico di risolvere una differenza di temperatura in un certo numero di gradazioni di grigio, ovvero di livelli digitali di intensità. Viene anche detta campo dinamico della misura ed è espressa attraverso il numero di livelli di grigio usati nel digitalizzare l’immagine termica. Tipici valori sono 256 oppure 4096 (8 o 12 bit). Un intervallo di temperatura tipicamente misurabile da un termografo è compreso tra $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $800\text{ }^{\circ}\text{C}$; tale intervallo può essere esteso anche a temperature superiori mediante l’impiego di opportuni filtri che diminuiscono l’energia che incide sull’elemento sensibile.

6.3.3. Calibrazione

Nell’effettuare le misure di temperatura con un termografo uno dei problemi principali risiede nella corretta conversione della radiazione rilevata dal sensore in temperatura effettiva del corpo. La trasformazione dell’uscita digitale dello strumento in temperatura può essere affetta da diversi errori per varie ragioni tra cui la non linearità tra la temperatura e la potenza assorbita dal sensore, l’alterazione del segnale dovuta alla presenza di ostacoli quali finestre di accesso ottico e la presenza dell’ambiente esterno che, attraverso riflessioni ed emissioni, può influenzare il livello della radiazione che raggiunge il sensore. In definitiva, le variabili che influenzano maggiormente la qualità di una misura termografica sono l’emissività del corpo in esame, d’ora in poi supposto opaco, le condizioni dell’ambiente circostante, le dimensioni dell’oggetto, l’angolo di vista della telecamera, le caratteristiche del mezzo interposto e degli eventuali corpi solidi trasparenti o riflettenti interposti lungo il cammino ottico.

L’emissività della superficie di misura deve essere quanto più elevata possibile per migliorare la sensibilità del sistema termografico ed è un dato che occorre conoscere a priori. Nota l’emissività, il coefficiente di riflessione di un corpo opaco ρ , in base alla legge di Kirchhoff, è dato da:

$$\rho = 1 - \varepsilon \quad (6.27)$$

per cui un corpo con bassa emissività non solo emette meno di un corpo nero ma riflette in maniera maggiore l'energia irradiata dall'ambiente. È quindi importante, per limitare queste riflessioni, che ρ sia piccolo mentre, per effettuarne una stima, l'ambiente deve avere una temperatura uniforme e nota. Per quanto riguarda le condizioni del mezzo interposto, esse influenzano la misura attraverso il coefficiente di assorbimento. Se quest'ultimo è alto, il mezzo (in generale l'atmosfera) trattiene parte delle radiazioni emesse dal corpo impedendo ad esse di raggiungere il sensore e ne emette a sua volta.

Con riferimento allo schema riportato in Figura 6.6, se si indicano con S' la radiazione effettivamente assorbita dal sensore e con S_o , S_a e S_{atm} le radiazioni emesse rispettivamente dall'oggetto di cui si vuole misurare la temperatura (di corpo nero), dall'ambiente (ivi inclusa la presenza della eventuale finestra di accesso ottico) e dall'atmosfera, tutte espresse in fotoni/sec, il bilancio sul sensore del termografo si scrive:

$$S' = \tau \varepsilon S_o + \tau(1 - \varepsilon)S_a + (1 - \tau)S_{atm} \quad (6.28)$$

dove τ è il coefficiente di trasmittanza dell'aria. Poiché i livelli I misurati dal termografo sono proporzionali alla radiazione attraverso la costante C , ossia $I = C \cdot S$, la (6.28) può essere riscritta in termini di livelli del segnale di uscita, ottenendo:

$$I' = \tau \varepsilon I_o + \tau(1 - \varepsilon)I_a + (1 - \tau)I_{atm} \quad (6.29)$$

I valori I_o , I_a , I_{atm} sono quelli corrispondenti rispettivamente alle temperature del corpo, dell'ambiente e dell'atmosfera; I' è invece il valore misurato dallo strumento. Conoscendo i valori del coefficiente τ del mezzo e dell'emissività ε del corpo ed i livelli I_a ed I_{atm} attraverso la conoscenza della temperatura dell'ambiente e quella del mezzo interposto, dalla (6.29) si può calcolare il livello I_o e da questo determinare la temperatura effettiva dell'oggetto.

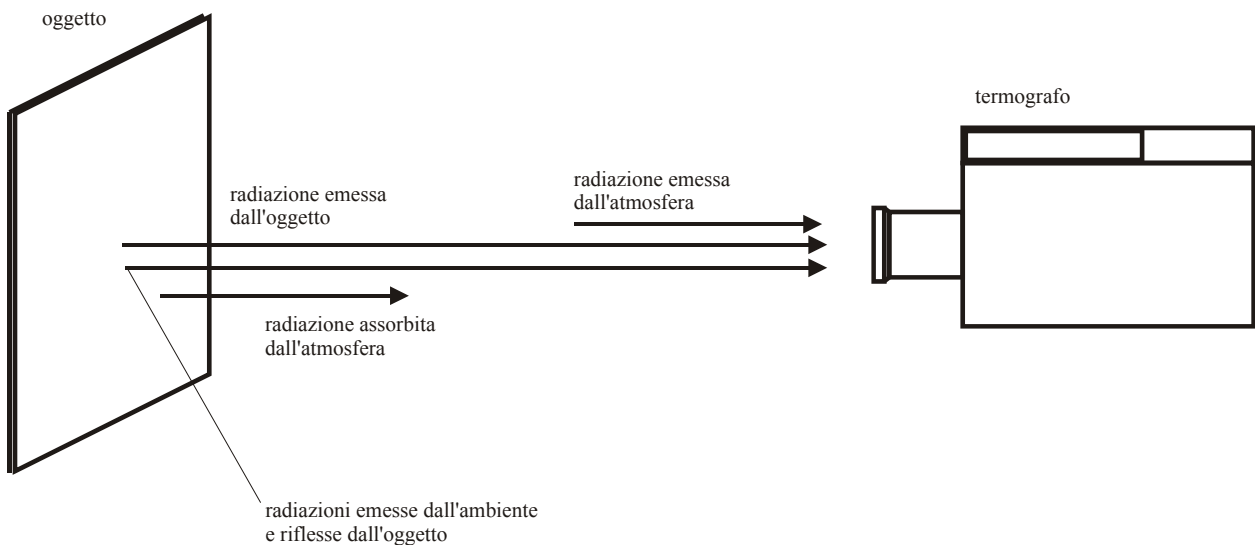


Figura 6.6 Schematizzazione delle radiazioni che raggiungono il termografo.

Per poter effettuare la conversione tra i livelli misurati dal termografo e le temperature corrispondenti, è necessario trovare in maniera sperimentale la legge di corrispondenza attraverso la calibrazione dello strumento. La relazione analitica che si adatta meglio allo scopo è, come accennato in precedenza, analoga alla legge di Planck e può essere riscritta nella forma:

$$I = \frac{R}{e^{\frac{B}{T}} - F} \quad (6.30)$$

dove R , B , F sono le tre costanti di calibrazione che dipendono, per esempio, dall'apertura del diaframma della telecamera, dalla eventuale presenza di una finestra di accesso ottico e dall'uso eventuale di filtri. Le costanti di calibrazione, relative a tutto il campo di misura, vengono in ge-

nere fornite dalla casa costruttrice; quando si eseguono misure quantitative in condizioni diverse, è bene determinarle in situ relativamente al campo di misura di interesse. Note le costanti, invertendo la relazione (6.30) si ottiene l'espressione di T in funzione di I :

$$T = \frac{B}{\ln\left(F + \frac{R}{I}\right)}. \quad (6.31)$$

Per determinare le costanti di calibrazione è necessario misurare sperimentalmente alcune coppie di valori corrispondenti di T e I_o e, successivamente, stimare i valori delle costanti R , B e F utilizzando un metodo di interpolazione. Un metodo per calcolare le coppie di valori consiste nel misurare sperimentalmente la temperatura ed il livello del segnale per un corpo nero. Un'ottima approssimazione di corpo nero con temperatura regolabile si ottiene nel seguente modo. Si realizza un corpo cavo di rame molto puro nel quale si pratica un foro di dimensioni piccole rispetto a quelle della cavità. Le superfici esterne della cavità sono coibentate per garantirne l'adiabaticità, mentre le superfici interne sono caratterizzate da un'elevata emissività e sono mantenute a temperatura nota da una serpentina, anch'essa di rame e ad esse saldata, nella quale si fa circolare un opportuno fluido (acqua distillata) a temperatura controllata proveniente da un bagno termostatico di elevata precisione.

Generalmente la procedura di calibrazione viene eseguita in condizioni quanto più vicine a quelle di prova e le coppie di valori sono calcolate per un intervallo di temperatura leggermente maggiore di quello che si rende necessario durante le prove sperimentali al fine di avere una migliore accuratezza. Infine, si osservi che nel misurare il livello di segnale corrispondente alla temperatura del corpo nero occorre utilizzare l'espressione (6.29). Per un corpo nero, essendo l'emissività unitaria, il secondo termine a secondo membro dell'equazione risulta nullo, mentre il termine dovuto all'atmosfera è non nullo soltanto per $\tau \neq 1$. Nel caso in cui il mezzo interposto sia costituito dall'aria, il coefficiente di trasmittanza è all'incirca unitario ed anche il termine relativo all'atmosfera diventa trascurabile. In quest'ultima circostanza, per ottenere I_o , non è necessario effettuare alcuna correzione sul valore del livello registrato dal termografo. Qualora il coefficiente di trasmittanza del mezzo interposto non sia unitario non è possibile utilizzare direttamente i livelli misurati dal termografo ai fini della calibrazione. In questo caso, pur essendo noto τ , non si può calcolare I_o poiché sarebbe necessario calcolare la quantità I_{atm} e ciò imporrebbe la conoscenza delle costanti di calibrazione che, invece, è proprio quanto si vuole determinare attraverso la calibrazione. In definitiva, per effettuare misure in un mezzo con elevato assorbimento, si può fare una calibrazione con corpo nero in aria e conoscendo il coefficiente di assorbimento del mezzo, effettuare il calcolo corretto attraverso la (6.29). In alternativa, si può effettuare la calibrazione nelle stesse condizioni di misura (come se il mezzo di interposizione avesse trasmittanza unitaria), inglobando così l'effetto dell'assorbimento del mezzo all'interno delle costanti R , B e F .

7. ANALISI TERMOFLUIDODINAMICHE SU GETTI IN UN FLUSSO TRASVERSALE

Prima di passare in dettaglio all'analisi degli apparati utilizzati e dei risultati delle prove sperimentali, è utile esaminare lo stato dell'arte nel campo di indagine del presente lavoro di tesi. Nei paragrafi successivi è fatta una breve introduzione sull'argomento e si riportano alcuni dei risultati ottenuti da diversi autori negli ultimi anni.

7.1. Introduzione

Lo studio dei getti in un flusso trasversale è stato oggetto di numerose indagini sperimentali negli ultimi cinquant'anni, a causa dell'enorme importanza che riveste in molte applicazioni ingegneristiche quali l'immissione di getti in camera di combustione, il raffreddamento delle pale delle turbine, la dinamica di velivoli V/STOL in voli di transizione ed i dispositivi di scarico in acqua e nell'atmosfera. La grande varietà di applicazioni ha fatto sì che gli studi si siano indirizzati sia verso l'analisi del campo di moto e delle caratteristiche di turbolenza, sia verso la comprensione dei fenomeni di scambio termico indotti dai getti. Nel seguito sono introdotti brevemente i due campi di indagine, nei paragrafi seguenti sono riportati i risultati più importanti ottenuti dagli autori delle sperimentazioni.

Si parla di getto in un flusso trasversale (o getto in cross-flow, JCF) ogni qualvolta un flusso secondario (getto) si immette trasversalmente in un flusso principale (vedi Figura 7.1). L'interazione tra i due flussi dà luogo ad un campo di moto turbolento molto complesso in particolar modo in corrispondenza della parete dalla quale il getto emerge. Molte delle difficoltà che si incontrano nello studio di questo fenomeno sono dovute ai numerosi parametri che influenzano il comportamento del getto tra i quali la geometria del sistema di iniezione, il rapporto di iniezione ed il numero di Reynolds. Una volta scelta la configurazione geometrica da esaminare, diventano determinanti soltanto gli ultimi due parametri. Il numero di Reynolds è generalmente definito utilizzando come grandezze di riferimento il diametro D del condotto di uscita del getto e la velocità del flusso trasversale u_∞ , anche se, in letteratura, non mancano esempi di analisi effettuate utilizzando come parametri di riferimento quelli del getto. Tuttavia, per tenere distinti gli effetti della velocità del flusso principale da quelli del flusso secondario, nel presente lavoro si è preferito riferire il numero di Reynolds alle grandezze della corrente principale. Il numero di Reynolds, sia se lo si riferisca al getto sia se lo si riferisca al flusso trasversale, incide principalmente sulle strutture vorticosi e sugli strati viscosi del getto.

Generalmente, si definisce rapporto di iniezione R la radice quadrata del rapporto tra il flusso della quantità di moto del getto e quello della corrente principale:

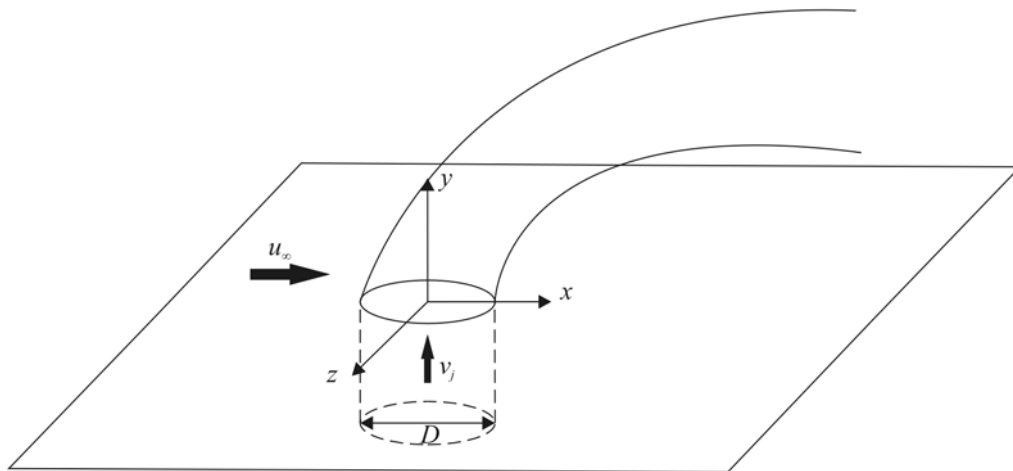


Figura 7.1 Rappresentazione schematica di un getto in cross-flow.

$$R = \left(\frac{\rho_j v_j^2}{\rho_\infty u_\infty^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.1)$$

Con ρ_j e v_j si sono indicate rispettivamente la densità e la velocità media nella sezione del condotto da cui emerge il getto e, supponendo che i due flussi intersecatisi abbiano la stessa densità, il rapporto di iniezione assume la forma semplificata:

$$R = \frac{v_j}{u_\infty} \quad (7.2)$$

e, perciò, spesso ci si riferisce ad esso anche con il nome di rapporto di velocità. Questo parametro influenza fortemente il campo di moto ed in particolare la curvatura del getto. Dagli studi orientati all'analisi del campo di velocità si sono individuate o dedotte numerose strutture vortico- se in particolare nella scia e nella zona di confine tra il getto e la corrente principale. Una rappresentazione schematica delle principali strutture vortico- se è riportata in Figura 7.2 e sarà analizza- ta più in dettaglio nel prossimo paragrafo.

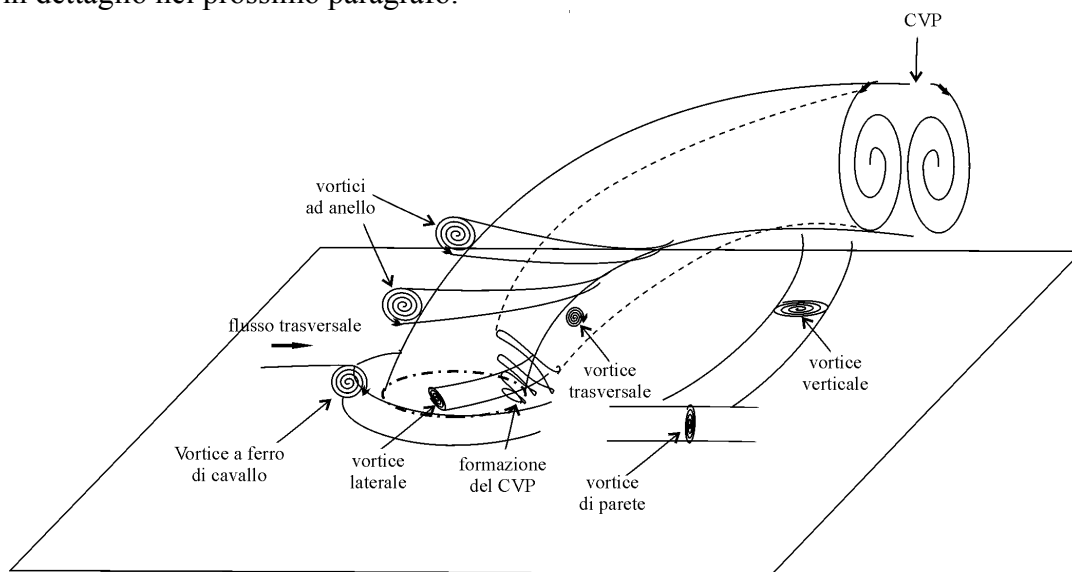


Figura 7.2 Rappresentazione schematica delle principali strutture vortico- se che si originano dall'interazione di un getto che si immette ortogonalmente in un flusso trasversale.

Tra le maggiori applicazioni del getto in cross-flow rientrano i metodi di raffreddamento di componenti meccanici e, per questo, molti studi si sono focalizzati sull'analisi dello scambio termico della superficie raffreddata. Come è noto, infatti, numerosi componenti di motori per jet, veicoli e razzi spaziali sono esposti ad alte temperature. La necessità di migliorare i parametri tecnici ed economici delle unità delle turbine, in particolare, ha richiesto un crescente aumento della temperatura del gas in camera di combustione e nei primi stadi dell'espansione. Uno dei metodi di raffreddamento più pratici ed efficaci è il raffreddamento per effusione noto anche come *film cooling*, in cui un fluido (generalmente gas) è iniettato nello strato limite della parete da proteggere attraverso una fessura o dei piccoli fori. Il fluido iniettato tende ad agire come strato isolante tra la parete ed il fluido ad alta temperatura o, alternativamente, agisce da diluente in grado di ridurre la temperatura dello strato limite. In molte applicazioni, inoltre, il sistema di iniezione del fluido è costituito da una fessura, da una o più file di fessure o, più recentemente, da file o array bidimensionali di fori con una determinata spaziatura lungo la superficie.

Un modo di analizzare il problema consiste nel determinare separatamente la temperatura di parete adiabatica ed il coefficiente di scambio termico convettivo. La prima si analizza in forma adimensionale introducendo l'efficienza η del film cooling:

$$\eta = \frac{T_0 - T_{aw}}{T_0 - T_j} \quad (7.3)$$

dove T_0 è la temperatura di ristagno della corrente libera, T_{aw} è la temperatura di parete adiabatica e T_j è la temperatura del gas iniettato. Si tenga presente che l'efficienza dovrebbe teoricamente essere unitaria in prossimità dell'iniezione e dovrebbe tendere a zero più a valle non appena la temperatura di parete adiabatica raggiunge il valore della temperatura di ristagno del flusso. Nella pratica, soprattutto nel film cooling tridimensionale (film cooling con fori distribuiti lungo la superficie), il valore dell'efficienza è molto inferiore all'unità già a breve distanza dall'ingresso. Infine, come si è visto nel capitolo precedente, la temperatura di parete adiabatica si può utilizzare anche per stimare il coefficiente di scambio termico. Eckert (1984) è stato il primo a fornire metodi per calcolare lo scambio termico in sistemi con raffreddamento per effusione a partire da coefficienti di scambio termico adiabatici ed iso-energetici. Il valore del coefficiente di scambio termico alla parete calcolato in tal modo lontano dall'iniezione tende a raggiungere il valore che si avrebbe sulla stessa superficie e con lo stesso flusso libero senza l'immissione del getto.

7.2. Studi sui campi di moto e sulla turbolenza

I primi studi sulle caratteristiche del campo di moto generato dai getti in un flusso trasversale risalgono agli anni '60-'70 e, principalmente, hanno avuto come oggetto di indagine l'analisi delle caratteristiche principali del campo di moto in corrispondenza della regione di uscita di un getto fuoriuscente da un condotto a sezione circolare ortogonalmente alla parete per valori di R elevati (Keffer & Baines, 1963; Moussa et al., 1977; Bergeles et al., 1976).

Andreopoulos & Rodi (1984), utilizzando l'anemometria a filo caldo con una sonda tripla, sono stati i primi ad effettuare misure accurate sul campo di moto e sulle caratteristiche della turbolenza in prossimità della sezione di uscita del getto. Gli autori, basandosi sulle proprie misure e sulle misure di visualizzazione del flusso di Foss (1980), hanno dedotto l'origine e le caratteristiche delle principali strutture vorticosche che si originano dall'interazione dei due flussi. Le principali strutture individuate, in accordo con le visualizzazioni con fumo illuminato da laser di Fric & Roshko (1994), sono mostrate in Figura 7.2 e sono elencate di seguito.

- *Vortici a ferro di cavallo o a staffa* (horseshoe vortices)
I vortici a ferro di cavallo si formano nella regione a monte del getto e lungo i bordi laterali in prossimità della parete in maniera analoga alla deviazione che subisce lo strato limite incontrando un ostacolo.
- *Coppia di vortici contro-rotanti* (CVP o counter-rotating vortex pair)
Nella regione sottovento del getto si forma una coppia di vortici contro-rotanti che rimane attaccata alla superficie posteriore del getto e dà al getto una forma simile ad un rene. Secondo gli autori, questa coppia di vortici si origina dalla riorientazione della vorticità uscente dal condotto e dalla vorticità generata dalla superficie di separazione tra il getto ed il flusso trasversale.
- *Vortici ad anello* (ring vortices)
I vortici ad anello, tipici dei getti liberi, sono stati osservati su entrambi i lati del getto e si originano prevalentemente dagli strati viscosi di quest'ultimo.
- *Vortici di scia* (wake vortices)
Come suggerisce il nome, questi vortici si formano nella scia del getto e sono prevalentemente di due tipi: *vortici di parete* (wall vortices) che si sviluppano in prossimità della parete a valle del getto e *vortici verticali* (upright vortices) che sono generati dall'interazione del getto con lo strato limite.

A differenza degli studi ad alti rapporti di iniezione fatti in precedenza (Crabb et al., 1981) in cui il getto tende ad assumere le caratteristiche di un moto non-viscoso, Andreopoulos & Rodi (1984) hanno effettuato misure per valori di R compresi tra 0.5 e 2 e per numeri di Reynolds riferiti alla velocità di uscita del getto pari a 20'500, 41'000 e 82'000. Gli autori hanno riportato un'analisi dettagliata del campo di moto medio e degli sforzi di Reynolds al variare del rapporto

di iniezione. Per piccoli valori di R il getto è deviato bruscamente dal flusso trasversale e, nel caso $R = 0.5$ la deviazione è quasi completa già nella parte posteriore del condotto di uscita. Al crescere di R il getto penetra maggiormente all'interno della corrente principale e la curvatura risultante è molto più graduale. Il flusso trasversale incidente è deviato attorno al getto e per piccoli R viene in parte sollevato e deviato al di sopra del getto. Nella parte sottovento del getto si sviluppa una regione di scia con difetto di velocità e piccoli gradienti di velocità nella direzione della corrente. Questa regione cresce al crescere del rapporto di iniezione e la conseguente riduzione di pressione induce nella regione un flusso laterale ed un piegatura del getto verso la parete. In prossimità della parete è presente anche una piccola zona di inversione del flusso. In definitiva, per $R = 0.5$ il flusso principale agisce quasi da tappo per il getto e la deviazione ha inizio all'interno del condotto. Come riportato in Figura 7.3, le linee di flusso sono fortemente incurvate e la curvatura agisce in maniera tale da stabilizzare la turbolenza nella parte a valle e stabilizzarla in quella a monte. In generale, sebbene in talune regioni gli sforzi di Reynolds dipendano dai corrispondenti gradienti di velocità, tuttavia il modello della viscosità turbolenta non risulta completamente adeguato.

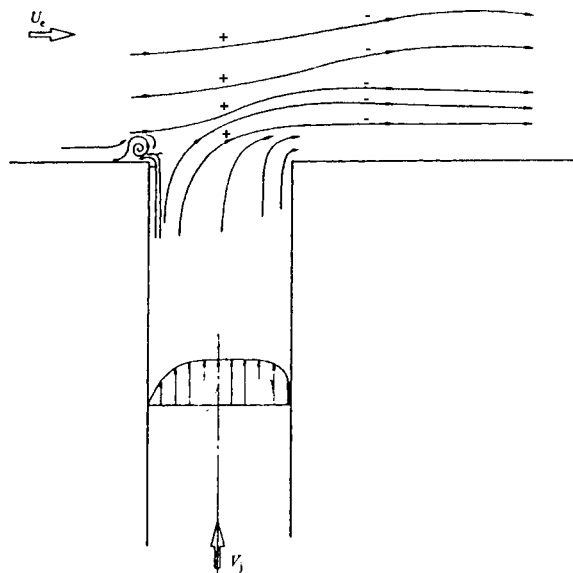


Figura 7.3 Andamento delle linee di flusso dedotto da Andreopoulos & Rodi (1984) per $R = 0.5$ nel piano di simmetria del getto: (+) instabile; (-) stabile.

Contemporaneamente alle analisi sperimentali, molte simulazioni numeriche sono state effettuate allo scopo di comprendere meglio la dinamica della vorticità ed il meccanismo di formazione dei vortici. Sykes et al. (1986) hanno presentato i risultati della simulazione numerica di un getto completamente tridimensionale per rapporti di velocità $R = 2, 4$ e 8 e per valori elevati del numero di Reynolds. Gli autori hanno trovato che, per rapporti di iniezione elevati, la sorgente della vorticità nella direzione del flusso trasversale può essere ricondotta alla vorticità che si origina ai lati del getto verticale mentre, per bassi rapporti di iniezione ($R \leq 4$), diventa importante la componente verticale di vorticità presente alla sorgente. Coelho & Hunt (1989) hanno utilizzato un modello tridimensionale non-viscoso con superficie vorticoso per studiare la dinamica di un getto in un flusso trasversale. Essi hanno trovato che il meccanismo essenziale di questo flusso ideale può essere collegato alla generazione di vorticità addizionale all'interno del condotto prodotto dai gradienti di pressione indotti dal flusso esterno e dalla convezione di vorticità dal lato a monte a quello a valle del getto. Per ottenere risultati coerenti con le misure sperimentali, il calcolo numerico deve includere gli effetti dell'*entrainment* turbolento ed il trasporto della componente di vorticità trasversale.

Kelso et al. (1996) hanno studiato la struttura di un getto in cross-flow utilizzando misurazioni con anemometria a filo caldo e visualizzazioni di flusso con gocce di vernice in acqua e fumo

in galleria del vento. L'analisi è stata effettuata per valori del rapporto di iniezione compresi tra 2 e 6 e per numeri di Reynolds basati sul diametro del getto e sulla velocità del flusso principale nell'intervallo 440-6200. Dalle prove nel canale con acqua a $R = 2.3$ e $Re = 940$ gli autori hanno riscontrato la presenza di un vortice stazionario staccato dalla parete in corrispondenza dell'uscita del getto. Questo vortice, detto *vortice fluttuante* (hovering vortex), si avvolge sul lato a monte e sui bordi del getto, contribuendo alla vorticità della coppia di vortici contro-rotanti. Il vortice fluttuante occasionalmente diventa instabile e dà origine ad un treno di avvolgimenti ed anelli vorticosi che negli strati viscosi. Lo strato viscoso del getto risulta laminare e presenta un'instabilità di Kelvin-Helmholtz a circa tre diametri dall'uscita. In Figura 7.4 è rappresentata l'interpretazione data dagli autori per questo tipo di flusso. Quando gli strati superficiali del getto si arrotolano a causa della instabilità di Kelvin-Helmholtz, nella zona posteriore del getto non sono presenti avvolgimento degli strati viscosi. Al crescere del numero di Reynolds l'instabilità di Kelvin-Helmholtz comincia sempre più vicina all'uscita del getto finché il vortice fluttuante crea anelli vorticosi periodicamente. Per un numero di Reynolds pari a 1600 e rapporti di iniezione da 2.2 a 4.0, i vortici ad anello sono periodici anche senza l'applicazione di alcun forzamento. Gli anelli vorticosi sono inizialmente deviati verso il basso a monte del getto e, man mano che gli anelli si spostano lungo la direzione del getto, il piano contenente la parte a monte degli anelli ruota in verso orario mantenendosi approssimativamente ortogonale all'asse del getto. Secondo gli autori gli anelli vorticosi si piegano in due parti: la parte a monte il cui piano si inclina secondo la curvatura del getto e la parte a valle il cui piano si allinea con la direzione del getto e le cui parti laterali contribuiscono alla circolazione della coppia di vortici contro-rotanti. Il vortice a ferro di cavallo nelle misure nel canale ad acqua è risultato stazionario senza il processo di distacco dei vortici sebbene una piccola oscillazione sembra essere indotta dalla instabilità degli strati viscosi del getto. Il comportamento di questa struttura vorticoso è qualitativamente simile al variare del numero di Reynolds e del rapporto di iniezione. Per valori di $Re > 1600$ gli autori non ne hanno riscontrato la presenza. Inoltre, a bassi numeri di Reynolds è stato trovato che i vortici a ferro di cavallo aventi per la vorticità lo stesso segno della vorticità dello strato limite della parete si estendono a valle e sono incorporati nel sistema di vortici della scia, mentre quelli aventi vorticità di segno opposto si distaccano dalla parete e si fondono con la coppia di vortici contro-rotanti.

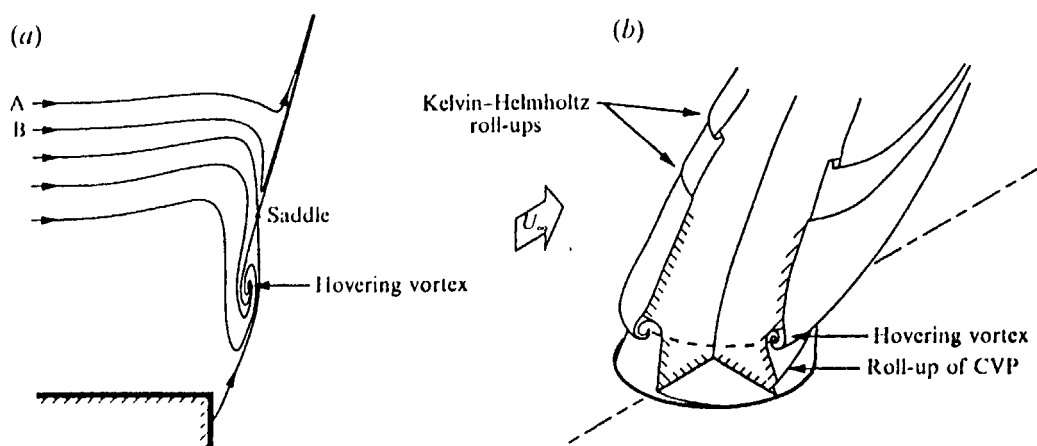


Figura 7.4 Interpretazione di Kelso et al. (1996) del vortice fluttuante per $Re = 940$ ed $R = 2.3$. (a) Vista in sezione del lato a monte del getto; (b) vista prospettica del getto.

Kelso et al. (1996), oltre alle visualizzazioni con fumo in galleria del vento, hanno effettuato misure con anemometria a filo caldo per $Re = 6200$ ed $R = 2.2$. Per limitare i problemi di misura dovuti all'instazionarietà del processo, gli autori hanno misurato il campo di moto ottenuto a $Re = 440$ e $R = 6$ riscontrando una similitudine con il campo di moto medio misurato agli altri regimi. In Figura 7.5 è riportato l'andamento delle linee di flusso vicino alla parete insieme a quello nel piano verticale dedotto in base alle misure ed alle visualizzazioni. A monte dell'uscita del

getto sulla parete, nella zona in cui si forma il sistema di vortici a ferro di cavallo, la distribuzione del flusso superficiale presenta una serie di linee di biforcazione²⁶ positive e negative. Queste linee di biforcazione giacciono lungo i bordi frontali e laterali del getto convergendo verso il lato posteriore ed avvolgendosi a spirale in un punto focale²⁷ A adiacente al getto. Un secondo fuoco B è posizionato a monte di A. Questi punti critici sono definiti come le posizioni in cui il fluido si avvolge a spirale e si allontana dalla parete. Sul lato a valle del getto, l'andamento del flusso presenta un punto nodale lungo l'asse di simmetria e due punti di sella su ciascun lato e le linee di biforcazione su cui si trovano i punti di sella si estendono ulteriormente a valle. Le linee di flusso del piano di simmetria verticale presentano un punto nodale G a valle del getto e, a monte, i vortici menzionati in precedenza, ossia il vortice fluttuante ed il vortice a ferro di cavallo. In Figura 7.5 è mostrata anche una sezione trasversale del flusso secondo il piano A-A tra il nodo C ed il lato a valle del condotto. Nella sezione è riportata la posizione di un vortice di parete, mentre il vortice a staffa non è stato incluso nel disegno. Il punto di separazione E nella sezione A-A corrisponde alla linea di biforcazione negativa sulla parete, il punto di sella I corrisponde alla linea di biforcazione positiva lungo l'asse x ed il punto di sella H staccato dalla parete corrisponde ad una linea di flusso localmente orizzontale che parte dal punto G.

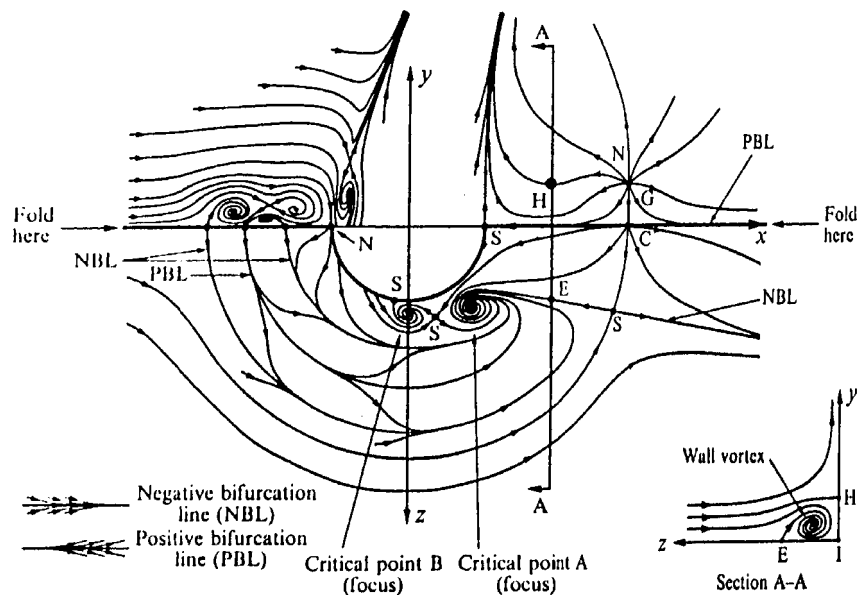


Figura 7.5 Distribuzione delle linee di flusso composte secondo Kelso et al. (1996). La lettera S indica un punto di sella, la lettera N un nodo, e gli acronimi NBL ed NPL le linee di biforcazione positive e negative rispettivamente.

Dagli studi sui vortici di scia gli autori precedentemente citati hanno trovato che i vortici verticali tendono ad essere distribuiti più regolarmente al crescere del numero di Reynolds e per rapporti di iniezione superiori a tre. In base alle visualizzazioni di Fric & Roshko (1994) si è visto che ad alti numeri di Reynolds la distribuzione dei vortici di scia evolve da una configurazione all'altra. Come mostrato in Figura 7.6, tipicamente la distribuzione dei vortici di scia segue l'andamento classico della scia di vortici di von Kármán, invece, in altri casi, la struttura dei vortici di scia è simile ad un fungo in cui i vortici appaiono raggruppati in coppie con circuitazione

²⁶ Le linee di biforcazione positiva (o linee di attacco) sono le linee su una superficie da cui le linee di flusso si allontanano, mentre le linee di biforcazione negativa (o linee di separazione) sono le linee su una superficie verso le quali le linee di flusso sono attratte.

²⁷ Si ricorda che i punti critici sono definiti come i punti a velocità nulla nei quali la pendenza della linea di flusso è indeterminata. I punti critici possono essere di 3 tipologie: punti di sella, punti nodali (o nodi), punti focali (o fuochi). Si ha un punto focale quando un autovalore del tensore gradiente della velocità (o matrice Jacobiana della velocità) è reale e gli altri due sono complessi coniugati. Per un flusso incompressibile, quando tutti e tre gli autovalori sono reali si ha un punto di sella in due piani e un nodo nel terzo. Per un flusso compressibile è possibile avere un nodo in ciascun piano.

opposta. È possibile che la scia di von Kármán evolva in una struttura a fungo, ma ciò raramente accade a breve distanza. L'orientazione dei vortici verticali cambia in maniera intermittente da un tipo all'altro e, per giustificare le suddette osservazioni, vengono ipotizzati tre meccanismi differenti.

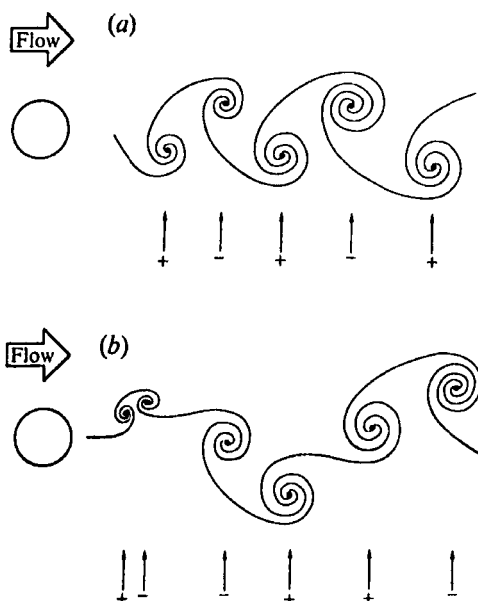


Figura 7.6 Interpretazione di Kelso et al. (1996) della distribuzione dei vortici di scia in base alle visualizzazioni mostrate da Fric & Roshko (1994). (a) Interpretazione delle tipiche sezioni orizzontali delle linee di fumo. (b) Interpretazione per $R = 0.4$, $z/D = 0.5$ e $Re = 11'400$. I simboli + e - indicano il verso di rotazione dei vortici.

Negli anni successivi sono stati effettuati numerosi studi concernenti alcuni aspetti particolari del fenomeno del getto in un flusso trasversale. Alcuni autori, come Zaman & Foss (1997), hanno studiato l'effetto di un generatore di vortici sulle caratteristiche del getto, trovando che, quando è collocato sul lato controvento, un tab genera una vorticità che è opposta a quella della coppia di vortici contro-rotanti, facendone diminuire la forza e riducendone la penetrazione. Altri autori (Eiff & Keffer, 1997) hanno studiato con sonde anemometriche a 45° le strutture vorticosi che si generano nella regione di scia di un getto turbolento in un flusso trasversale fuoriuscente da un condotto rialzato rispetto alla parete, mentre altri ancora (Haven & Kurosaka, 1997) hanno studiato l'effetto della geometria del foro di uscita sulle caratteristiche dei getti in cross-flow. Smith & Mungal (1998) hanno analizzato il mescolamento ed i fattori di scala di un getto utilizzando la tecnica PLIF (Planar Laser-Induced Fluorescence) per rapporti di iniezione compresi tra 5 e 25 e per valori del numero di Reynolds basato sulla velocità di uscita del getto nell'intervallo 664-3300. Gli autori hanno studiato la regione di interazione vorticosi, il mescolamento e la linea di decadimento media della concentrazione del getto, proponendo tre diversi fattori di scala per l'andamento delle grandezze nel getto: R , RD ed R^2D . Basandosi sulle misure del decadimento della concentrazione sulla linea centrale del getto, si è trovato un punto di ramificazione che rappresenta una transizione da una regione ad elevato mescolamento ad una a mescolamento ridotto rispetto ad un getto libero. Infine, si è trovato che in ogni istante la coppia di vortici contro-rotanti è asimmetrica nella forma e nella concentrazione.

Alcuni autori hanno anche utilizzato le Large Eddy Simulations (LES) per studiare il flusso attorno ad un getto turbolento che si immette in uno strato limite laminare. Yuan & Street (1998) hanno esaminato le caratteristiche della traiettoria e dell'entrainment del getto per numeri di Reynolds pari a 1050 e 2100 e per rapporti di iniezione pari a 2.2 e 3.3. Di solito, il modo più comune di calcolare la traiettoria del getto a partire da dati di laboratorio consiste nell'assumere che la traiettoria sia il luogo di punti in cui la velocità o la concentrazione scalare siano massimi nel piano di simmetria. In prossimità della regione di uscita del getto, tuttavia, la velocità e la concentrazione hanno più massimi locali e diventa difficile definire la traiettoria in questo modo.

Per sorpassare il problema, si può definire la traiettoria come la linea di flusso media che si origina dal centro del getto al livello della parete e ciò è quanto è stato fatto dagli autori menzionati. Questi ultimi, riprendendo l'espressione fornita da Pratte & Baines (1967), utilizzano la legge di potenza definita dalla:

$$\frac{y}{RD} = A \left(\frac{x}{RD} \right)^n. \quad (7.4)$$

Adoperando una doppia scala logaritmica, tutte le traiettorie del getto si dispongono lungo una stessa retta a pendenza costante a partire dalla sezione $x = 0.8RD$ a valle dell'uscita. La regione in cui le pendenze delle traiettorie sono costanti è solitamente chiamata "power-law region". L'esponente della (7.4) varia tra 0.27 e 0.29 mentre il coefficiente A assume valori nell'intervallo 1.2-1.4 e risulta dipendente sia da R che da Re .

Confrontando le traiettorie definite come luogo dei massimi della velocità con quelle definite dalle linee di flusso si nota che, mentre in prossimità dell'uscita del getto le traiettorie si sovrappongono, più a valle il luogo dei massimi della velocità si sposta più in alto rispetto alle linee di flusso. Quest'ultimo comportamento si spiega poiché a valle della regione con grande curvatura il flusso trasversale accelera e devia sul corpo principale del getto. La traiettoria definita con il massimo della concentrazione scalare, invece, si trova al di sotto delle linee di flusso poiché la circolazione indotta dalla coppia di vortici contro-rotanti tende a spostare la concentrazione scalare verso il basso allontanandola dalla parte superiore della sezione trasversale del getto. In definitiva, gli autori hanno trovato che nella zona con legge di potenza l'entrainment del flusso principale è il meccanismo principale attraverso il quale è determinata la traiettoria del getto. Più a monte, in prossimità della regione di uscita del getto, il meccanismo di curvatura diventa molto più complesso e gli effetti del numero di Reynolds e della resistenza dovuta alla pressione diventano entrambi significativi.

Utilizzando lo stesso tipo di simulazione Yuan et al. (1999) hanno calcolato il campo di moto medio e le statistiche di turbolenza nel campo vicino del getto e discusso i meccanismi di formazione della strutture coerenti su grande scala osservate nelle misure sperimentali. In base ai risultati gli autori hanno dedotto che la coppia di vortici contro-rotanti si origina da una coppia di vortici quasi-stazionari (*hanging vortices*) che si formano ai lati del getto in seguito al mescolamento con il flusso trasversale. Questi vortici, quando incontrano gradienti avversi di pressione, si dissolvono espandendo rapidamente e generando una debole coppia di vortici contro-rotanti che è allineata con la traiettoria del getto. Oltre a queste strutture, Yuan et al. (1999) hanno individuato degli avvolgimenti lungo la direzione z a monte e a valle del getto (*spanwise rollers*) al posto dei vortici ad anello e delle strisce di vorticità verticale nel corpo principale del getto (*vertical streaks*).

Il meccanismo di formazione della coppia di vortici contro-rotanti è sempre stato un argomento molto dibattuto sul quale non si è trovato mai un ampio accordo. Cortelezzi & Karagozian (2001) hanno effettuato una simulazione numerica in transitorio del campo di moto utilizzando elementi vorticosi tridimensionali per studiare le fasi iniziali dello sviluppo della coppia di vortici contro-rotanti. I risultati sono in accordo con le idee sviluppate da Kelso et al. (1996) e descritte precedentemente. In disaccordo con queste ultime è l'interpretazione delle visualizzazioni di flusso effettuata in un canale ad acqua da Lim et al. (2001) per un rapporto di iniezione pari a 4.6 e numero di Reynolds pari a circa 1600. In base alle visualizzazioni è risultato che la superficie vorticosa cilindrica è sottoposta a tre processi di piegamento. Uno porta alla formazione del CVP ai lati della colonna del getto e gli altri due conducono alla formazione di due file di vortici: un a monte del getto e l'altra dal lato sottovento. Secondo gli autori questi vortici non sono prodotti dalla curvatura o dal piegamento dei vortici ad anello, non essendoci evidenza della formazione di questi ultimi così come osservato da Yuan et al. (1999). È stato anche trovato che il CVP svolge un ruolo dominante nell'impedire la formazione dei vortici ad anello a partire dall'arrotolamento del cilindro vorticoso. Ciò è in contrasto con quanto accade ad un getto libero in cui

l'assenza della coppia di vortici contro-rotanti permette alla superficie vorticosa di avvolgersi in anelli vorticosi in maniera assialsimmetrica. Nel caso di un getto in cross-flow la superficie vorticosa può avvolgersi liberamente soltanto a monte e a valle della colonna del getto dal momento che il CVP ne impedisce l'avvolgimento sui due lati. Si ottiene così uno scenario in cui si trovano due file di vortici separati dalla coppia di vortici contro-rotanti ai lati. Quando gli avvolgimenti vorticosi sono trasportati lungo la corrente, le parti laterali sono rimosse dal flusso trasversale e si accoppiano con il CVP. Durante il mescolamento i vortici sono allungati dal CVP e ciò si traduce in un riallineamento della vorticità con la coppia di vortici contro-rotanti. Gli autori hanno ritenuto che la mutua interazione tra gli avvolgimenti vorticosi fosse responsabile dell'instabilità e della turbolenza dei vortici, che scompaiono lasciando il posto soltanto al CVP.

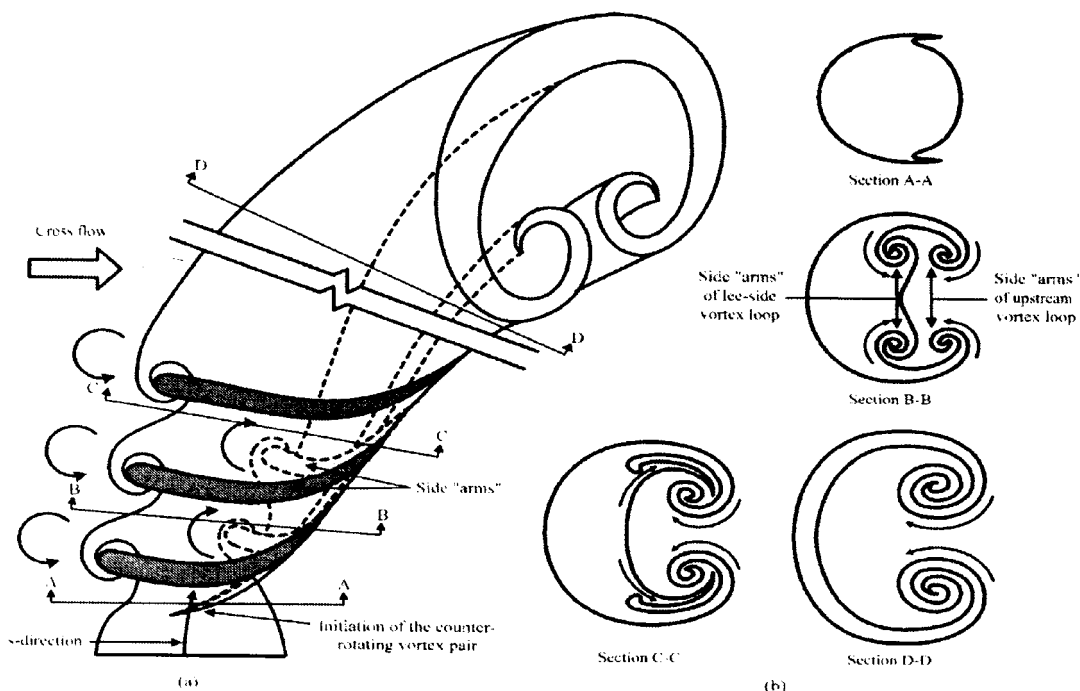


Figura 7.7 Interpretazione delle strutture vorticosi di un getto in cross-flow data da Lim et al. (2001). (a) Schema della fusione dei vortici monte e a valle del getto con il CVP. (b) Sezioni di (a) prese a varie distanze lungo il getto.

La Figura 7.7 mostra l'interpretazione data dagli autori dello sviluppo finale delle strutture presenti nel flusso. In figura sono mostrati il modo in cui inizia a formarsi la coppia di vortici contro-rotanti ai lati della superficie cilindrica vorticosa ed il meccanismo di formazione degli avvolgimenti vorticosi. L'interruzione presente nel disegno indica che la sezione D-D è presa lontano dall'uscita del getto. La Figura 7.8(a) mostra la ricostruzione tridimensionale delle strutture del getto proposte dagli autori, fornendo un'interpretazione sulla modalità con cui i vortici a monte e a valle possono aver interagito per generare la situazione rappresentata nella sezione B-B; la Figura 7.8(b), invece, mostra la sezione E-E lungo la linea centrale del getto. Infine, a riprova del fatto che i vortici ad anello non si formano in un getto in un flusso trasversale, Lim *et al.* (2001) osservano che a bassi rapporti di iniezione sono visualizzati solamente i vortici a monte del getto.

Rivero et al. (2001) hanno utilizzato l'anemometria a filo caldo e la tecnica PLIF per identificare le strutture presenti in un getto in cross-flow ad un rapporto di velocità pari a 3.8 ed un numero di Reynolds basato sulla velocità del flusso trasversale pari a 6600. Gli autori individuano tre strutture che influenzano il campo di velocità coerente: i vortici ad anello, i vortici a ferro di cavallo ed i vortici a maniglia. Quest'ultima nuova struttura vorticosa collega la vorticità dello strato limite con la coppia di vortici contro-rotanti attraverso i vortici verticali nella scia ed è responsabile della modulazione e dell'oscillazione del CVP nei campi di velocità istantanei. Gli autori ritengono che ciò corrobori l'ipotesi che la generazione della coppia di vortici contro-

rotanti dipenda fortemente dagli elevati gradienti di pressione che si sviluppano in prossimità della regione di uscita del getto sia a monte che a valle del condotto.

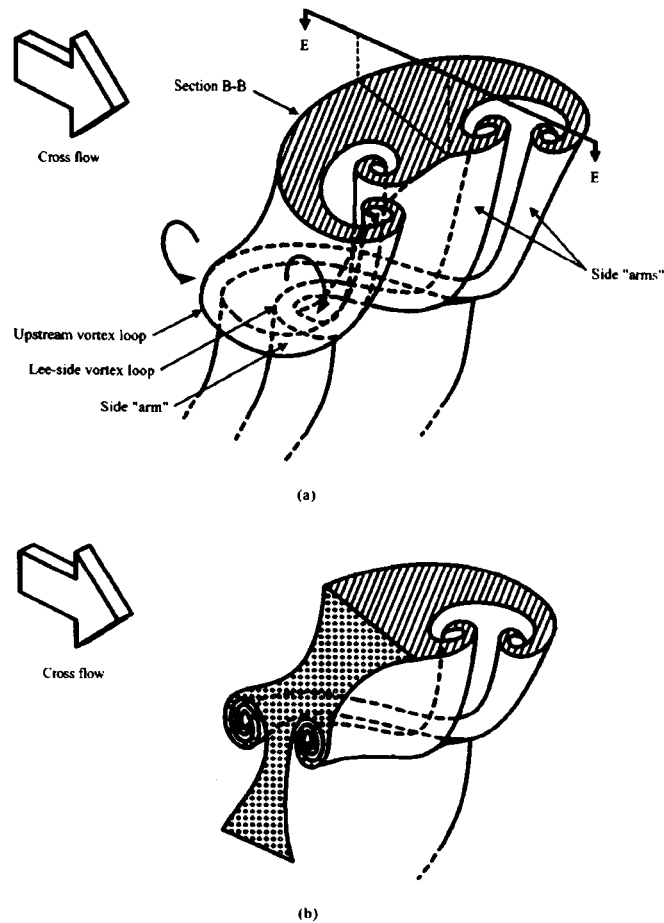


Figura 7.8 Schemi dettagliato del modello proposto da Lim et al. (2001). (a) Schema del meccanismo con cui i vortici generano l'andamento mostrato in sezione B-B. (b) Sezione E-E lungo la linea centrale del getto incurvato.

Tutte le misure effettuate dagli autori fin qui riportati presentano numerose limitazioni, infatti, le misure con anemometria a filo caldo possono dar luogo a grandi errori nelle regioni ad elevata energia cinetica turbolenta, non sono molto sensibili alla direzione della corrente e, come nel caso dell'anemometria laser Doppler, forniscono soltanto misure puntuali della velocità. Le misure effettuate con la tecnica PIV non presentano queste limitazioni e permettono di ottenere centinaia di vettori indipendenti nello stesso istante. Tra i primi studi con tecnica PIV stereoscopica si trovano le misure fatte da Meyer et al. (2001) per $R = 3.3$ e $Re = 2400$.

Camussi et al. (2002) hanno effettuato visualizzazioni di flusso e misure PIV in un canale ad acqua per un rapporto di iniezione compreso tra 1.5 e 4.5 e per un numero di Reynolds molto basso (≈ 100). Dallo studio dei campi di moto gli autori hanno analizzato l'effetto di R sulla formazione ed evoluzione dei vortici su larga scala. Nel lavoro è stato mostrato che due distinti regimi di flusso si stabiliscono al variare del rapporto di iniezione ed il valore $R = 3$ costituisce un valore di transizione tra i due tipi di regime. A bassi rapporti di iniezione la vorticità longitudinale è dovuta prevalentemente alle strutture di scia che, essendo connesse alla coppia di vortici contro-rotanti, tende a destabilizzare il flusso del getto. Ad alti rapporti di iniezione, d'altra parte, i vortici con vorticità positiva e negativa si accoppiano facendo prevalere le strutture degli strati viscosi del getto. Anche dall'analisi della traiettoria del getto si evince una discontinuità in corrispondenza di $R = 3$. Infatti, definendo la traiettoria del getto come il luogo dei punti di massimo per la velocità gli autori hanno utilizzato per la traiettoria l'espressione proposta da Chassaing et al. (1974):

$$\frac{y}{D} = A \left(\frac{x}{D} \right)^n. \quad (7.5)$$

Il valore di n trovato dagli autori nella (7.5) è all'incirca costante al variare di R e pari a 0.39, mentre l'andamento di A in funzione di R è risultato lineare a tratti con un cambio di pendenza in corrispondenza del valore $R = 3$.

7.3. Studi sullo scambio termico

Rispetto agli studi sulle caratteristiche del flusso in prossimità di un getto in un flusso trasversale, gli studi sullo scambio termico sulla parete da cui il getto fuoriesce non sono stati altrettanto dettagliati e si sono limitati per lo più alla misura dell'efficienza del film cooling o alla misura dello scambio termico medio lungo la direzione trasversale della galleria. Ad esempio, Ramsey & Goldstein (1971) hanno riportato i profili di temperatura di un getto riscaldato che si immette in un flusso principale con angoli di inclinazione variabili tra 30° e 90° . Pertanto, in questa fase, ci si limiterà soltanto a dei rapidi cenni.

Il primo vero studio sulle caratteristiche del coefficiente di scambio termico in prossimità di getti che si immettono in un flusso trasversale può essere considerato quello di Goldstein & Taylor (1982). Gli autori hanno sfruttato l'analogia tra lo scambio di massa e lo scambio termico per studiare, mediante la tecnica di sublimazione della naftalina, lo scambio termico di una riga di getti inclinati a 35° rispetto alla superficie con velocità della corrente principale pari a 15 m/s e rapporti di iniezione variabili tra 0.2 e 2. I risultati sono riportati in termini del rapporto tra il coefficiente di scambio di massa con immissione da parte dei getti e quello calcolato in assenza di iniezione. In particolare, Goldstein & Taylor (1982) hanno trovato che a monte del condotto di uscita lo scambio termico è poco influenzato dalla presenza del getto e solo a valori del rapporto di iniezione intermedi è presente una lieve diminuzione dello scambio a causa del rallentamento del flusso principale da parte del getto. Nella regione tra due fori l'iniezione ha un effetto ridotto sul coefficiente di scambio di massa e soltanto ad elevati rapporti di iniezione si ha un aumento del 10% probabilmente dovuto ad un'accelerazione del flusso. Immediatamente a valle del foro di iniezione, per la maggior parte dei rapporti tra le velocità, si è trovata una regione a scambio di massa relativamente basso che può essere spiegata con l'azione dei getti che creano una regione di ristagno immediatamente a valle dell'iniezione. Per tutti i valori di R è stata riscontrata lungo i lati del condotto di uscita una regione ad elevato coefficiente di scambio di massa che si estende anche a valle e che, secondo gli autori, è dovuta alla presenza di numerosi vortici creati dall'interazione tra il flusso principale ed il getto. A valle dell'uscita del condotto, ad una distanza $x/D \approx 0.75$ lungo l'asse delle ascisse, è stata trovata la regione di massimo per lo scambio di massa. Quest'ultima regione si estende al crescere di R a causa della conseguente separazione del getto. Infatti, per rapporti di iniezione elevati, il flusso della corrente principale penetra sotto il getto e, formando vortici più ampi, contribuisce ad aumentare lo scambio di massa. Infine, per valori di R pari ad 1.5 e 2.0 ancora più a valle della zona di iniezione sono presenti due aree ad alto coefficiente di scambio termico che apparentemente sono dovute ad un parziale riattacco del getto sulla parete.

Altre misure di scambio termico utilizzando l'analogia con lo scambio di massa sono state effettuate da Cho & Goldstein (1995a) e (1995b) e da Goldstein & Stone (1997). I primi hanno misurato i coefficienti di scambio di massa all'interno dei fori di iniezione, sulla parete posteriore e sulla parete esposta, trovando che il coefficiente di scambio di massa è abbastanza uniforme all'interno del foro e che, per rapporti di iniezione inferiori all'unità, il numero di Sherwood Sh è raggiunge ai lati sulla superficie superiore valori fino a tre o quattro volte maggiori rispetto alla superficie in assenza di iniezione. I secondi hanno analizzato il film cooling su pareti concave e convesse mediante la tecnica di visualizzazione del flusso con ammoniaca-diazo, trovando che l'effetto dell'angolo di iniezione è importante soltanto per elevati rapporti di iniezione. Per la parete concava i risultati migliori sono stati ottenuti con elevati R ed iniezione superficiale, mentre

per la parete convessa sono da preferire le iniezioni superficiali ed un rapporto di iniezione pari a 0.25.

Leontiev (1999) ha presentato un riepilogo sui metodi di calcolo ed i risultati sperimentali per sullo scambio termico in presenza di film cooling. Nel lavoro l'autore analizza l'effetto che hanno sull'efficienza dello scambio termico numerosi parametri quali le modalità di realizzazione del film cooling, i gradienti di pressione longitudinali, la non-isotermicità e la compressibilità del gas, l'iniezione di un gas diverso dal quello del flusso trasversale, la scabrezza superficiale, la rotazione del flusso e le fluttuazioni turbolente del flusso principale. Inoltre, è proposta una correlazione generalizzata per l'efficienza dello scambio termico che tenga conto di tutti i parametri analizzati ed è mostrato che, per effettuare il calcolo del coefficiente di scambio termico, è necessario prendere in considerazione l'influenza del gas iniettato sullo sviluppo dello strato limite termico. L'autore propone anche un metodo di calcolo del film cooling combinato (raffreddamento con film, traspirazione e convezione) che tiene conto dell'effetto della conducibilità longitudinale della parete sull'efficienza del film cooling.

Più di recente sono state realizzate analisi sul film cooling e sullo scambio termico anche per mezzo della termografia ad infrarosso. Gustafsson & Johansson (2001) hanno effettuato uno studio parametrico sulla distribuzione di temperatura di una piastra raffreddata per effusione mediante tecnica termografica. Utilizzando diverse file di fori distribuiti su diversi diametri, nello studio sono stati valutati gli effetti di diversi rapporti di temperatura e velocità tra il flusso del getto e quello della corrente principale, della spaziatura tra i fori di iniezione, dell'angolo di inclinazione dei fori e della conduttività termica delle pareti. Gli autori hanno trovato che l'efficienza dello scambio termico aumenta riducendo la spaziatura tra i fori e, in misura marginale, diminuendo l'angolo di immissione dei getti. Una maggiore conducibilità della piastra riduce la temperatura superficiale davanti alla prima fila di fori ma non riduce la temperatura media nelle posizioni a valle. I parametri più importanti sono risultati il rapporto di temperatura ed il rapporto di iniezione. Astarita et al. (2001) hanno presentato mappe dello scambio termico sulla parete da cui un getto si immette ortogonalmente in un flusso trasversale per un fissato numero di Reynolds (5000) e per rapporti di iniezione compresi tra 0.5 e 5. Gli autori hanno riscontrato che, al crescere del rapporto di iniezione, si riduce la regione di influenza attorno al foro mentre la scia del getto tende ad ingrandirsi movendosi a valle della sezione di uscita.

8. APPARATO SPERIMENTALE E SISTEMI DI MISURA

In questo paragrafo saranno esaminate le caratteristiche principali delle apparecchiature utilizzate per effettuare le misure sullo scambio termico e sui campi di moto per di un getto che si immette in un flusso trasversale. Nel primo paragrafo saranno descritti gli aspetti generali in comune a tutti e due i tipi di misura mentre, nei successivi paragrafi saranno descritte i componenti e le metodologie di misura adoperati per ciascuna delle tecniche impiegate nel presente lavoro di tesi.

8.1. Caratteristiche generali dell'apparato sperimentale

Tutte le prove sperimentali sono state effettuate utilizzando le attrezzature disponibili presso il laboratorio di Gasdinamica del “Dipartimento di Energetica, Termofluidodinamica applicata e Condizionamenti ambientali” (DETEC) dell’Università degli studi di Napoli “Federico II”. Una rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato è riportata in Figura 8.1. Come è rappresentato in figura, un getto d'aria fuoriuscente da un condotto a sezione circolare è immesso nel flusso principale di una galleria del vento subsonica attraverso un foro praticato su una delle pareti laterali. Attraverso delle finestre di accesso ottico disposte sulle altre due pareti della galleria è stato possibile realizzare sia misure di termografia, sia misure PIV. Nel seguito sono descritti più in dettaglio i singoli componenti dell'apparato di misura.

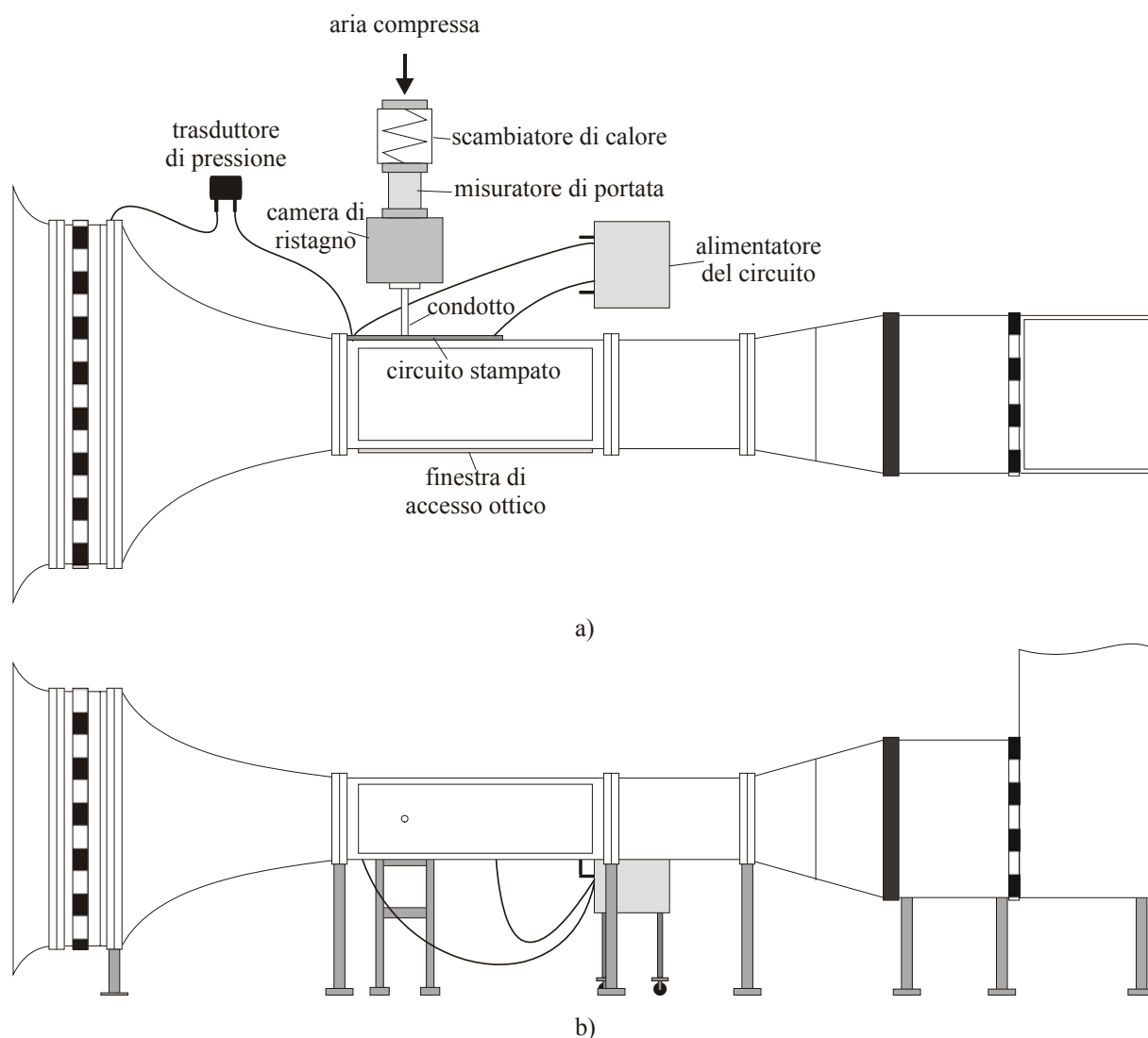


Figura 8.1 Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato. a) Vista dall'alto; b) vista frontale.

8.1.1. Galleria del vento e sezione di prova

Le misure sperimentali sono state ottenute in una galleria del vento aspirata a circuito aperto e a vena chiusa la cui vista frontale è rappresentata in Figura 8.2. La sezione di prova presenta una forma rettangolare di dimensioni $300 \times 400 \text{ mm}^2$ e si estende per una lunghezza di 1 m a valle del convergente. Lungo la linea centrale della parete larga 300 mm , ad una distanza di 240 mm dalla sezione di gola del convergente è stato praticato il foro circolare avente un diametro di 24 mm e da cui fuoriesce il getto ortogonalmente alla parete. La parete superiore della galleria e quella laterale posta di fronte alla sezione di uscita dell'ugello sono state realizzate in vetro per consentire l'illuminazione del tracciante con il laser e la ripresa delle immagini con le telecamere. La parete laterale di fronte al getto è stata sostituita con una finestra di polipropilene biorientato trasparente all'infrarosso per effettuare le misure termografiche. Per ottenere le misure di scambio termico con il sensore di flusso termico heated thin foil, la parete dalla quale fuoriesce il getto è costituita da un circuito stampato verniciato con colore nero ad elevata remissività (0.95) per una lunghezza pari a 600 mm a partire dalla sezione di gola del convergente. Le tracce di rame che costituiscono il circuito stampato hanno uno spessore di $5 \mu\text{m}$, una larghezza pari a 1.8 mm e sono poste ad una distanza di 2 mm le une dalle altre. Lo spessore complessivo del circuito, comprendente anche la parte in vetronite è pari a 0.5 mm .

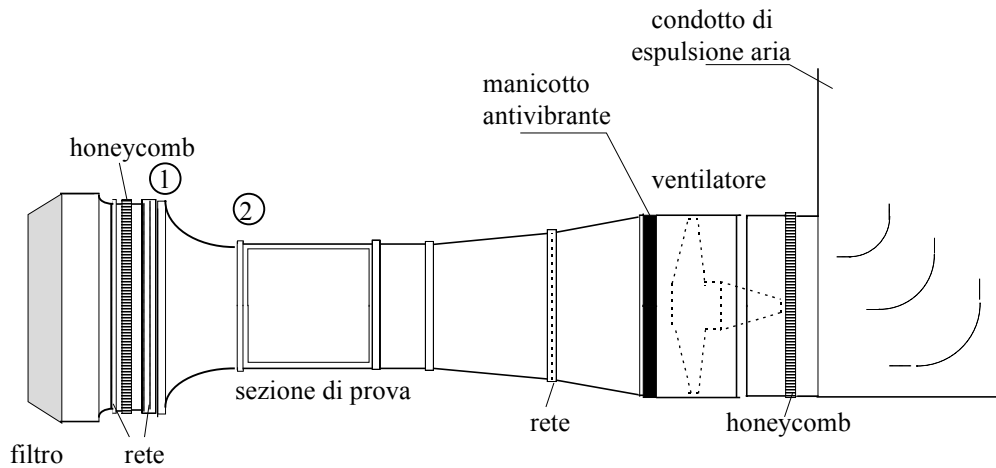


Figura 8.2 Vista schematica frontale della galleria del vento subsonica adoperata per la sperimentazione.

All'ingresso della galleria, a monte del convergente, sono stati posti un nido d'ape e reti apposite per ottenere un livello di turbolenza piuttosto basso (0.1%). A monte della sezione di prova, il convergente in ingresso ha un rapporto di contrazione pari a 10 ed è stato progettato calcolando le ordinate mediante il valore medio tra il valore r_c fornito dalla formula del coseno ed quello r_w dato dalla formula di Witoshinsky. Le espressioni delle due diverse ordinate sono date da:

$$r_c = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_2 - r_1}{2} \cos\left(\pi \frac{x}{z}\right) \text{ e } r_w = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \frac{\left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{x^2}{3z^2}\right)^3}}} \quad (8.1)$$

dove r_1 ed r_2 sono i valori delle ordinate nelle sezioni di ingresso e di gola rispettivamente e per z si è fissato un valore pari ad 1 m . A valle della sezione di prova è presente un divergente di forma tronco-conica seguito da un ventilatore assiale da 11 kW isolato dal resto della galleria per mezzo di un manicotto antivibrante in gomma e dal condotto di uscita dell'aria. Il ventilatore è azionato da un inverter da 30 kVA che permette di regolare la frequenza di rotazione da $0-50 \text{ Hz}$ e la conse-

guente velocità della corrente nella sezione di prova. In tal modo è stato possibile variare il numero di Reynolds riferito alla velocità della galleria ed al diametro del condotto tra 1000 e 16'000. La velocità della galleria è stata calcolata dalla misura della differenza di pressione esistente tra la sezione di ingresso e quella di gola del convergente attraverso un trasduttore di pressione. Inoltre, in base al valore del numero di Reynolds, si è stimato per lo strato limite sulla parete uno spessore tra i 9 ed i 20mm in corrispondenza della sezione di uscita del getto.

8.1.2. Attrezzature utilizzate per le prove in galleria del vento

Per alimentare il getto che si immette nella galleria, come già detto, si utilizza un condotto cilindrico disposto a 90° rispetto alla parete della galleria. L'aria immessa nel condotto a seconda delle esigenze proviene in alcuni casi da un serbatoio di aria compressa, in altri casi è fornita direttamente da un compressore. Prima di giungere nel condotto, il flusso del getto passa in successione attraverso una valvola per la regolazione della pressione, un misuratore di portata, uno scambiatore di calore ed infine attraverso una camera di ristagno. Lo scambiatore di calore consente di mantenere la temperatura del getto identica a quella dell'ambiente ed un termometro posto in camera di calma permette di verificare il raggiungimento della predetta condizione. Il misuratore di portata è utilizzato per calcolare la velocità media con cui il getto fuoriesce dal condotto, mentre la valvola di regolazione permette di cambiare la portata nel condotto per poter variare il rapporto di iniezione tra 0.5 e 5.

Per realizzare il modello di sensore di flusso termico heated thin foil è stato necessario rendere isolante il lato posteriore del circuito stampato con un opportuno rivestimento ed utilizzare un circuito con un flusso di calore costante su tutta la superficie. Il circuito è stato alimentato con un generatore di tensione in continua. Il calcolo della potenza dissipata per effetto Joule è stato ottenuto misurando rispettivamente con un voltmetro ed un amperometro la tensione e la corrente passanti nel circuito. Infine, sia nelle misure termografiche che in quelle con tecnica PIV si è provveduto a schermare opportunamente la sezione di prova dalla luce solare e si sono utilizzati degli adeguati supporti per il posizionamento delle telecamere.

8.2. Misure con sistema PIV

Nel presente lavoro sono stati sviluppati utilizzati sia un sistema PIV classico a due componenti, sia un sistema per ottenere misure PIV stereoscopiche. Quest'ultimo è stato utilizzato principalmente per due scopi. In primo luogo sono state fatte misurazioni sperimentali per analizzare l'effettiva influenza degli errori di allineamento nelle misure stereoscopiche e verificare l'aderenza delle misure reali con le previsioni derivanti dalle formule di ricostruzione teoriche riportate in precedenza. In secondo luogo, si è utilizzata la tecnica stereoscopica per misurare i campi di velocità istantanei e medi, così come le statistiche della turbolenza in presenza di un fenomeno dalle caratteristiche fortemente tridimensionali quale un getto in un flusso trasversale.

Le misure stereoscopiche sono state effettuate in piani ortogonali all'asse del condotto e posti alle distanze dalla parete $y/D = 0.25$, $y/D = 0.5$, $y/D = 1$, $y/D = 1.5$ e $y/D = 2$ per diversi valori del numero di Reynolds a seconda del particolare aspetto che si è analizzato. Per le misure nel piano di simmetria del getto, ovvero nel piano $z/D = 0$, non è stato necessario effettuare misure stereoscopiche poiché, a causa della simmetria, le componenti ortogonali al piano di misura sono mediamente nulle. A causa delle oscillazioni istantanee del getto, le fluttuazioni di quest'ultima componente non sono nulle e forniscono un contributo all'energia cinetica turbolenta. Tuttavia, ai fini degli obiettivi preposti nel presente lavoro, le suddette oscillazioni non costituiscono un problema rilevante.

Dopo aver fatto questa premessa è possibile analizzare più in dettaglio le modalità e le apparecchiature con cui si è implementato il sistema PIV una rappresentazione della quale, relativamente alla configurazione stereoscopica, è riportata in Figura 8.3 insieme all'apparato sperimentale.

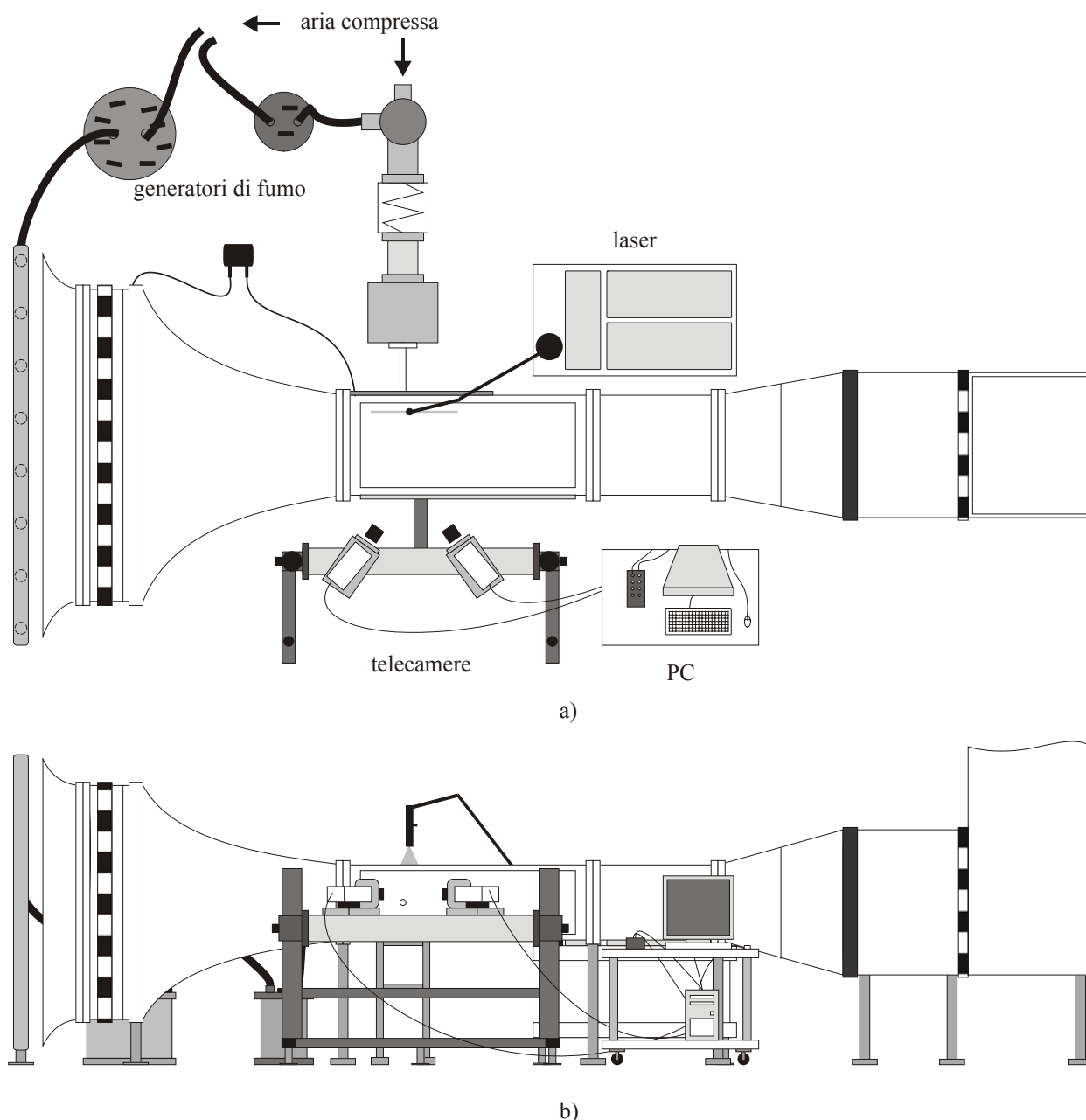


Figura 8.3 Schema dell'apparato sperimentale con disposizione del sistema PIV relativamente alle misure nei piani di misura paralleli alla parete. a) Vista dall'alto; b) vista frontale.

8.2.1. Generazione delle immagini

Come è noto, per generare le immagini PIV è necessario inserire un tracciante nel flusso ed illuminarlo con un laser. Ciò corrisponde a quanto è stato fatto per le prove sperimentali in galleria del vento; per le prove di simulazione dell'errore di allineamento, invece, è stata utilizzata un'immagine generata in maniera sintetica con simulazione Monte Carlo ed incollata su di un supporto rigido.

Per vaporizzare il tracciante si è utilizzato un generatore di aerosol con otto condotti di immissione per l'aria terminanti con altrettanti ugelli Laskin come schematizzato in Figura 8.4. Le gocce d'olio ottenute in seguito alla nebulizzazione hanno dimensioni medie di circa $1\mu\text{m}$ e sono iniettate sia in galleria che nel condotto di immissione del getto. Per regolare la densità delle particelle in uscita dal getto, si è utilizzato un condotto a T che ha in ingresso ai due lati rispettivamente l'aerosol prodotto dal nebulizzatore e l'aria senza tracciante di cui è possibile variare la portata, ed in uscita ha un flusso con la densità di particelle desiderata.

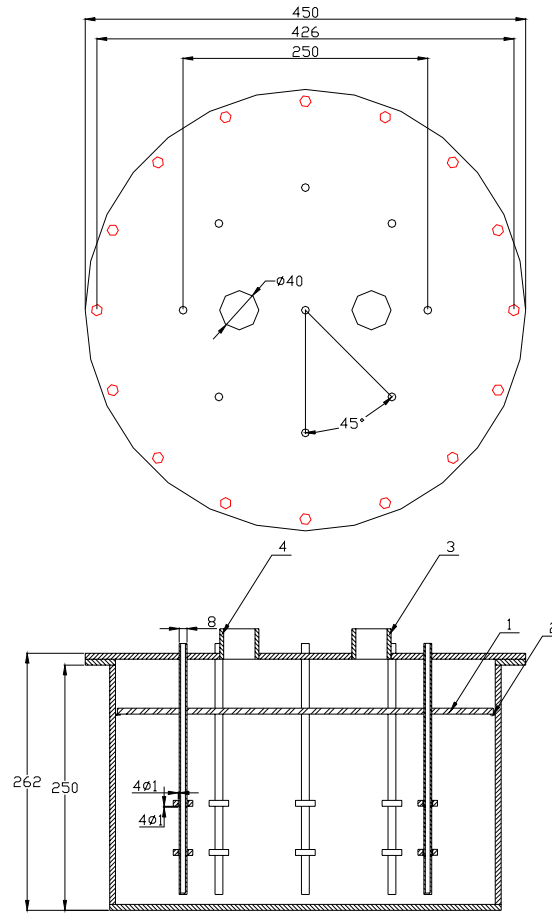


Figura 8.4 Disegno schematico del generatore di aerosol. 1) Piastra impattatrice; 2) supporto; 3) condotto di ingresso dell'aria compressa; 4) condotto di uscita dell'aerosol.

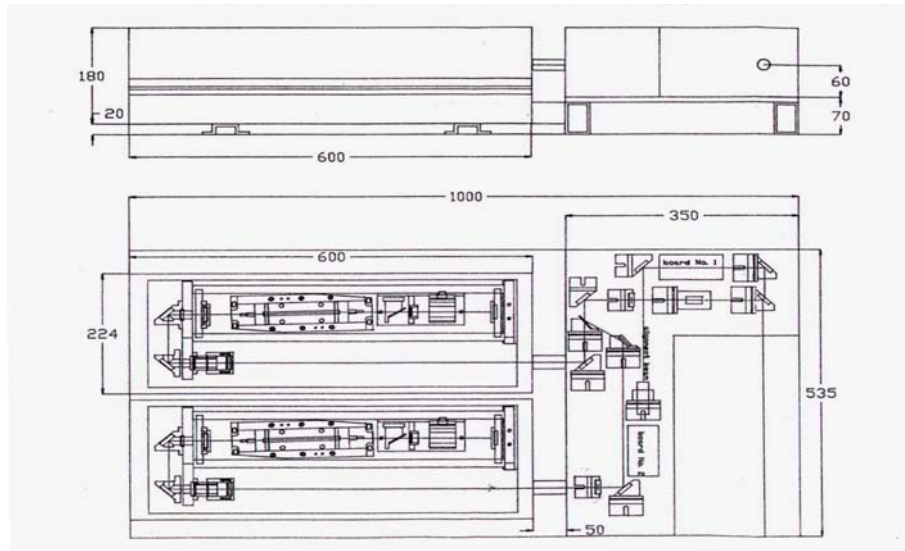


Figura 8.5 Schema meccanico del laser utilizzato.

Per generare il fascio di luce sono stati utilizzati un laser Nd:YAG a doppia cavità Quanta System modello HYL 10,1 il cui schema meccanico è riportato in Figura 8.5, ed un sistema di lenti che consente di ottenere un fascio a spessore variabile. Le principali caratteristiche del laser sono le seguenti:

- lunghezza d'onda: $532nm$

- frequenza di ripetizione: 10Hz
- energia per impulso a 532nm : 200mJ
- polarizzazione: lineare verticale
- ritardo tra gli impulsi: da 0 a 1.2ms
- durata dell'impulso: $5\text{-}6\text{ns}$
- divergenza del raggio (90% dell'energia): 0.5mrad
- diametro del raggio: 7mm
- stabilità della posizione del raggio: $100\mu\text{rad}$
- Jitter: $\pm 0.5\text{ns}$
- stabilità dell'energia (1064nm , 90% dei colpi): $\pm 2\%$
- profilo spaziale del raggio (adattamento gaussiano): 0.75 vicino, 0.90 lontano

8.2.2. Registrazione delle immagini

L'acquisizione delle immagini per le misure con PIV stereoscopica è realizzata mediante l'utilizzo di due telecamere digitali PCO-sensicam con sensori CCD disposte su di un supporto comune secondo la condizione di Scheimpflug. Detta condizione può essere raggiunta grazie alle caratteristiche dei supporti su cui sono montate le telecamere. Questi sono realizzati in maniera da consentire la rotazione relativa tra il sensore CCD e l'obiettivo della telecamera. L'obiettivo utilizzato è da 50mm con numero f pari a 2.8. Il sensore della telecamera è costituito da una matrice rettangolare di 1024×1280 pixel aventi ciascuno un'estensione di $6.7 \times 6.7\mu\text{m}^2$. Ciascuna immagine è digitalizzata a 12 bit in maniera tale che sia possibile utilizzare 4096 livelli di grigio. L'intervallo di tempo tra la fine della prima apertura del diaframma e l'inizio della seconda è fisso e pari ad $1\mu\text{s}$.

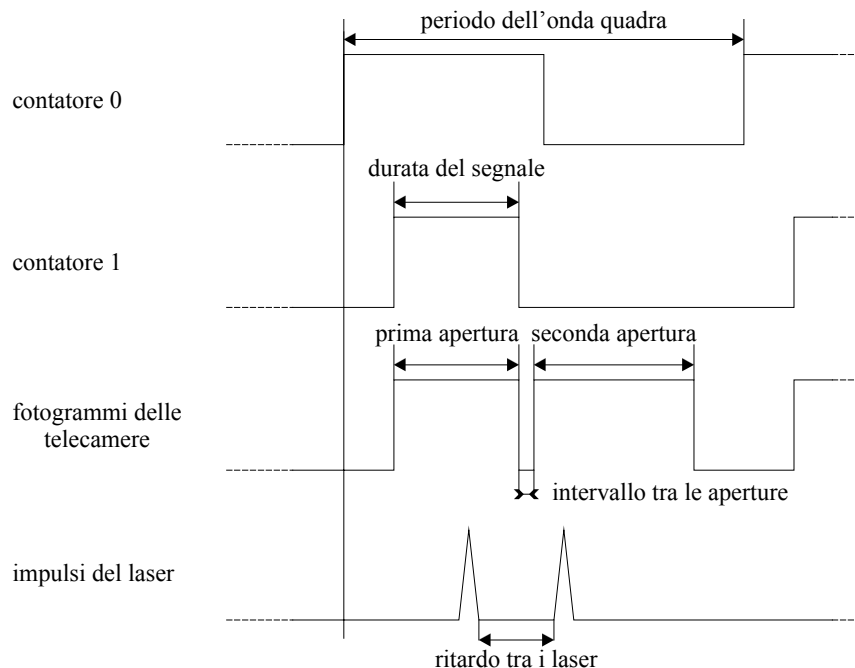


Figura 8.6 Diagramma dei tempi per la sincronizzazione del laser con le telecamere.

Per risolvere il problema della sincronizzazione delle due telecamere con gli impulsi dei laser, si è utilizzata una scheda per generare i segnali modello NI-DAQ 6601. Il ritardo tra i due laser è stato imposto mediante il dispositivo in dotazione con il laser. Una volta noto il tempo fisico di ritardo con cui parte il laser attivato con trigger, la scheda è stata programmata in maniera tale da inviare gli impulsi al laser ed alle due telecamere secondo lo schema di Figura 8.6. Per sincronizzare tutti i componenti sono stati utilizzati due dei contatori della scheda. Il contatore 0, costi-

tuito da un'onda quadra con frequenza generalmente fissata a 2Hz , è inviato contemporaneamente in ingresso al laser ed al contatore 1. Il segnale in uscita dal contatore 1, opportunamente ritardato rispetto al segnale proveniente dal contatore 0, è inviato in ingresso alle due telecamere. La durata della prima apertura delle due telecamere coincide con la durata del segnale di ingresso, mentre la seconda apertura ha una durata coincidente con il tempo di lettura della prima esposizione che è dipendente dalla porzione di immagine acquisita. Noto il ritardo del Q-switch del laser è possibile variare la durata del segnale del contatore 1 in maniera che ciascuna esposizione occorra in uno solo dei due fotogrammi.

8.2.3. Elaborazione delle immagini

Come è stato già accennato, per effettuare le misure sono state utilizzate due diverse metodologie di misura stereoscopiche descritte nella parte introduttiva: il metodo con mappatura tridimensionale ed il metodo con ricostruzione geometrica delle componenti del campo di moto. Per quanto riguarda le misure in galleria del vento, le statistiche del flusso (valori medi della velocità e sforzi di Reynolds) sono state calcolate come statistiche di insieme su un campione di 500 coppie di immagini acquisite alla frequenza di 2 Hz . Le immagini acquisite sono elaborate con algoritmi PIV avanzati le cui caratteristiche principali sono descritte in breve di seguito.

Ciascuna immagine PIV è suddivisa in finestre di interrogazione più piccole sulle quali lo spostamento è ritenuto con buon approssimazione uniforme. La mutua correlazione tra finestre corrispondenti viene effettuata utilizzando algoritmi FFT per ridurre i tempi di calcolo. Per aumentare la risoluzione spaziale, si utilizza una procedura iterativa con spostamento, deformazione e riduzione delle finestre ad ogni passo successivo. Il campo vettoriale degli spostamenti calcolato al primo passo viene utilizzato per effettuare la stima della posizione e della deformazione da applicare alla finestra al passo successivo. Le dimensioni delle finestre di interrogazione utilizzate sono di 64×64 pixel per la finestra iniziale e di 32×32 pixel per quella finale con sovrapposizione (overlap) delle finestre del 50%. In tal modo, per ciascuna coppia di immagini, si sono ottenuti 80×60 vettori distanziati l'uno dall'altro di una quantità pari variabile da 0.4 a 1.8mm (da 60 a 13 vettori per diametro) in dipendenza dal fattore di ingrandimento della misura specifica. Al termine di ciascun passo della procedura iterativa è eseguito un controllo statistico dei dati, eseguendo sia la valutazione del rapporto segnale rumore sia il test della mediana. Gli eventuali vettori spuri presenti sono sostituiti con i valori interpolati in maniera bilineare a partire dai valori calcolati nelle celle adiacenti. A seconda del rapporto di iniezione, dello spessore del laser e della componenti di velocità ortogonale al piano di misura, la percentuale di vettori spuri è risultata variabile tra il 5 ed il 10% del totale dei vettori su ciascuna immagine. Per la stima dello spostamento frazionario si è utilizzato uno stimatore Gaussiano. Una descrizione più dettagliata sul metodo di elaborazione delle immagini si può trovare in Astarita & Cardone (2004).

8.3. Sistema di acquisizione delle immagini termografiche

Di seguito sono descritte le caratteristiche principali dell'apparato utilizzato per le misure termografiche la cui rappresentazione è riportata in Figura 8.7.

8.3.1. Caratteristiche tecniche del sistema termografico

Per ottenere le misure della temperatura superficiale della parete si è costituita il sistema termografico AGEMA 900 mostrato in Figura 8.8 e comprendente una telecamera, un monitor e un'unità di controllo per la gestione, l'acquisizione e la visualizzazione dei dati.

La telecamera costituisce l'unità ottica del sistema che riceve la potenza irradiata dagli oggetti situati all'interno del campo di vista e la converte in un segnale digitale a 12 bit. Quest'ultimo è elaborato dall'unità di controllo ed è utilizzato per visualizzare l'immagine termica degli oggetti, sviluppata con un'elevata risoluzione a colori o a livelli di grigio, in tutto il campo di temperatura. L'energia elettromagnetica irradiata dall'oggetto inquadrato viene focalizzata da una lente

trasparente all'infrarosso su un sistema costituito da uno specchio oscillante ed un prisma rotante, rispettivamente per le scansioni verticale ed orizzontale. La radiazione è prima riflessa dallo specchio oscillante che è posto in rotazione da un motore a corrente continua ed è poi focalizzata in uscita da tale specchio, mediante tre specchi fissi, su uno specchio poligonale orizzontale (prisma rotante) che ruota ad una velocità di $16'000 \text{ giri/min}$. Il moto di entrambi gli specchi (quello oscillante, verticale, e quello poligonale rotante, orizzontale) è controllato da un microprocessore che genera impulsi di trigger da inviare ai circuiti di sincronizzazione dell'unità di controllo. Attraverso il software di sistema è possibile impostare il microprocessore per l'acquisizione per righe, scegliendo la riga dell'immagine in cui si vuole effettuare la misura; in tal caso il software di sistema, in dotazione alla macchina, è in grado di bloccare lo specchietto oscillante nella posizione prescelta. Il software di sistema non consente l'automatizzazione del processo di acquisizione di un'immagine per righe successive.

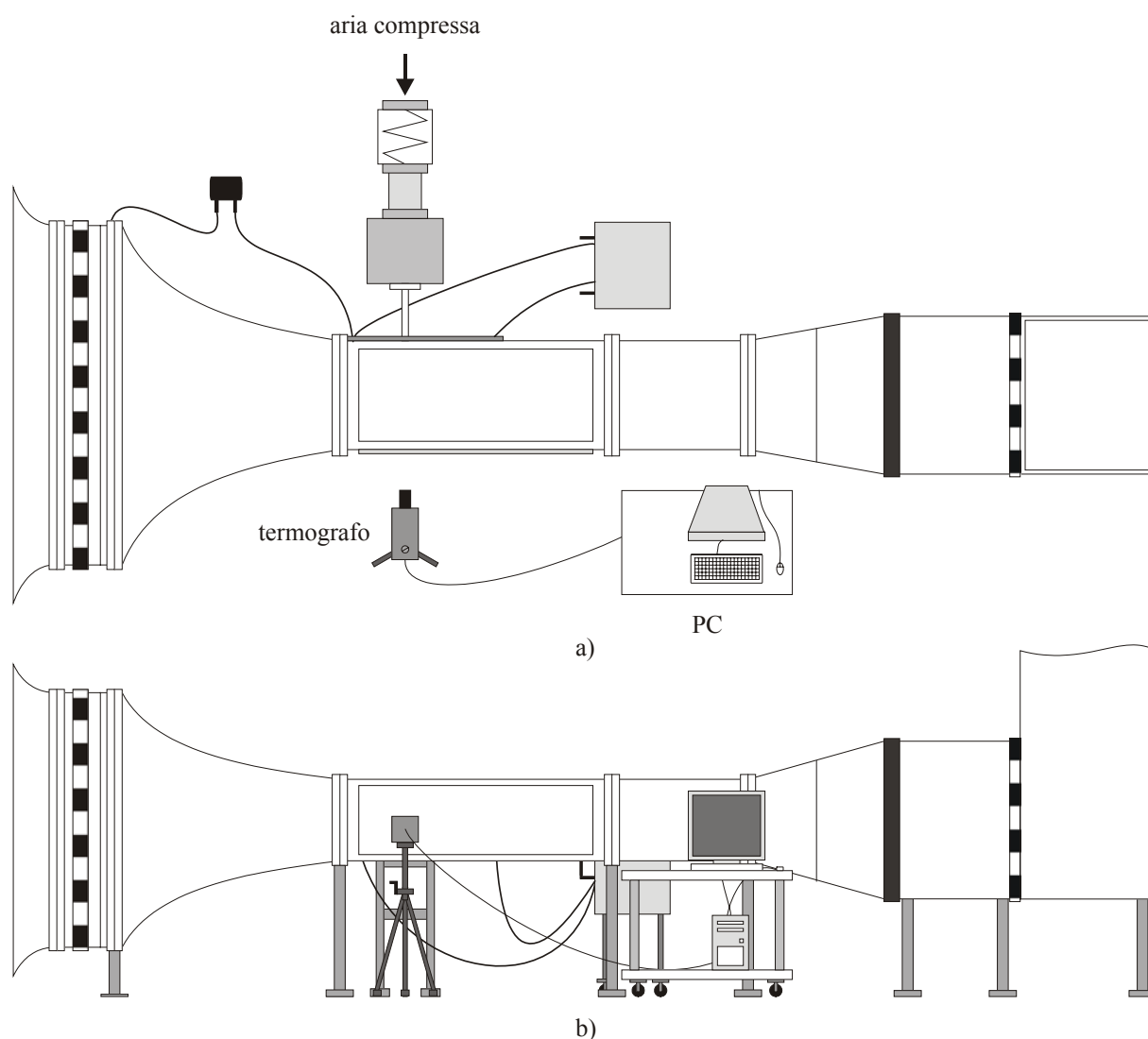


Figura 8.7 Schema dell'apparato sperimentale con disposizione del sistema termografico. a) Vista dall'alto; b) vista frontale.

Il segnale ottico in uscita dai meccanismi di scansione è successivamente fatto passare attraverso un apparato ottico contenente una serie di aperture e di filtri che possono essere scelti direttamente tramite tastiera. Attraverso una lente di collimazione le radiazioni vengono infine focalizzate sul sensore all'infrarosso, montato sulla parete di un *vaso dewar* contenente azoto liquido (vedi Figura 8.9) che, come già detto, raffreddando il sensore consente di non far perdere la capacità fotoelettrica e di ridurre l'incidenza della temperatura proveniente dalla cavità in cui è

allocato. Il sensore è di Cadmio-Mercurio-Tellurio ed è sensibile a radiazioni di lunghezza d'onda comprese tra 8 e $12\mu m$. La radiazione infrarossa viene convertita direttamente nella telecamera in un segnale digitale a 12 bit che a sua volta viene inviato all'unità di controllo tramite un cavo di interconnessione.



Figura 8.8 Sistema termografico AGEMA 900.

Le lenti, montate come normali obiettivi fotografici, sono di Germanio e presentano un trattamento antiriflesso che dà un picco di trasmittanza per $\lambda = 10\mu m$, in accordo quindi con la banda di lavoro del sensore. La lente in dotazione al sistema ha un campo di vista di $10^\circ \times 5^\circ$. Il sistema termografico AGEMA 900 LW è dotato di un sistema di acquisizione rapida delle immagini che permette di memorizzarle direttamente in memoria RAM riducendo così il tempo di acquisizione tra un'immagine e la successiva. La massima velocità di acquisizione del sistema è infatti di 15 immagini al secondo con un intervallo tra un'immagine e la successiva di circa 0.07 secondi mentre nel caso di scansione per linee la massima frequenza possibile sale a $2551Hz$. La risoluzione spaziale della telecamera AGEMA 900, dichiarata dalla casa, è di 230 IFOV mentre il NETD è di $0.07^\circ C$ a $30^\circ C$.

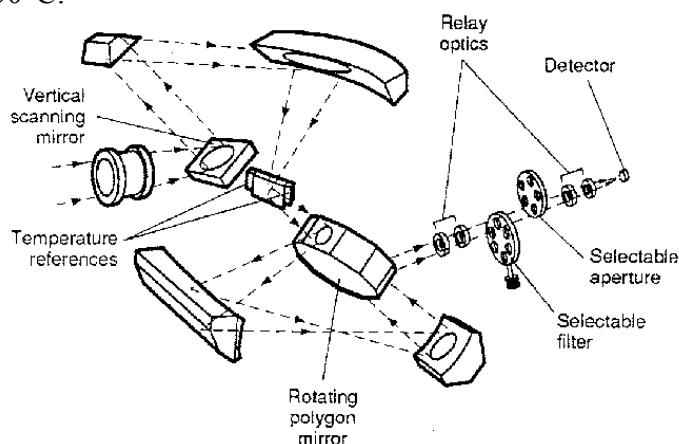


Figura 8.9 Schema ottico dal sistema termografico AGEMA 900.

8.3.2. Elaborazione delle immagini

La gestione delle operazioni in questo sistema termografico è attuata mediante un software di sistema fornito dall'AGEMA che funziona da interfaccia tra l'operatore e l'hardware, consentendo la memorizzazione delle immagini termografiche in formato digitale e la loro rappresentazione su un monitor.

L'immagine nella sua forma finale è costituita da 136×272 pixel ciascuno associato ad un valore in scala di grigio da 0 a 4095 proporzionale alla potenza assorbita dal sensore in quel punto del campo visivo. Sullo schermo del computer l'immagine appare invece visualizzata in 256 colori a ciascuno dei quali compete un intervallo di temperatura; la scala delle temperature è ri-

portata sulla destra dell'immagine. Dal punto di vista della elaborazione delle immagini l'AGEMA 900 fa uso del sistema X-Window che facilita la gestione di tutte le operazioni di acquisizione ed, inoltre, consente un'elevata capacità di confronto ed analisi anche tra due immagini contemporaneamente.

Per ridurre il rumore nella misura, ciascuna acquisizione è il risultato della media di 32 immagini registrate consecutivamente. Tramite un opportuno software, realizzato appositamente per il tipo di immagine registrata con il sistema termografico, è stato effettuato il calcolo dello scambio termico fornendo i risultati in termini del numero di Nusselt e del numero di Nusselt normalizzato in base al modello di sensore di flusso termico heated thin foil. Per ridurre ulteriormente il rumore che si amplifica nel calcolo delle perdite conduttive, le mappe ottenute sono state filtrate con filtro passa-basso. Infine, è utile ribadire che il calcolo delle mappe di temperature è stato effettuato utilizzando i valori delle costanti di calibrazione determinati preliminarmente per tener conto dell'influenza della finestra di accesso ottico della galleria del vento.

9. VERIFICHE SPERIMENTALI SUGLI ERRORI DI ALLINEAMENTO

Una prima stima degli errori di allineamento tra il piano di misura ed il piano di calibrazione nelle misure con tecniche PIV stereoscopiche è già stata effettuata derivando le formule teoriche dell'errore in funzione delle componenti del campo di spostamento, dei parametri geometrici relativi alla disposizione delle telecamere e della posizione del piano di misura effettivo. Per verificare in prima istanza la validità delle formule ricavate, sono state realizzate delle misure sperimentali imponendo con slitte micrometriche diversi campi di moto e diverse tipologie di errore di allineamento. Le misure ricavate sono abbastanza in accordo con i valori dedotti in maniera geometrica e, di seguito, sono riportati i principali risultati ottenuti sia per un campo di moto uniforme che per un campo di moto rotatorio.

9.1. Incertezze nelle misure

Prima di passare all'analisi dei risultati delle misure sugli errori, è indispensabile fornire qualche ulteriore informazione sull'accuratezza dei sistemi stereoscopici utilizzati e sulle condizioni di misura tipicamente adoperate.

Sia per il metodo di ricostruzione geometrica delle componenti che per quello con mappatura tridimensionale, le due telecamere sono state disposte con una configurazione simmetrica con un'inclinazione di un angolo pari a 35° rispetto alla retta normale al piano di misura e con un'inclinazione del sensore rispetto all'obiettivo di circa 5° . I vincoli imposti dai supporti e dall'apparato sperimentale non hanno consentito di disporre le telecamere in base all'angolo ottimale di 45° ; ciò ha comportato un incremento nella fluttuazione della componente dello spostamento ortogonale al piano di misura rispetto a quelle del piano. Per simulare le condizioni di misura tipiche degli apparati stereoscopici, le telecamere sono state posizionate ad una distanza di circa 450mm dal piano di misura.

La procedura di calibrazione è stata effettuata utilizzando una griglia cartesiana di 30×30 punti neri su sfondo bianco distanziati in entrambe le direzioni di un passo regolare pari a 5mm . Questa distanza è risultata adeguata per il calcolo corretto delle funzioni interpolanti per entrambi i metodi. Nel caso del metodo di ricostruzione geometrico, lo scarto quadratico medio residuo sull'immagine della funzione di interpolazione utilizzata per la correzione degli errori prospettici è pari a circa 0.5 pixel mentre, per la funzione interpolante adoperata nel metodo con mappatura tridimensionale, si è ottenuto, complessivamente sui tre piani, uno scarto residuo di circa 0.35 pixel. Il campo di vista utilizzato per le misure è stato generalmente una regione rettangolare della griglia avente un'estensione di $100 \times 60\text{mm}^2$.

	Fluttuazioni [μm]			
	Errore medio	rms	Min	Max
u	-1.1	1.6	-3.0	3.0
v	-1.1	1.8	-5.2	2.3
w	-2.5	2.2	-7.2	0.7

Tabella 9.1 Incertezze nella misura del sistema stereoscopico con funzione di mappatura tridimensionale per un campo di spostamento con $u = 0.2\text{mm}$, $v = 0.3\text{mm}$ e $w = 0.4\text{mm}$.

La sequenza di spostamenti da misurare è stata imposta ad un supporto su cui è stata incollata un'immagine di particelle casuali generata da computer. Per imporre gli spostamenti uniformi si sono utilizzate tre slitte micrometriche traslazionali disposte a 90° l'una rispetto all'altra, Cia-

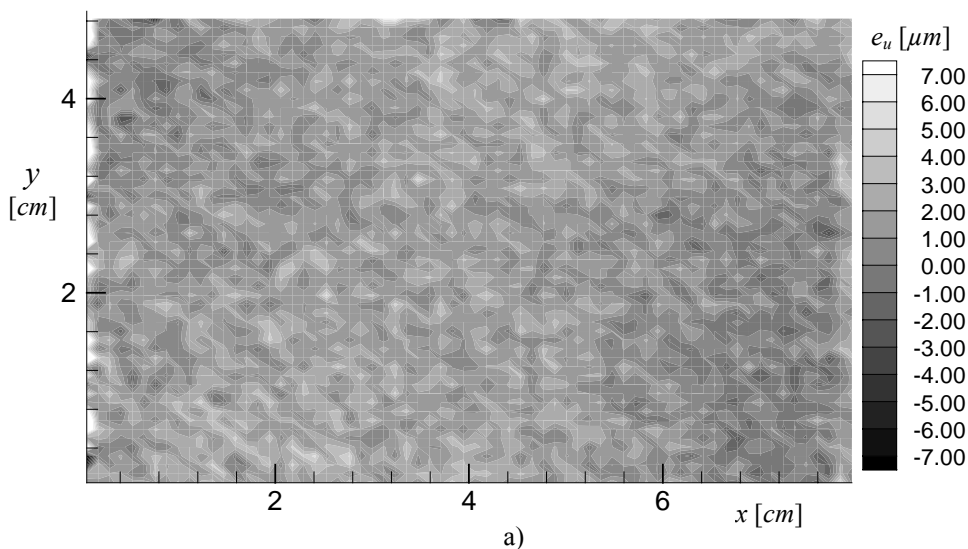
scuna slitta è in grado di effettuare un determinato spostamento con un'incertezza di $\pm 5\mu m$ sugli spostamenti imposti. Per imporre gli spostamenti con rotazione rigida, invece, si sono utilizzate slitte rotazionali aventi un'incertezza nella rotazione pari a $\pm 1'$.

	Fluttuazioni [μm]			
	Errore medio	σ	Min	Max
u	0.6	1.3	-1.5	2.5
v	-3.2	1.8	-7.5	2.0
w	-4.7	2.3	-6.2	6.0

Tabella 9.2 Incertezze nella misura del sistema stereoscopico con ricostruzione geometrica delle tre componenti per un campo di spostamento con $u = 0.2mm$, $v = 0.3mm$ e $w = 0.4mm$.

Una stima più accurata delle incertezze complessive sul sistema di misura è stata realizzata imponendo uno spostamento di riferimento alle slitte e confrontando successivamente i valori misurati con le tecniche stereoscopiche con quelli di riferimento. In Tabella 9.1 e Tabella 9.2 sono riportate, rispettivamente per il metodo con mappatura tridimensionale ed il metodo di ricostruzione geometrico, le fluttuazioni degli spostamenti corrispondenti ad uno spostamento di riferimento con $u = 0.2mm$, $v = 0.3mm$ e $w = 0.4mm$. In ciascuna colonna delle tabelle sono riportati nell'ordine l'errore medio, lo scarto quadratico medio (σ), la fluttuazione minima e la fluttuazione massima nella regione del piano di misura inquadrato dalle due telecamere. Per entrambi i metodi, i valori misurati sono inferiori all'incertezza connessa al posizionamento della slitta e, per la componente di spostamento w , lo scarto quadratico medio è superiore a quello relativo alle altre componenti in conseguenza del posizionamento delle telecamere ad un angolo inferiore a 45° . Inoltre, per il metodo con ricostruzione geometrica, le fluttuazioni sono leggermente più elevate a causa della maggiore incertezza nella determinazione dei parametri geometrici e della sensibilità ad un eventuale non perfetto allineamento delle telecamere.

Ai fini di una valutazione quantitativa degli errori di misura nella regione di interesse, in ciascun punto dell'immagine, i risultati saranno presentati in termini della differenza tra il valore misurato con le due tecniche ed il valore teorico imposto di volta in volta con le slitte traslazionali e quelle rotazionali. Queste differenze saranno indicate rispettivamente per le tre componenti del campo di spostamento con i simboli e_u , e_v ed e_w . A differenza dell'analisi teorica, in questo caso si è scelto di non riportare i risultati in termini dell'errore percentuale sulle componenti poiché, per molti spostamenti, il valore da misurare è prossimo allo zero.



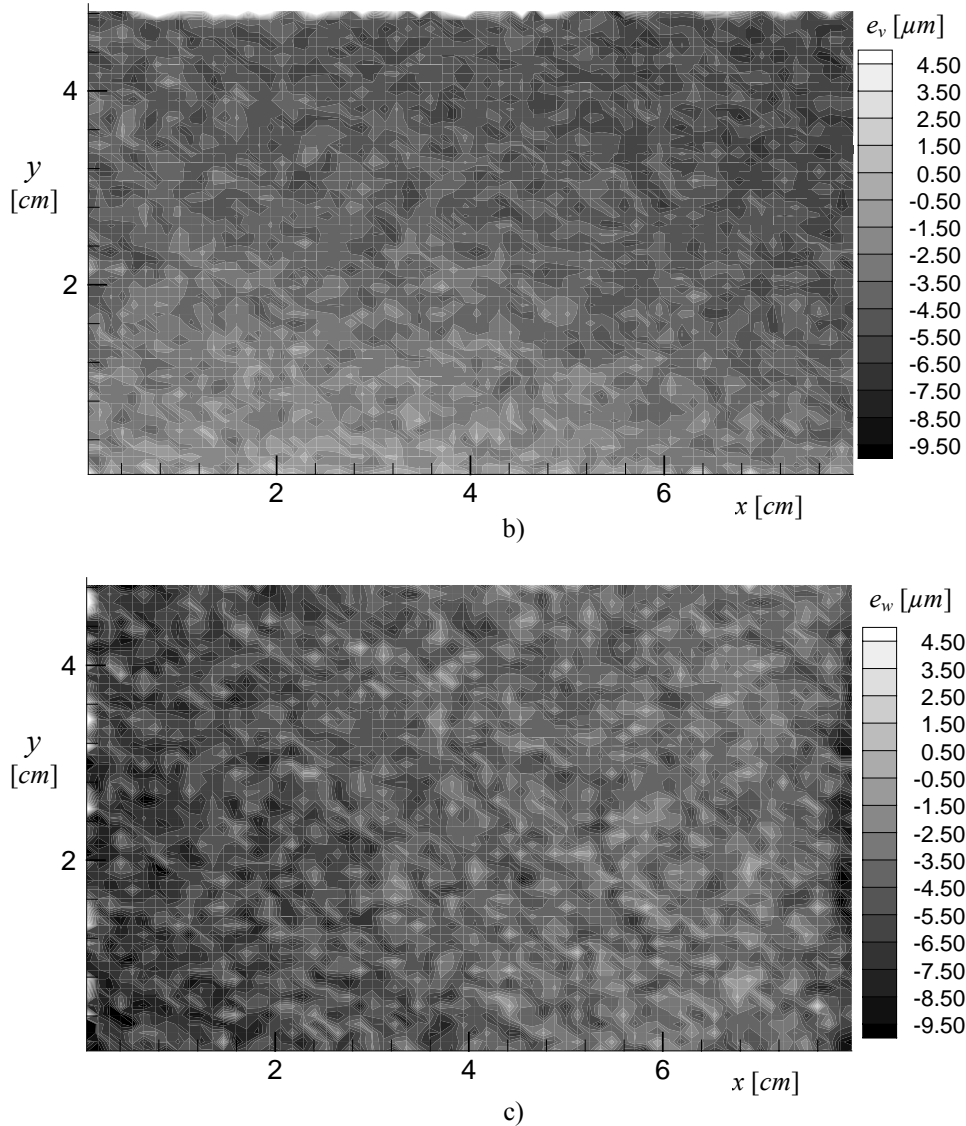


Figura 9.1 Mappe dell'errore nel piano di misura misurate con la tecnica di ricostruzione geometrica delle componenti per uno spostamento con $u = -0.4mm$, $v = -0.4mm$ e $w = -0.4mm$. a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

In Figura 9.1 sono riportate le mappe degli errori sulle tre componenti, così come sono stati appena definiti, per un campo di spostamento uniforme ($u = -0.4mm$, $v = -0.4mm$, $w = -0.4mm$) e con il piano di calibrazione coincidente con il piano di misura. Da ciascuna delle tre mappe si evince che, ad eccezione di pochi punti isolati, il valore dell'errore è ancora una volta inferiore all'incertezza sperimentale. Anche se l'errore appare distribuito per lo più in maniera casuale sull'immagine, sono comunque presenti, soprattutto nelle mappe relative alle componenti v e w , alcune aree in cui l'errore appare correlato. Ciò può essere dovuto sia al non perfetto posizionamento del piano di misura, sia agli errori residui di interpolazione derivanti dalla calibrazione. Per ridurre gli errori sistematici presenti nelle tecniche di misura, anziché sottrarre il valore teorico al valore calcolato in presenza dell'errore di allineamento, alla misura con l'errore imposto si è sottratto punto per punto il valore ottenuto dalla misura in assenza dell'errore di allineamento e con gli stessi parametri di calibrazione. In questo caso, però, si ha lo svantaggio di aumentare la varianza della variabile da stimare con conseguente aumento dell'incertezza di misura.

Nei paragrafi seguenti sono riportati separatamente i risultati ottenuti per il campo di spostamento uniforme e per quello rotatorio attorno all'asse y per diverse posizioni del piano di misura.

Per quanto riguarda gli spostamenti uniformi, sono state scelte soltanto due tipologie di spostamento, ovvero una con componenti positive ($u = v = w = 0.4mm$) ed una con componenti negative ($u = v = w = -0.4mm$). Per quanto riguarda le rotazioni, si sono effettuate prove con rotazioni rigide variabili tra -2° e $+2^\circ$ a seconda dei casi. In entrambi i tipi di spostamenti, le tipologie di errori studiati sono state gli errori di traslazione del piano di misura tra $-2mm$ e $+2mm$ e gli errori di rotazione intorno all'asse y tra -2° e $+2^\circ$. I valori assunti dalle rotazioni negli intervalli di valori menzionati sono stati $\pm 0.5^\circ$, $\pm 1^\circ$ e $\pm 2^\circ$, quelli relativi alle traslazioni del piano di misura sono stati imposti pari a $\pm 1mm$ e $\pm 2mm$. Nel caso di errori di rotazione del piano di misura, ci si è limitati ad analizzare soltanto i campi di moto generati da una rotazione di $\pm 1^\circ$. In Tabella 9.3 sono riassunte schematicamente tutte le tipologie di prove esaminate. In ciascuna colonna della tabella, sono indicati soltanto i valori corrispondenti a quantità non nulle.

Campo di spostamento						Errore di posizione del piano			
Uniforme [mm]			Rotazione rigida			Traslazione	Rotazione		
u	v	w	asse x	asse y	asse z	z [mm]	asse x	asse y	asse z
+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	-	-	-	± 1.0	-	-	-
- 0.4	- 0.4	- 0.4	-	-	-	± 1.0	-	-	-
+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	-	-	-	± 2.0	-	-	-
- 0.4	- 0.4	- 0.4	-	-	-	± 2.0	-	-	-
+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 0.5^\circ$	-
- 0.4	- 0.4	- 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 0.5^\circ$	-
+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 1.0^\circ$	-
- 0.4	- 0.4	- 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 1.0^\circ$	-
+ 0.4	+ 0.4	+ 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 2.0^\circ$	-
- 0.4	- 0.4	- 0.4	-	-	-	-	-	$\pm 2.0^\circ$	-
-	-	-	-	$+ 0.5^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 0.5^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 0.5^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 0.5^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 1.0^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 1.0^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 1.0^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 1.0^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 2.0^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 2.0^\circ$	-	± 1.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 2.0^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$- 2.0^\circ$	-	± 2.0	-	-	-
-	-	-	-	$+ 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 0.5^\circ$	-
-	-	-	-	$- 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 0.5^\circ$	-
-	-	-	-	$+ 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 1.0^\circ$	-
-	-	-	-	$- 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 1.0^\circ$	-
-	-	-	-	$+ 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 2.0^\circ$	-
-	-	-	-	$- 1.0^\circ$	-	-	-	$\pm 2.0^\circ$	-

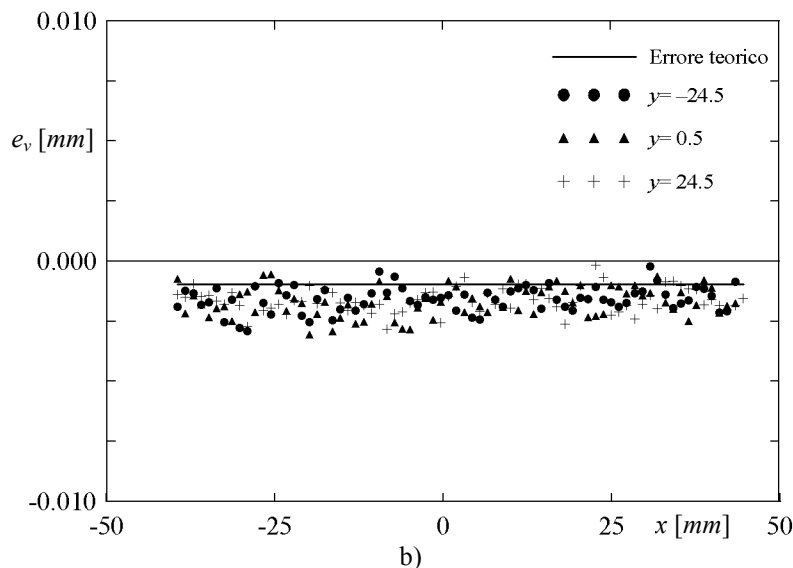
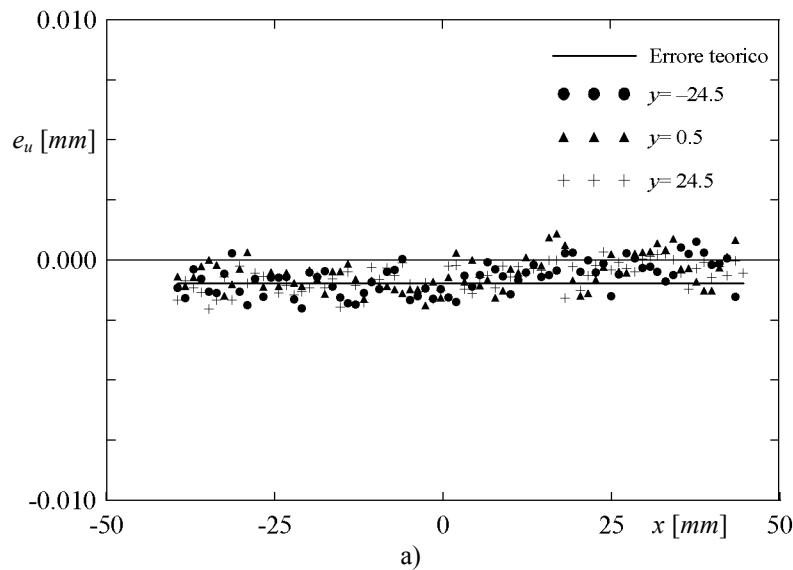
Tabella 9.3 Schema riassuntivo della tipologia di prove effettuate.

9.2. Campo di spostamento uniforme

9.2.1. Errore di traslazione del piano di misura

Dall'analisi teorica sviluppata nella prima parte del lavoro, si è visto che per un campo di spostamento uniforme gli errori di traslazione del piano di misura sono trascurabili anche per traslazioni dell'ordine di qualche millimetro. In tutti i casi esaminati, questo risultato è stato ampiamente confermato dai dati sperimentali.

In Figura 9.2, ad esempio, sono riportati gli errori di allineamento per ciascuna componente nel caso di una traslazione del piano di 1mm nella direzione positiva dell'asse z e per un campo di spostamento negativo con $u = v = w = -0.4\text{mm}$. In ciascun grafico sono riportati i valori ottenuti sperimentalmente lungo tre diverse ordinate del piano di misura e, con la linea a tratto continuo, è stato indicato l'andamento dell'errore teorico. Per tutte e tre le componenti analizzate, l'errore assume un valore costante su tutta l'immagine ed i valori sperimentali tendono a distribuirsi attorno al valore teorico anche se con qualche differenza tra le singole componenti. Infatti, mentre per le componenti u e v i valori dell'errore sull'immagine assumono quasi sempre un segno coerente con quello derivato per via geometrica, nel caso della componente w , a causa delle maggiori fluttuazioni legate all'angolo di inclinazione delle telecamere, i valori assumono frequentemente un segno opposto rispetto a quello corretto. Occorre osservare che, in questo caso, l'errore da misurare risulta inferiore all'incertezza sperimentale nel posizionamento delle slitte e, pertanto, non è stato possibile effettuare una stima più accurata.



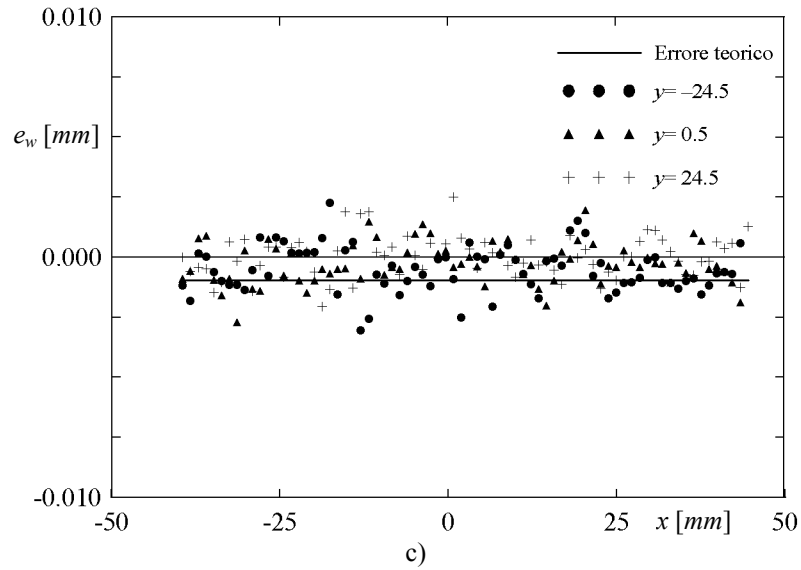
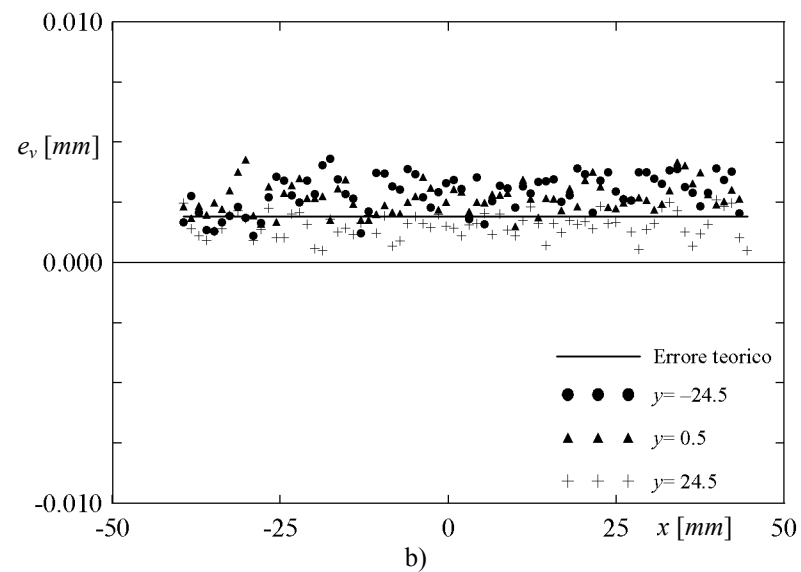
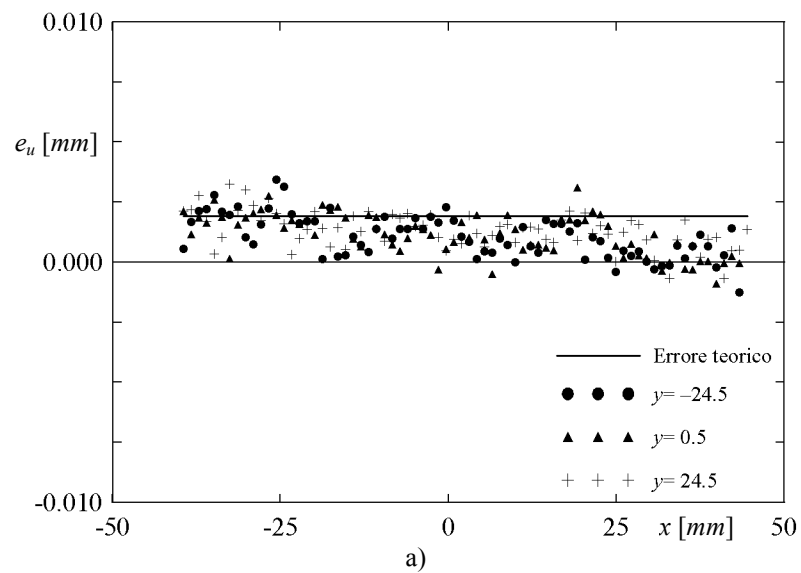


Figura 9.2 Errori di allineamento nel piano di misura per tre diverse ordinate con il metodo con mappatura tridimensionale per uno spostamento con $u = -0.4\text{mm}$, $v = -0.4\text{mm}$ e $w = -0.4\text{mm}$ ed una traslazione del piano di 1mm . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .



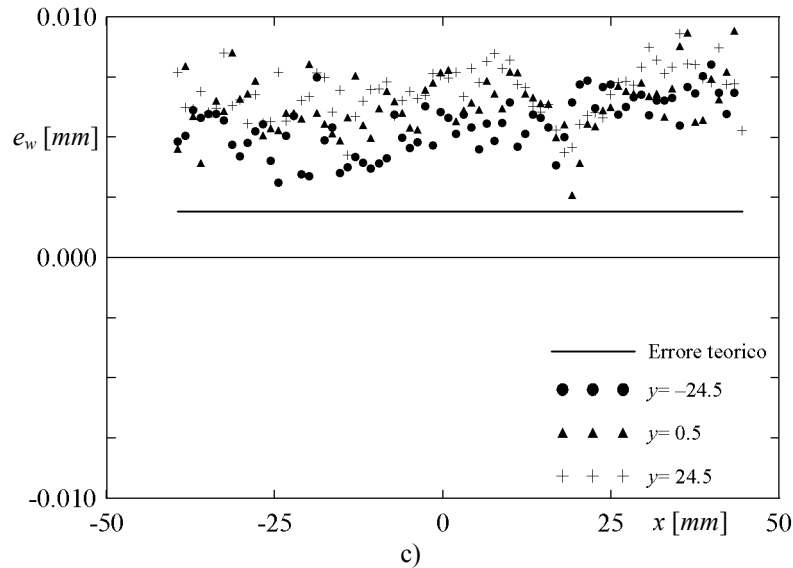


Figura 9.3 Errori di allineamento nel piano di misura per tre diverse ordinate con il metodo con mappatura tridimensionale per uno spostamento con $u = 0.4mm$, $v = 0.4mm$ e $w = 0.4mm$ ed una traslazione del piano di $2mm$. a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

I risultati delle prove ottenute imponendo la stessa tipologia di errore non sono riportati poiché sono analoghi a quelli mostrati in Figura 9.2; gli errori in qualche caso si discostano maggiormente dal valore teorico. In Figura 9.3 sono riportati i risultati della prova con spostamento uniforme $u = v = w = 0.4mm$ e traslazione del piano di $2mm$ per ciascuna delle tre componenti del campo di spostamento. In questo, come nel caso mostrato in precedenza, i valori si riferiscono alla misura ottenuta con la tecnica di mappatura tridimensionale. Anche in questo caso, per le componenti dello spostamento contenute nel piano di misura, gli errori calcolati sono coerenti sia in modulo che in segno con il valore teorico. Come si vede dai dati relativi ad ordinate diverse, la componente v (vedi Figura 9.3(b)) mostra errori leggermente decrescenti al crescere dell'ordinata. Questa tendenza, imputabile ad un errore residuo sulle immagini, è comunque inferiore ai $3\mu m$. La componente w , questa volta, assume valori più distanti da quello derivato per via geometrica e presenta un errore costante sull'immagine. L'errore pari a circa $4\mu m$, sebbene risulti evidente nel grafico, è comunque inferiore all'incertezza sperimentale.

9.2.2. Errore di rotazione del piano di misura

In presenza di una rotazione del piano di misura, per un campo di spostamento uniforme gli errori sono molto contenuti per tutte le componenti del campo di spostamento e, in linea di massima, si possono estendere anche per questa tipologia di errore le stesse considerazioni fatte nel paragrafo precedente in merito all'incertezza sperimentale.

La Figura 9.4 mostra, per le tre componenti, i risultati delle prove ottenute per un campo di spostamento uniforme ($u = v = w = -0.4mm$) per una rotazione del piano di misura di -1° . In figura sono mostrati i risultati lungo una singola ordinata dell'immagine ($y = -24.5mm$) e sono riportate le misure effettuate con entrambi i metodi. Lungo le altre rette parallele all'asse x , l'errore di allineamento assume un valore pressoché identico, così come dedotto da considerazioni geometriche. La curva teorica dell'errore, riportata a tratto continuo, in questo caso è inclinata rispetto all'asse orizzontale e presenta un errore massimo inferiore ai $2\mu m$. Per tutte le componenti il metodo di ricostruzione geometrico, come osservato a suo tempo, evidenzia una fluttuazione di poco superiore rispetto al metodo con mappatura tridimensionale. Gli errori sulle componenti u e v sono ancora una volta vicini al valore teorico, ma la fluttuazione dei dati nel piano di interesse ed il valore estremamente piccolo della pendenza della linea della curva dell'errore non hanno consentito di riscontrare in maniera evidente un'analogia tendenza nella distribuzione dei dati sperimentali. Per quanto riguarda la componente w , gli errori misurati sperimentalmente disco-

stano maggiormente da quelli teorici, ma sono sempre confrontabili con l'incertezza di misura.

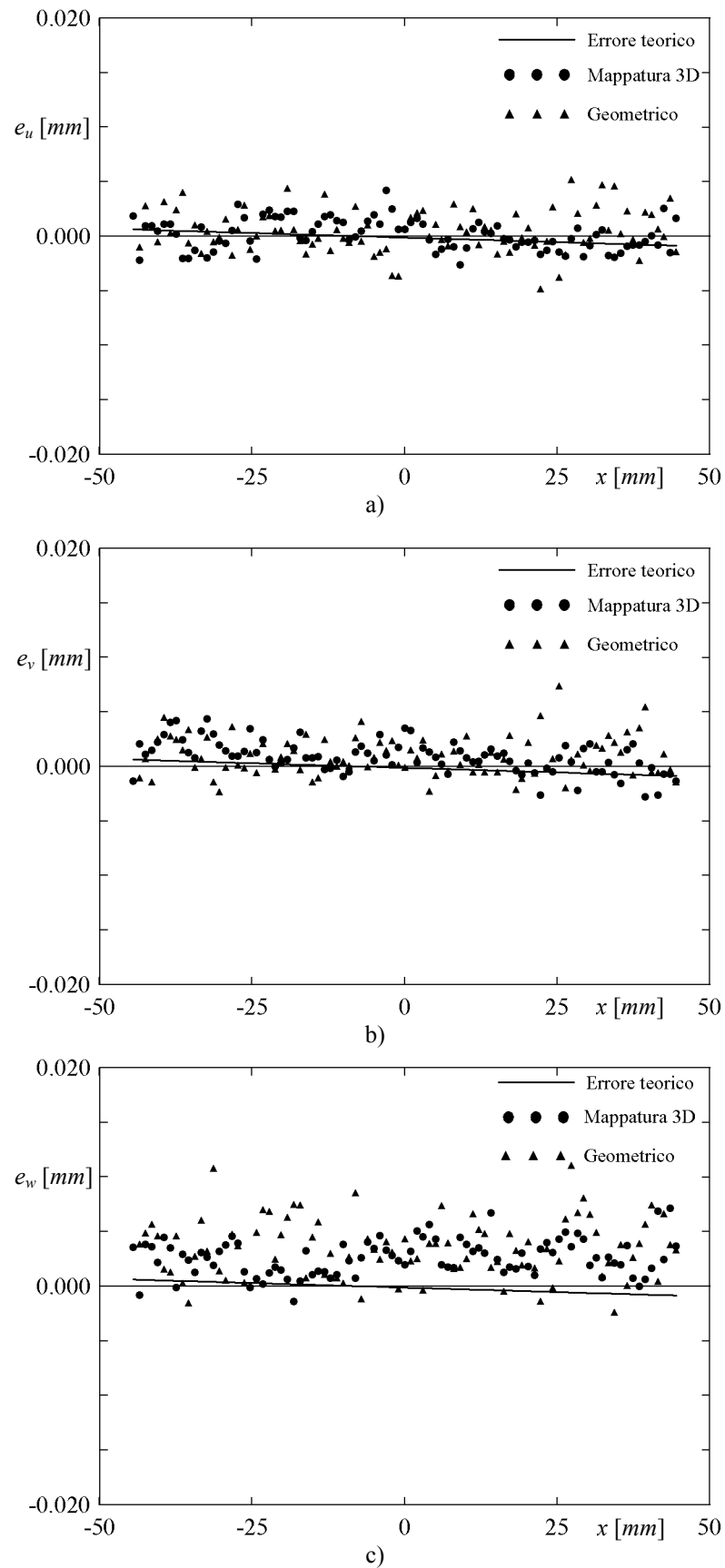


Figura 9.4 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5mm$ con i due metodi di ricostruzione per uno spostamento con $u = -0.4mm$, $v = -0.4mm$ e $w = -0.4mm$ ed una rotazione del piano di -1° . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

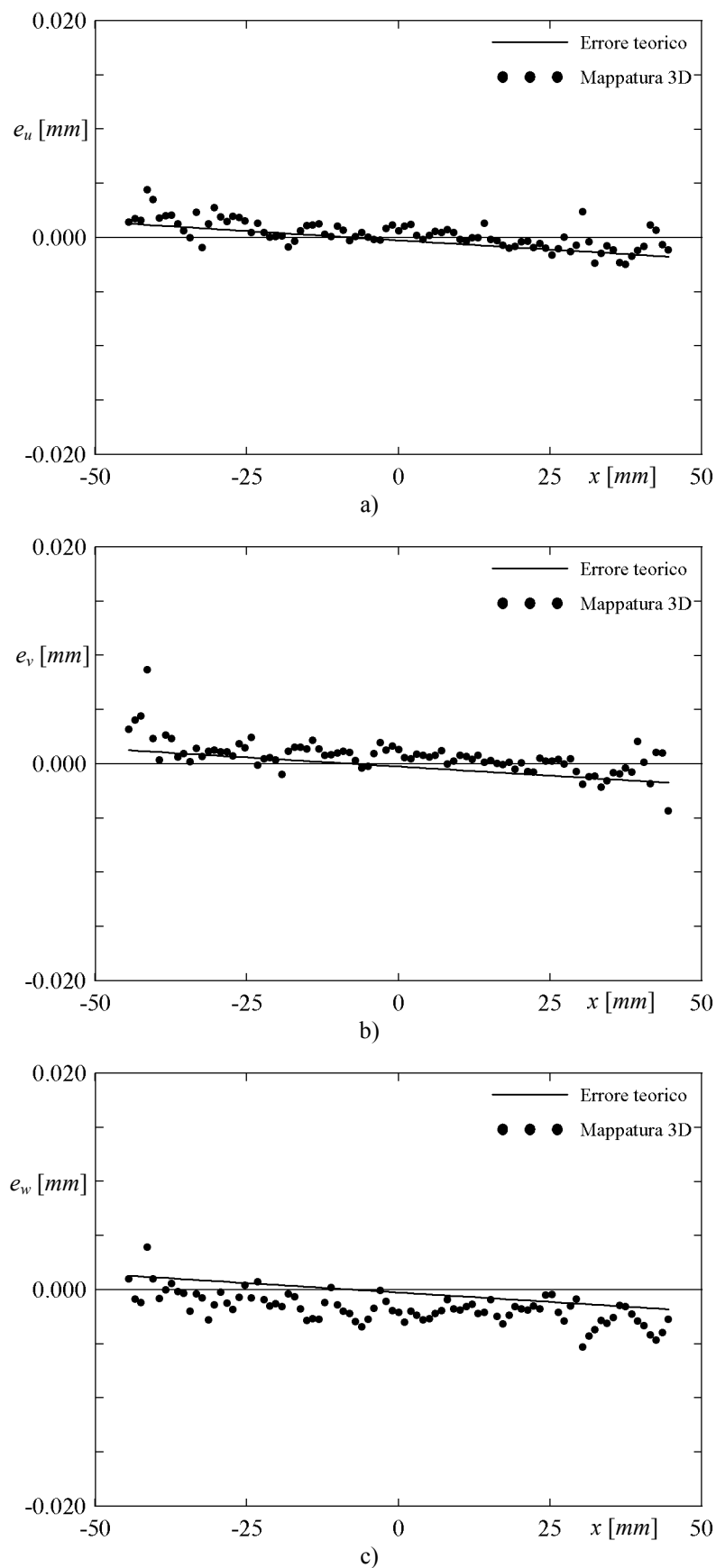


Figura 9.5 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale per uno spostamento con $u = 0.4\text{mm}$, $v = 0.4\text{mm}$ e $w = 0.4\text{mm}$ ed una rotazione del piano di 2° . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

Al crescere dell'angolo di inclinazione tra il piano di misura ed il piano di calibrazione, l'andamento lineare dell'errore di allineamento è più evidente anche se il valore massimo sull'immagine resta piuttosto contenuto. In Figura 9.5 sono mostrati gli errori relativi alle tre componenti per un campo di spostamento $u = v = w = 0.4\text{mm}$ ed un errore di allineamento di 2° . Per visualizzare meglio l'andamento degli errori nei grafici non sono stati riportati i risultati relativi al metodo di ricostruzione geometrica. Per tutte le componenti del campo di spostamento, nei dati è presente un piccolo andamento lineare lungo l'asse x ed ancora una volta, la componente ortogonale al piano di misura mostra uno scostamento dal valore teorico di poco superiore rispetto alle altre.

9.3. Campo di spostamento rotatorio

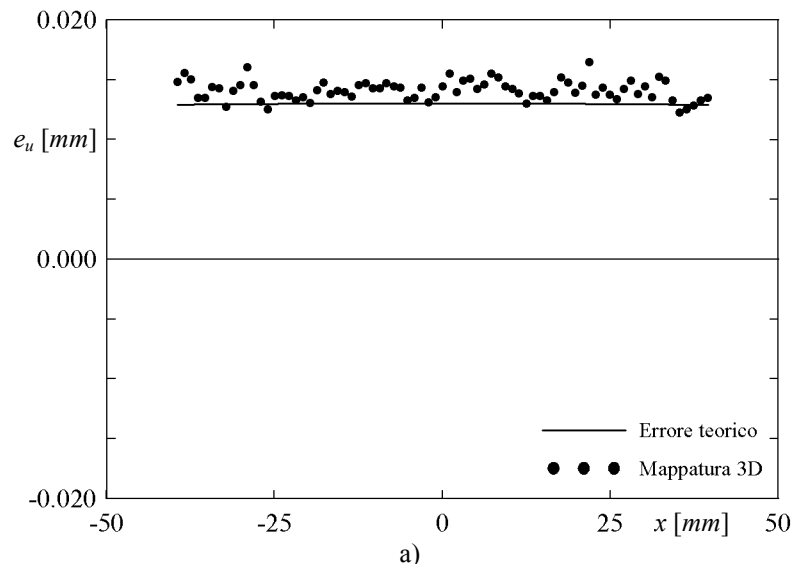
Nella misura di un campo di spostamento in cui sono presenti gradienti spaziali sulle tre componenti, come a suo tempo osservato, l'incidenza degli errori di allineamento aumenta notevolmente e diventa per alcune componenti significativamente superiore rispetto all'incertezza sperimentale. Per tale ragione, l'analisi dei risultati riportati di seguito riveste un ruolo decisivo nella comprensione delle caratteristiche dell'errore.

9.3.1. Errore di traslazione del piano di misura

Imponendo un campo di spostamento rotatorio intorno all'asse y , la componente maggiormente affetta da errore è quella orizzontale poiché la componente verticale è nulla mentre quella ortogonale al piano di misura, al variare della posizione, cambia in misura minore rispetto alla u .

In Figura 9.6 è riportato l'errore di allineamento sulla componente u per una traslazione del piano di misura pari a 1mm e per angoli di rotazione pari a 0.5° , 1° e 2° lungo la riga posta ad $y = -24.5\text{mm}$. Al crescere dell'angolo di rotazione l'errore aumenta progressivamente ed i valori misurati si dispongono sempre in corrispondenza della curva ricavata in maniera teorica ad una distanza da quest'ultima inferiore a $5\mu\text{m}$. Soltanto gli errori calcolati per un angolo di rotazione pari a 1° presentano un andamento leggermente crescente lungo l'ascissa e ciò può essere dovuto all'incertezza nel posizionamento della slitta rotazionale.

I risultati degli errori di misura per tutte le componenti del campo di spostamento sono riportati in Figura 9.7 per una rotazione negativa di 1° e per una traslazione del piano di misura di una quantità pari a -1mm . Analogamente alle altre misure, le due tecniche stereoscopiche forniscono risultati molto simili con una maggiore fluttuazione per le misure eseguite con il metodo di ricostruzione geometrica. Gli errori sulla componente u sono identici a quelli ottenuti in Figura 9.6(b), per la componente v (vedi Figura 9.7(b)) si ha una sovrastima inferiore a $5\mu\text{m}$ e, per la componente w (vedi Figura 9.7(c)), l'andamento lineare dell'errore teorico è in accordo con i dati sperimentali nonostante l'elevata rumorosità riscontrata nelle misure.



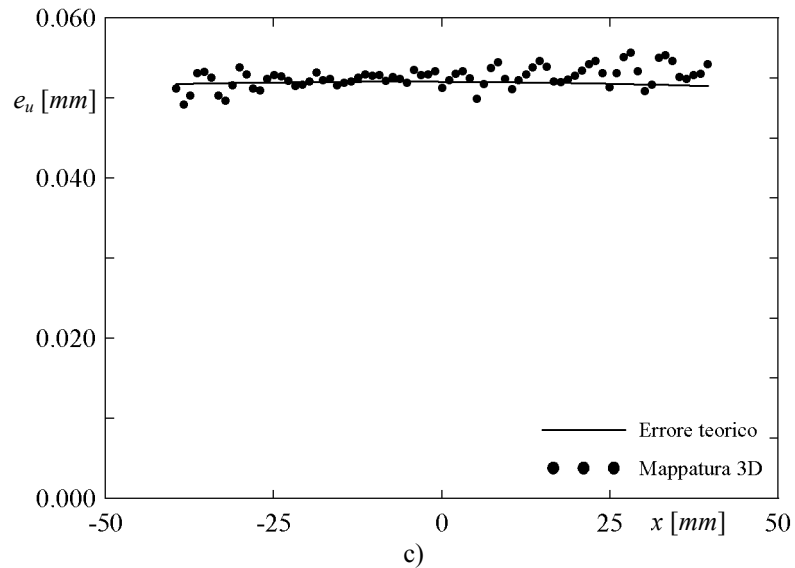
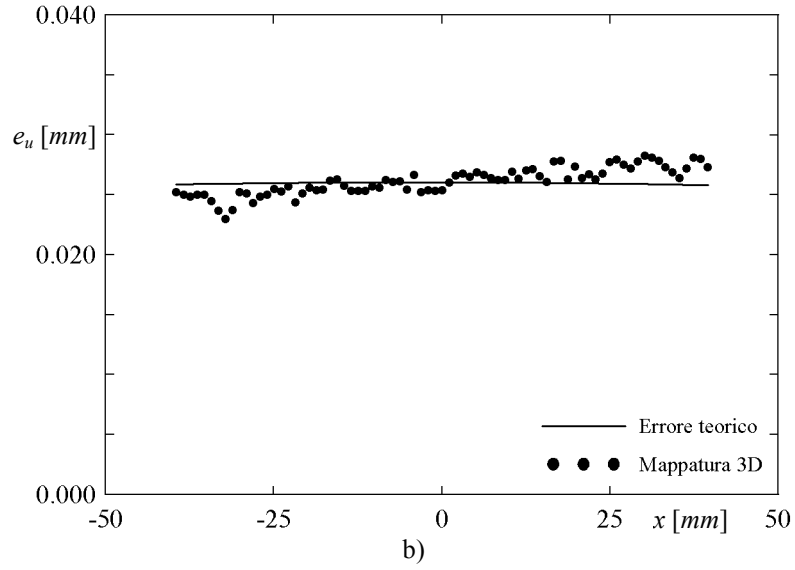
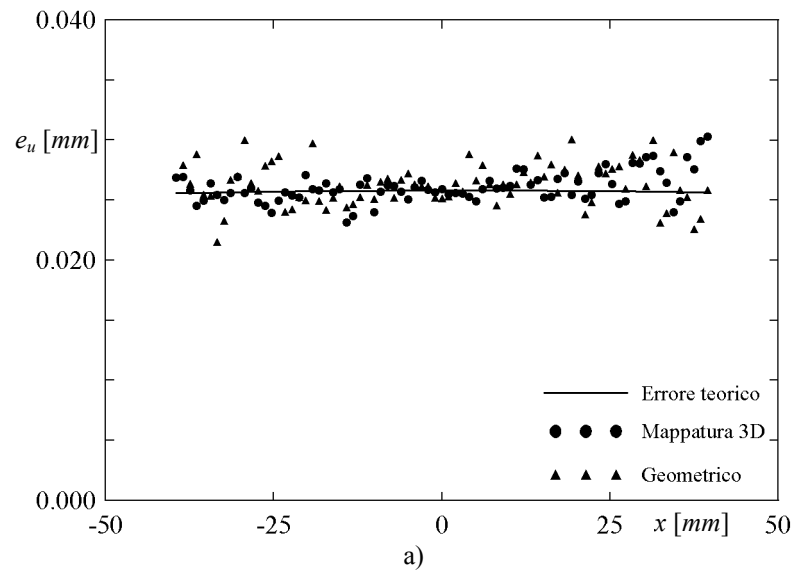


Figura 9.6 Errori di allineamento sulla componente u nel piano di misura ad $y = -24.5\text{ mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale, per uno spostamento rotatorio intorno all'asse y ed una traslazione del piano di 1 mm . a) Rotazione di 0.5° ; b) rotazione di 1° ; c) rotazione di 2° .



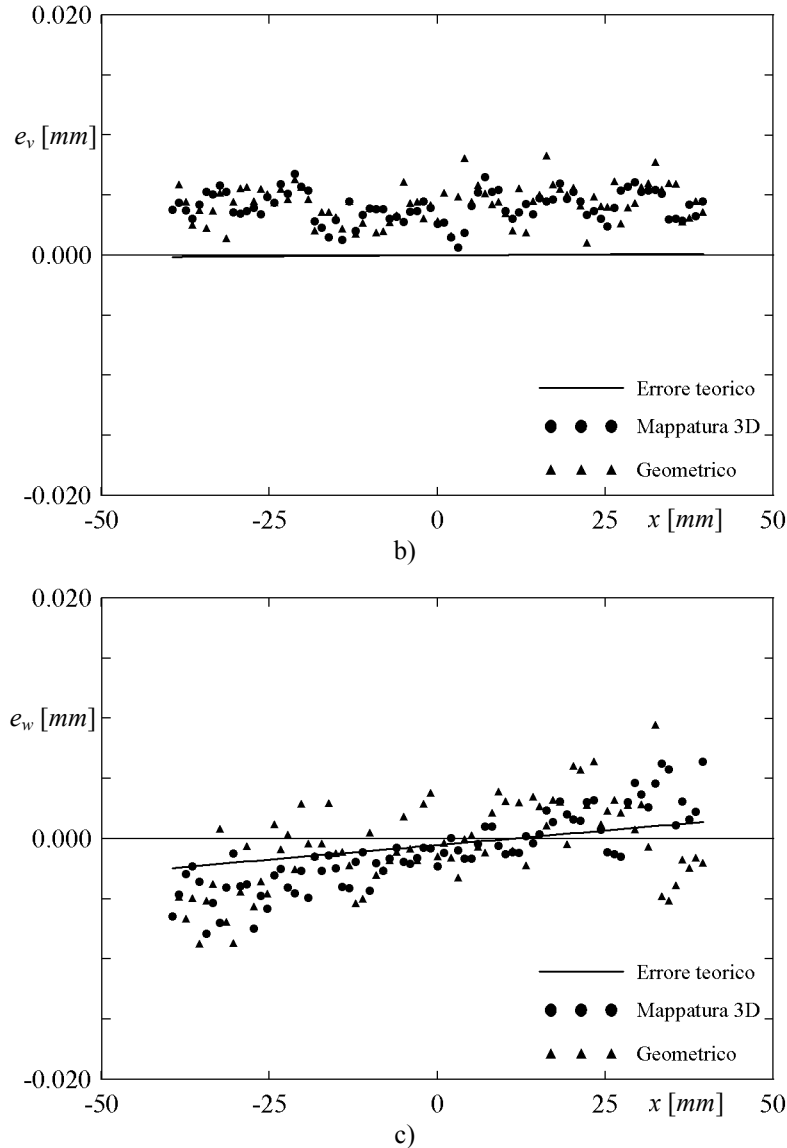


Figura 9.7 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5 \text{ mm}$ con i due metodi di ricostruzione per uno spostamento rotatorio di -1° intorno all'asse y ed una traslazione del piano di -1 mm . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

Lo stesso tipo di analisi sugli errori può essere effettuata imponendo una traslazione maggiore al piano di misura effettivo. In Figura 9.8 sono riportati i valori dell'errore di allineamento sulla componente u , calcolati con il metodo con mappatura tridimensionale, per una traslazione di 2 mm e per campi di moto con rotazione rigida oraria effettuata con angoli pari a -0.5° , -1° e -2° . Per tutti gli spostamenti imposti, il valore degli errori misurati è in ottimo accordo con la previsione teorica e la differenza tra i valori della curva teorica ed i dati sperimentali è in media inferiore a $3 \mu\text{m}$.

I tre grafici mostrati in Figura 9.9, invece, riportano gli errori sulle tre componenti per un campo rotatorio di -1° ed una traslazione del piano di misura pari a -2 mm . In questo caso, la dispersione delle misure sperimentali è centrata rispetto alla linea teorica sia per la componente u che per la componente v e gli errori sono sempre inferiori all'incertezza sperimentale. I dati relativi all'errore sulla terza componente del campo di spostamento, nonostante presentino l'andamento lineare prescritto dalla curva teorica sono inferiori di circa $6 \mu\text{m}$. Il maggiore scostamento rispetto alle altre componenti, non è determinato soltanto dalla maggiore varianza sulla w , ma anche dall'ulteriore incertezza nella determinazione del centro di rotazione del campo di moto imposto con le slitte.

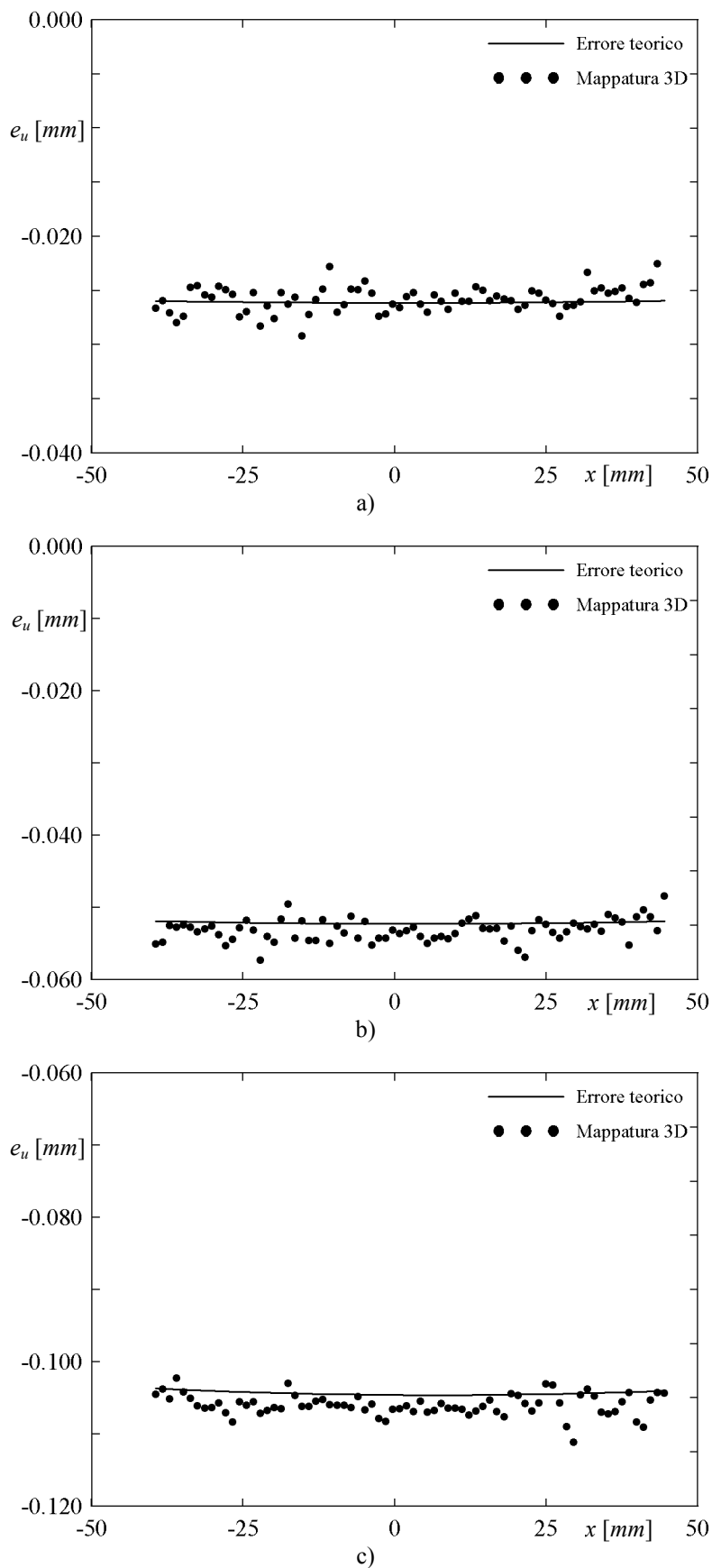


Figura 9.8 Errori di allineamento sulla componente u nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale, per uno spostamento rotatorio intorno all'asse y ed una traslazione del piano di 2mm . a) Rotazione di -0.5° ; b) rotazione di -1° ; c) rotazione di -2° .

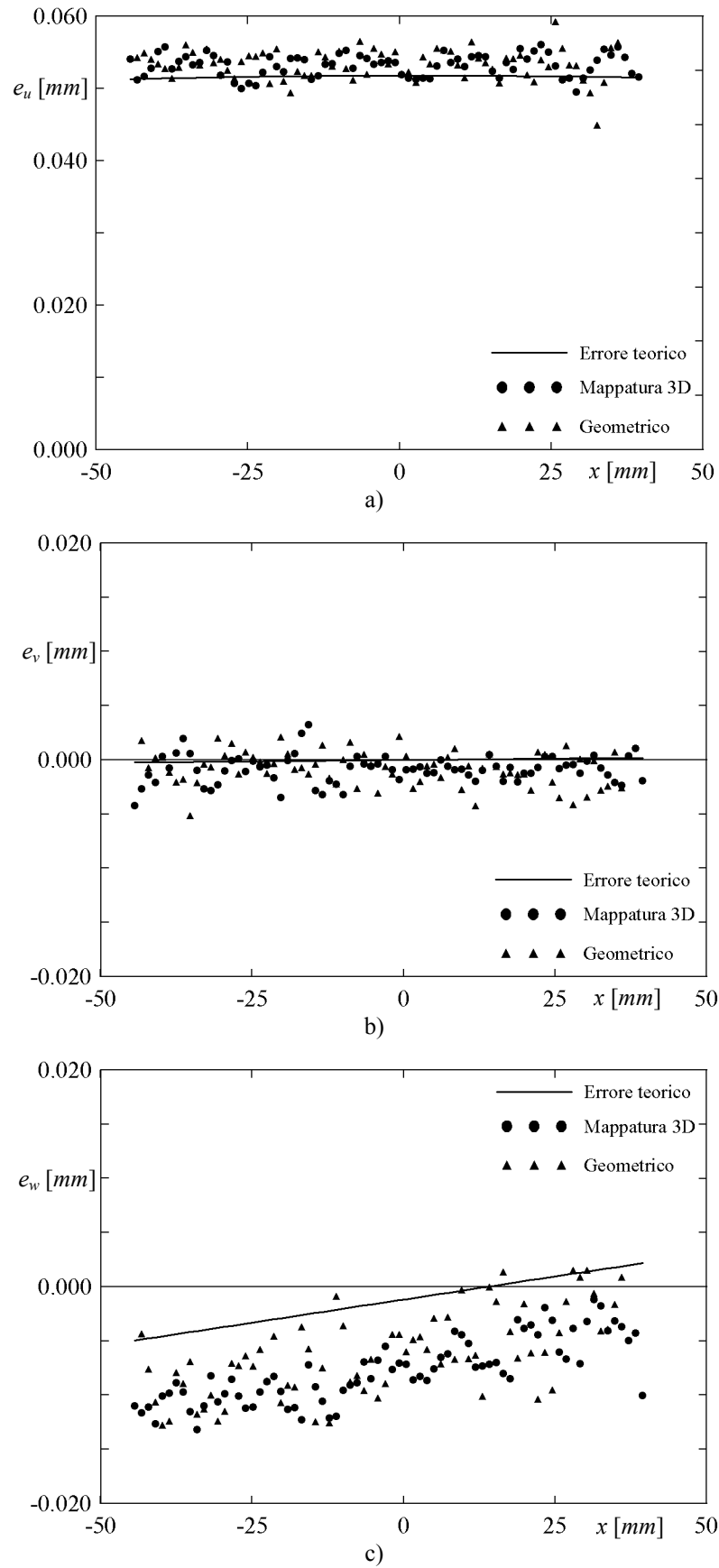


Figura 9.9 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con i due metodi di ricostruzione per uno spostamento rotatorio di -1° intorno all'asse y ed una traslazione del piano di -2mm . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

9.3.2. Errore di rotazione del piano di misura

Prima di analizzare più in dettaglio i risultati ottenuti imponendo questo tipo di errore, è indispensabile fare qualche altra considerazione sulle incertezze di misura nel caso si utilizzino le slitte rotazionali. Innanzitutto, si osservi che l'incertezza nel posizionamento della griglia, corrispondente allo spostamento angolare minimo consentito dalla slitta, è pari alla rotazione di un primo e ciò corrisponde ad uno spostamento massimo sull'immagine di circa $10\mu\text{m}$ sulla componente w . Calcolando lo spostamento come differenza tra due posizioni angolari assunte dalla slitta, l'incertezza nella misura aumenta ulteriormente. Se si tiene conto che la stima dell'errore avviene per differenza tra due misure condotte in maniera analoga e che, a causa dell'angolo tra le telecamere l'incertezza aumenta quasi di un fattore 2, l'incertezza sulla w assume un valore notevolmente superiore rispetto a quello teorico stimato in base all'incertezza sulla slitta. Su un campione di cinquanta misure si è stimato uno scarto quadratico medio di circa $10\mu\text{m}$ per la componente u e di circa $38\mu\text{m}$ per la w . D'altra parte, in talune prove l'ordine di grandezza dell'errore è confrontabile con l'incertezza nella misura e ciò rende difficile un'analisi accurata dei risultati. Per ridurre la variabilità della misura, le stime dovrebbero essere effettuate mediando i risultati su un numero di campioni elevati (40); tuttavia, per esigenze di tempo, non è stato possibile utilizzare un numero di campioni superiore a 3.

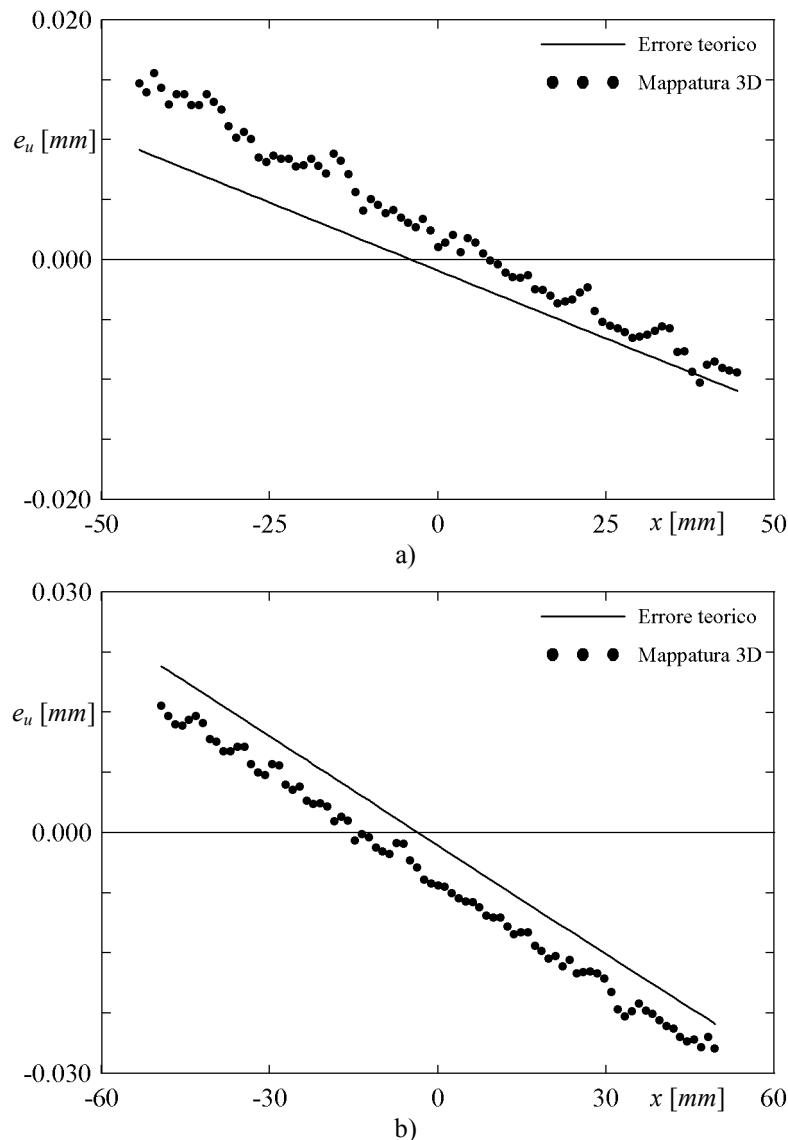


Figura 9.10 Errori di allineamento sulla componente u nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale, per uno spostamento rotatorio intorno all'asse y di -1° ed una rotazione del piano di misura. a) Rotazione di 0.5° ; b) rotazione di 1° .

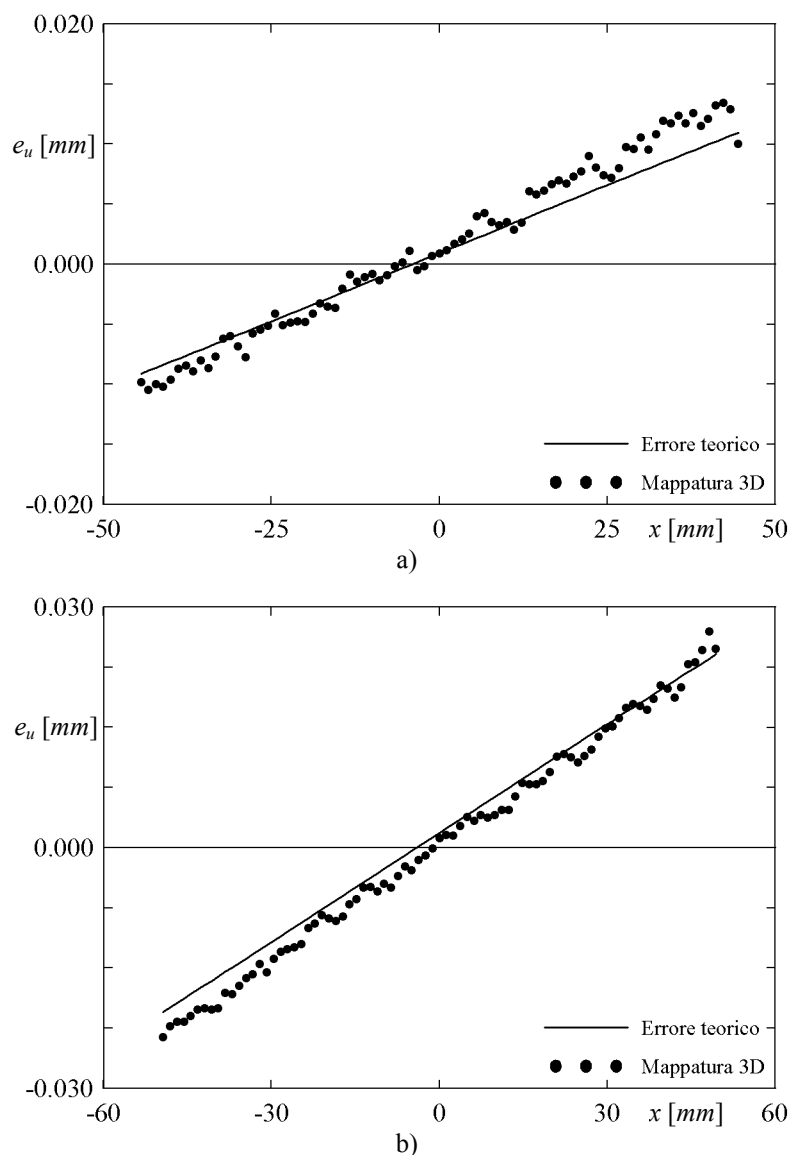


Figura 9.11 Errori di allineamento sulla componente u nel piano di misura ad $y = -24.5\text{ mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale, per uno spostamento rotatorio intorno all'asse y di 1° ed una rotazione del piano di misura. a) Rotazione di 0.5° ; b) rotazione di 1° .

In Figura 9.10 sono riportati gli errori di allineamento per la componente u , che anche in questo caso è quella affetta da un errore maggiore, in presenza di una rotazione rigida di -1° e per rotazioni del piano di misura di 0.5° ed 1° calcolati con la tecnica di mappatura tridimensionale. Nella misura con rotazione di 0.5° (Figura 9.10(a)) l'errore ha lo stesso andamento della curva teorica, presentando una pendenza diversa ed un errore massimo di $10\mu\text{m}$. L'errore rientra nei limiti dell'incertezza di misura di cui si è appena discusso. Nelle misure con rotazione di 1° , invece, la retta su cui sono dispersi i dati ha pendenza identica a quella teorica e si trova ad una distanza di circa $5\mu\text{m}$ da quest'ultima. In questo caso, l'errore appare imputabile all'incertezza nell'individuazione del centro di rotazione piuttosto che all'incertezza connessa al posizionamento del piano.

Lo stesso tipo di errori, per la componente del campo di spostamento lungo la direzione x , sono stati analizzati in Figura 9.11 per un campo di moto rotatorio di -1° intorno all'asse y . Sia per la rotazione del piano di misura di 0.5° che per quella ad 1° , i dati sperimentali si distribuiscono vicino alla curva dell'errore ricavata geometricamente. Rispetto alla situazione esaminata in Figura 9.10, le differenze tra i valori derivati per via teorica e quelli misurati sperimentalmente sono più contenute ed anche gli scostamenti massimi sono inferiori a $4\mu\text{m}$.

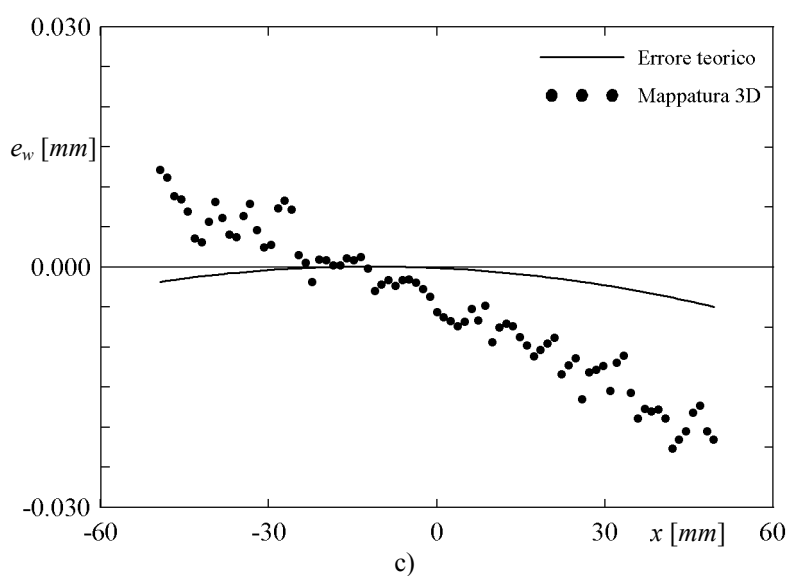
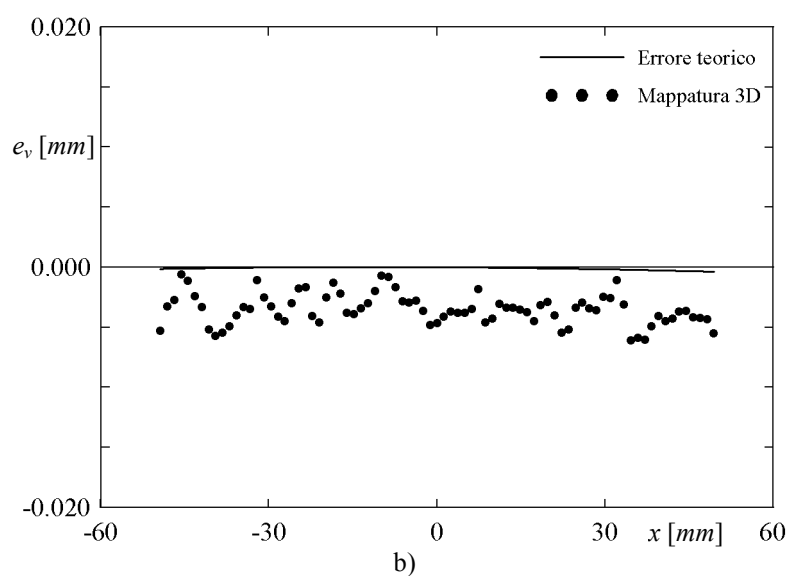
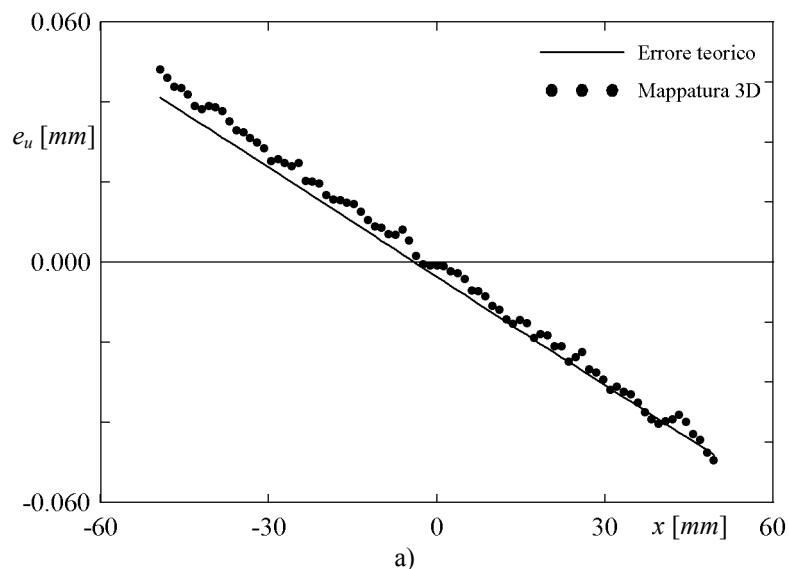


Figura 9.12 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale per uno spostamento rotatorio di 1° intorno all'asse y ed una rotazione del piano di 2° . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

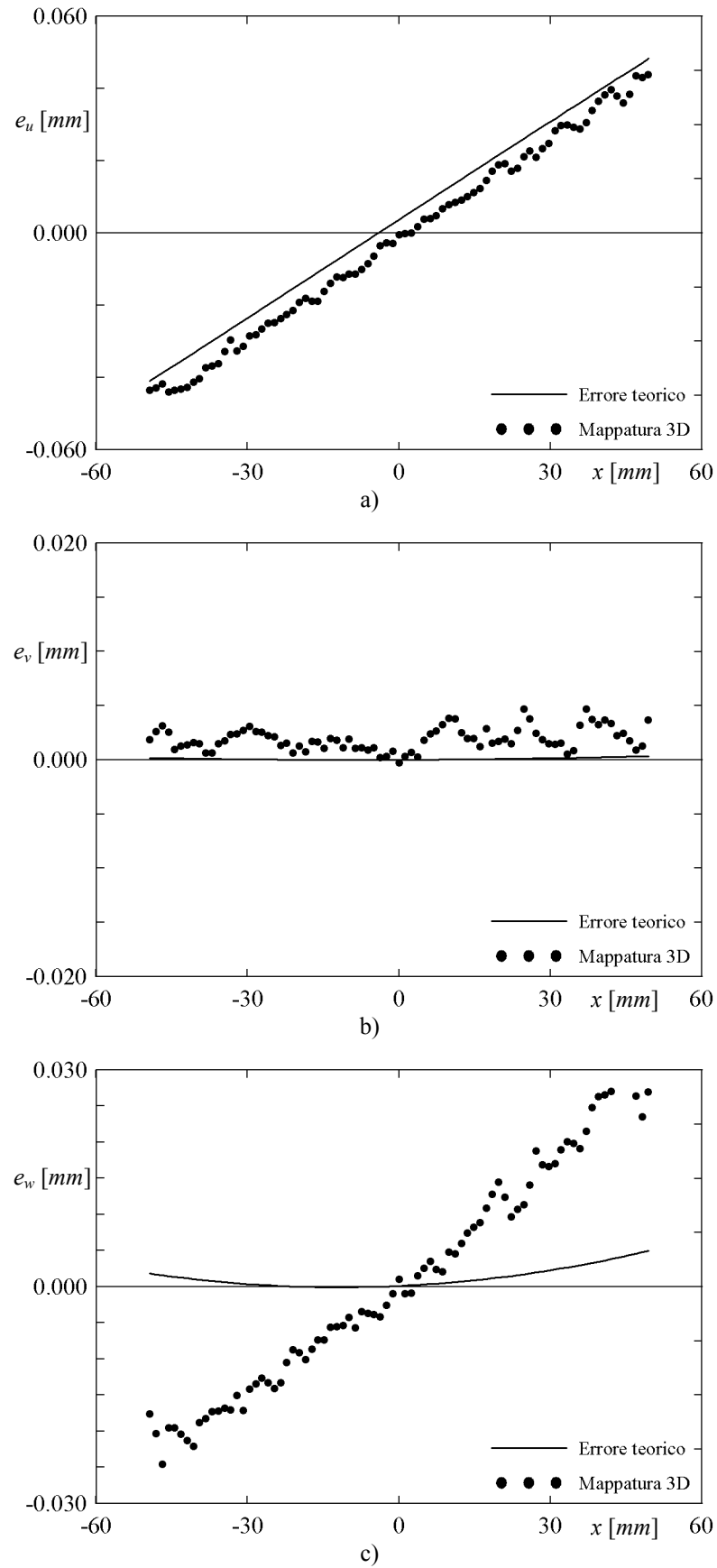


Figura 9.13 Errori di allineamento nel piano di misura ad $y = -24.5\text{mm}$ con il metodo con mappatura tridimensionale per uno spostamento rotatorio di -1° intorno all'asse y ed una rotazione del piano di 2° . a) Errore sulla componente u ; b) errore sulla componente v ; c) errore sulla componente w .

Infine, in Figura 9.12 e Figura 9.13 sono riportati i risultati ottenuti per tutte e tre le componenti, rispettivamente per un campo di moto con rotazione rigida di 1° e -1° , imponendo al piano di misura una rotazione di 2° . In entrambi i casi, gli errori sulle componenti u e v sono inferiori a $5\mu m$ e sono coerenti con la stima teorica. La componente w , invece, è affetta da errori molto più elevati che sono lontani dalla previsione teorica. Sebbene i valori calcolati siano molto alti, la differenza rispetto alla curva a tratto continuo rientra nell'incertezza con cui è possibile stimare l'errore che, come già detto, ha uno scarto quadratico medio pari a $35\mu m$. Un ulteriore problema nasce dal fatto che la quantità da misurare pur essendo prossima allo zero, è calcolata dalla differenza di due quantità comunque elevate. Per poter ottenere un grado di accuratezza maggiore, come è stato già sottolineato in precedenza, occorrerebbe effettuare la media su di un campione più numeroso.

10. RISULTATI DELLE MISURE PIV

In questo capitolo sono riportati e discussi i principali risultati delle misure sperimentali sul getto con tecnica PIV. Dapprima verranno discusse le caratteristiche del campo di moto e saranno confrontate con quelle presenti in letteratura. Successivamente, saranno analizzati le statistiche turbolente del fluido e gli andamenti degli sforzi di Reynolds.

10.1. Caratteristiche generali del campo di moto

Le misure effettuate sostanzialmente nel piano di simmetria del getto e nei piani paralleli alla parete hanno permesso di individuare la maggior parte della strutture vorticosi descritte dagli altri autori e, inoltre, hanno consentito di valutare sia qualitativamente sia quantitativamente l'influenza del numero di Reynolds e del rapporto di iniezione sulla traiettoria del getto. I campi di velocità istantanei ed il relativo andamento delle linee di flusso nel piano sono stati riportati principalmente per un valore del numero di Reynolds pari a 8000 poiché, al variare di questo parametro, i risultati sono qualitativamente molto simili. Per bassi valori della velocità del flusso principale, però, si riescono a visualizzare meglio le strutture vorticosi a causa della maggiore regolarità di queste ultime.

Nelle immagini seguenti sono riportate, unitamente alle linee di flusso nel piano, le mappe della componente di vorticità ortogonale al piano di misura ed adimensionalizzata rispetto al rapporto tra la velocità del flusso principale u_∞ ed il diametro del condotto D ; ovvero, per le misure nel piano di simmetria è stata riportata la componente di vorticità Ω_z lungo l'asse z mentre, per le misure nei piani ortogonali all'asse del condotto, si è riportata la componente di vorticità Ω_y lungo l'asse y ²⁸. È utile ricordare che le espressioni delle componenti della vorticità utilizzate sono le seguenti:

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \text{ e } \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10.1)$$

dove, al solito, u , v e w rappresentano le componenti del vettore spostamento lungo gli assi cartesiani.

Per visualizzare meglio le strutture vorticosi alcune prove sono state effettuate utilizzando un campo di vista minore rispetto a quello adoperato per misurare le statistiche del flusso. Non è stato possibile individuare tutte le strutture vorticosi descritte da Kelso et al. (1996) e trovate con le simulazioni numeriche da Yuan et al. (1999), in parte a causa dell'elevato numero di Reynolds, in parte a causa dei limiti della tecnica adottata che non consente di individuare strutture vorticosi molto piccole.

Molti dei risultati mostrati non evidenziano la presenza dei vortici a causa del valore elevato della velocità media. Infatti, il campo di velocità istantaneo $\underline{V}(\underline{x}, t)$ può essere decomposto in tre parti utilizzando l'espressione:

$$\underline{V}(\underline{x}, t) = \overline{\underline{V}}(\underline{x}) + \underline{V}_c(\underline{x}, t) + \underline{V}_r(t) \quad (10.2)$$

dove \underline{x} indica il vettore posizione nel sistema di coordinate, $\overline{\underline{V}}(\underline{x})$ indica il campo di velocità medio, $\underline{V}_c(\underline{x}, t)$ rappresenta il campo di velocità coerente e $\underline{V}_r(t)$ rappresenta l'errore casuale. Se il campo di velocità medio è piccolo rispetto a quello coerente, il campo di moto istantaneo è effettivamente rappresentativo del campo coerente; in caso contrario, il campo coerente è meglio visualizzato sottraendo il campo di moto medio²⁹:

$$\underline{V}_c(\underline{x}, t) + \underline{V}_r(t) = \underline{V}(\underline{x}, t) - \overline{\underline{V}}(\underline{x}). \quad (10.3)$$

²⁸ Si ricordi che il sistema di assi cartesiani adottato per la visualizzazione dei risultati è identico a quello mostrato per riportare le analisi termo-fluidodinamiche effettuate dagli altri autori.

²⁹ Si osservi che in presenza di strutture stazionarie il campo di moto medio coincide con il campo di moto generato dalle strutture stesse, così come accade per il CVP.

10.1.1. Vortici stazionari

Gli unici vortici stazionari individuati nelle misure sperimentali sono stati la coppia di vortici contro-rotanti e le strutture vorticoso a ferro di cavallo. Per analizzare il comportamento dei CVP sono state fatte acquisizioni su piani posti a diverse distanze dalla parete. Utilizzando queste misurazioni, insieme alle misure effettuate nel piano di simmetria, è stato possibile ricostruire il campo di moto medio per $Re = 8000$ e per diversi valori del rapporto di iniezione. Per $R = 1$ ed $R = 2$ non è stato possibile visualizzare la coppia di vortici contro-rotanti, molto probabilmente a causa della vicinanza del getto alla parete e delle dimensioni ridotte dei vortici stessi. Le ricostruzioni ad $R = 3$, $R = 4$ ed $R = 5$ sono mostrate rispettivamente in Figura 10.1(a), (b) e (c) in cui è stata indicata con un cerchio la sezione di uscita del getto. Dalla figura si evince che, seguendo il getto, i vortici crescono di dimensione e si muovono a valle rispetto alla sezione di uscita del getto.

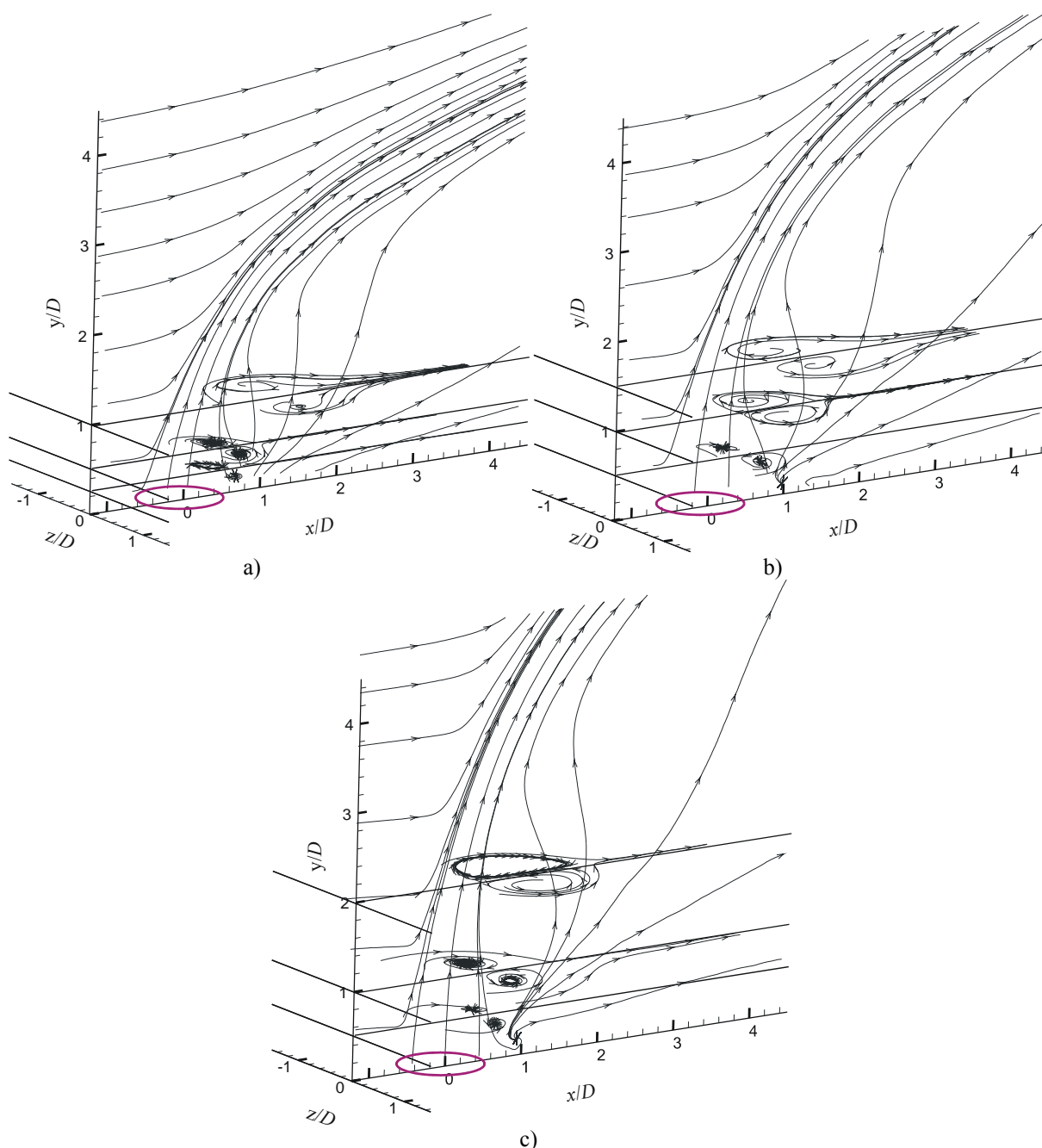


Figura 10.1 Andamento delle linee di flusso basate sulle ricostruzioni tridimensionali delle misure PIV su diversi piani per $Re = 8000$. a) $R = 3$; b) $R = 4$; c) $R = 5$.

Allo stesso numero di Reynolds le medie di insieme del campo di moto nel piano di simmetria non hanno evidenziato alcuna struttura vorticoso a causa dell'instabilità delle strutture. In accordo con le osservazioni di Kelso et al. (1996) il sistema di vortici a ferro di cavallo è stato individuato soltanto per un numero di Reynolds pari a 1000 mentre, per $Re = 2000$, i vortici appaiono piuttosto piccoli ed instabili e sono visualizzati soltanto in alcune immagini istantanee. Per $Re = 8000$ il campo di moto ad elevata turbolenza impedisce la formazione di un sistema vorticoso su grande scala e, pertanto, non è stato individuato nelle misure. Per visualizzare meglio i vortici, le riprese sono state effettuate con un fattore di ingrandimento maggiore nella regione di interesse. In Figura 10.2 sono mostrati i vortici a ferro di cavallo nei casi $R = 1$ (Figura 10.2(a)) ed $R = 4$ (Figura 10.2(b)) per il numero di Reynolds minimo esaminato. In questo caso una media effettuata su 50 campioni è stata sufficiente per ottenere una stima accurata del campo di moto medio. Dalla figura si possono trarre alcune considerazioni sulle caratteristiche di questi vortici. Innanzitutto sono stati individuati due vortici: uno grande posto più vicino al getto ed un altro di dimensioni più ridotte situato immediatamente a monte del primo. Al crescere del rapporto di iniezione, il vortice di dimensioni maggiore riduce la propria estensione; il vortice di dimensioni minori, invece, tende a mantenere inalterata la propria estensione. A causa del cambiamento nella posizione del getto anche i vortici a staffa tendono a spostarsi in direzione opposta alla corrente principale al crescere di R .

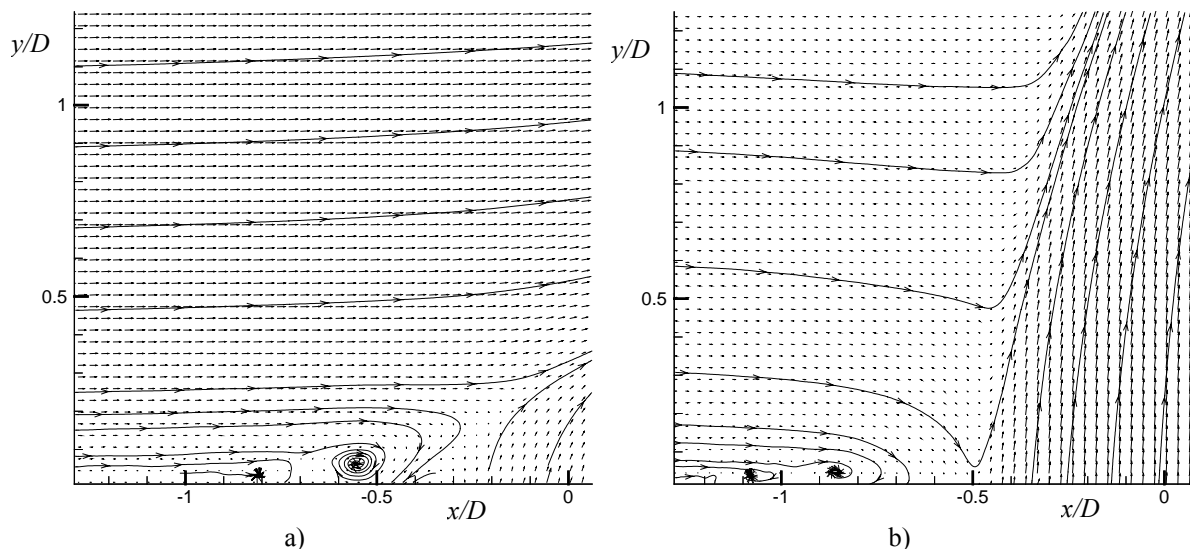


Figura 10.2 Campo di velocità medio e distribuzione delle linee di flusso nel piano di simmetria del getto per $Re = 1000$. a) $R = 1$; b) $R = 4$.

10.1.2. Vortici instazionari

I vortici instazionari principalmente individuati nelle singole misure sono stati i vortici ad anello ed i vortici di scia. In Figura 10.3 sono riportate le linee di flusso istantanee nel piano di simmetria unitamente alle mappe di vorticità normalizzate per valori diversi del rapporto di iniezione e per $Re = 8000$. Le regioni della mappa con tonalità vicino al bianco denotano una vorticità positiva (antioraria), quelle con tonalità prossima al nero denotano una vorticità negativa (oraria).

Per $R = 1$ (vedi Figura 10.3(a)) soltanto in prossimità del lato sottovento del getto è possibile osservare dei avvolgimenti vorticosi che peraltro non sono presenti con regolarità in tutti i campioni acquisiti. L'assenza di vortici sul lato a monte del getto può essere dovuta al valore elevato della velocità media del flusso principale, mentre l'assenza di regolari ed evidenti strutture vorticosi sul lato a valle induce a pensare che i vortici individuati siano dovuti all'evoluzione tridimensionale dei vortici di scia piuttosto che alla presenza delle strutture vorticosi ad anello tipiche dei getti liberi. Lo stesso tipo di mappe relative alle misure con $R = 3$ ed $R = 4$, riportate rispettivamente in Figura 10.3(b) e Figura 10.3(c), evidenziano un comportamento diverso all'aumentare del rapporto di iniezione. In queste ultime condizioni gli avvolgimenti vorticosi del flus-

so, evidenziati tanto dal valore della vorticità quanto dall'andamento delle linee stesse ed indicati in letteratura con il nome di vortici ad anello, sono presenti su entrambi i lati del getto, anche se la parte a valle ha dimensioni molto più ridotte al punto da mostrare una maggiore aderenza all'interpretazione di Lim et al. (2001). In accordo con le osservazioni di Kelso et al. (1996), i vortici sembrano avere un comportamento periodico ed il piano contenente la parte a monte dell'anello vorticoso si mantiene ortogonale alla traiettoria del getto.

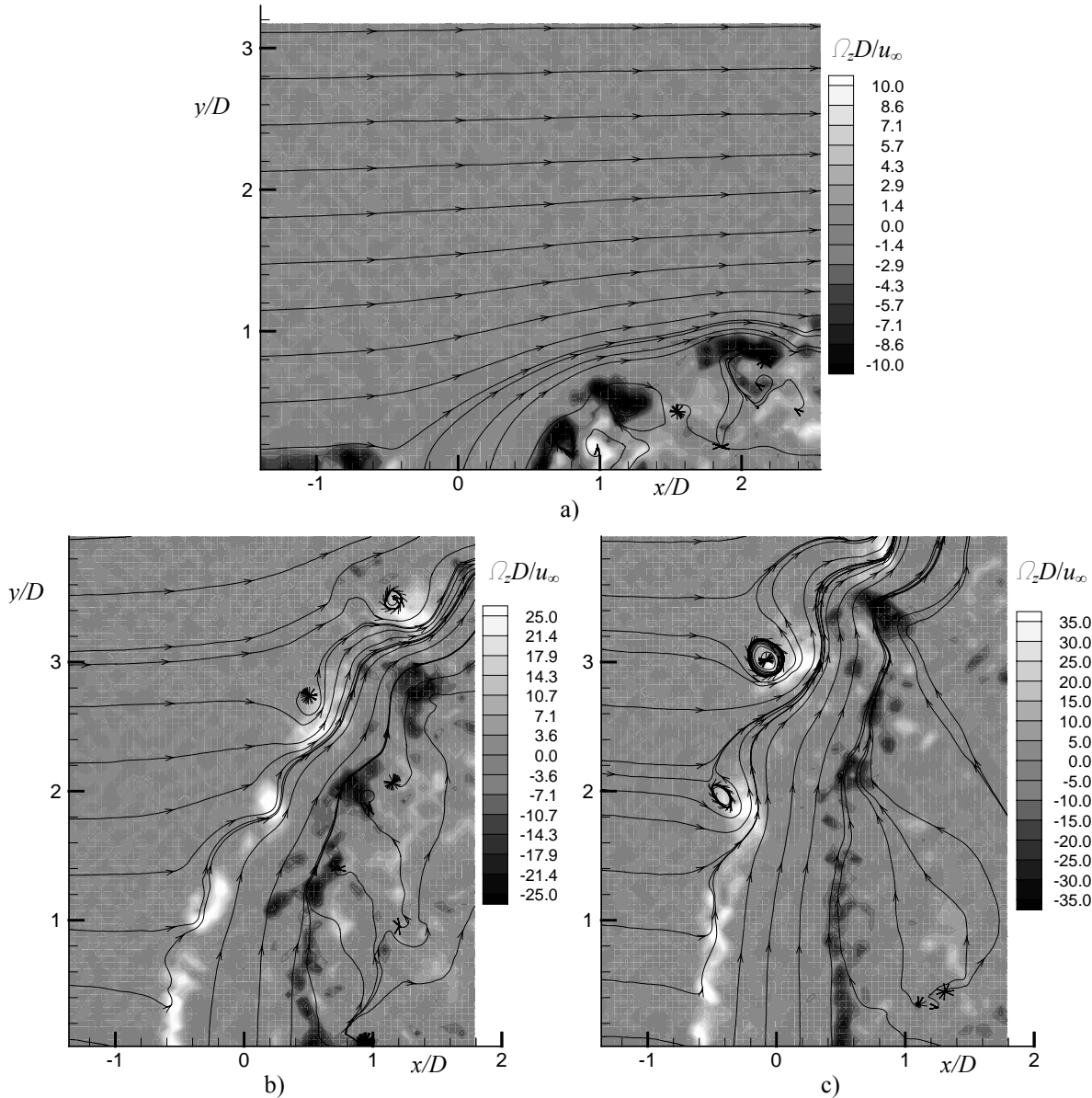


Figura 10.3 Linee di flusso istantanee e mappe adimensionalizzate della vorticità $\Omega_z D/u_\infty$ nel piano di simmetria del getto per $Re = 8000$. a) $R = 1$; b) $R = 3$; c) $R = 4$.

Come mostrato nelle mappe riportate, il comportamento dei vortici nella zona a monte del getto e in quella a valle è alquanto differente e dipende da R . A bassi rapporti di iniezione i vortici sono più evidenti negli strati viscosi sottovento, mentre ad elevati rapporti di iniezione gli anelli si formano prima, in maniera più regolare nella zona sopravvento. Quest'ultima circostanza si può spiegare tenendo conto dei diversi gradienti di pressione presenti nelle due zone (Yuan et al. 1999). Infatti, sul lato a monte della sezione di uscita del getto, i valori della velocità nella direzione della corrente, essendo inferiori, creano una zona con un gradiente di velocità avverso che produce un gradiente di pressioni in direzione verticale, rendendo gli strati viscosi instabili immediatamente dopo l'immissione del fluido nel flusso trasversale. Al contrario, nella zona sottovento a bassa pressione, gli strati viscosi si immettono in una zona con gradienti di pressione

favorevoli, diventano più stabili ed il rotolamento è ritardato. Ad elevati rapporti di iniezione le differenze tra monte e valle sono più accentuate mentre a bassi rapporti di iniezione i gradienti di pressione si riducono; di conseguenza, mentre a monte è ritardata la formazione dei vortici, a valle viene anticipata.

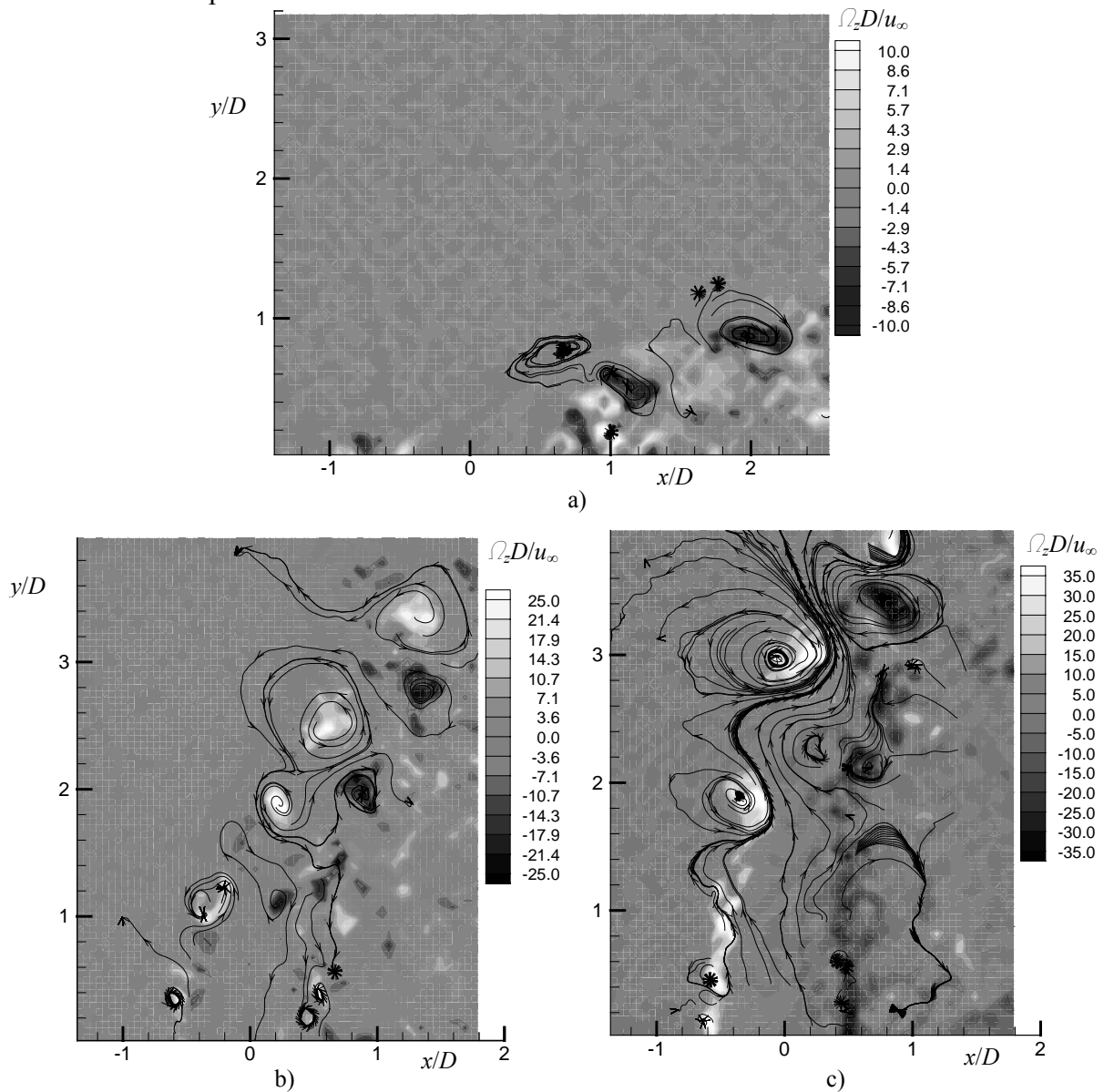


Figura 10.4 Linee di flusso istantanee e mappe adimensionalizzate della vorticità $\Omega_z D/u_\infty$ del campo di moto coerente nel piano di simmetria del getto e per $Re = 8000$. a) $R = 1$; b) $R = 3$; c) $R = 4$.

Sebbene siano stati adottati campi di vista maggiori, alcune misure non hanno permesso di individuare alcune strutture vorticosi ed altre hanno evidenziato soltanto dei vortici di dimensioni ridotte. Per meglio valutare l'evoluzione delle strutture vorticosi, si è misurato il campo coerente sottraendo il valore del campo medio dalle misure istantanee. I risultati sono mostrati in Figura 10.4 agli stessi rapporti di iniezione precedentemente considerati. Ad $R = 1$ gli avvolgimenti nella regione di scia sono ancora presenti mentre nella regione a monte del getto si è riscontrata la presenza di un nuovo vortice; anche per i rapporti di velocità maggiori i vortici ovviamente sono più evidenti ed assumono dimensioni maggiori. In accordo con le osservazioni di Lim et al. (2001), soltanto per $R = 1$ i vortici hanno la stessa dimensione a monte e a valle del getto; infatti, in questo caso, l'assenza dei vortici contro-rotanti potrebbe non impedire la formazione dei vortici ad anello.

Nelle misure istantanee sono stati visualizzati anche i vortici di scia riportati dagli altri autori.

Non è stato possibile, però, individuare i vortici di parete, in quanti i limiti dell'apparato utilizzato non hanno permesso di effettuare misure nel piano y - z . In Figura 10.5 sono mostrate le mappe di velocità e le linee di flusso istantanee nei casi più frequentemente riscontrati. In Figura 10.5(a) si è preso in esame il piano $y/D = 0.5$ ad un rapporto di iniezione pari a 4, mentre in Figura 10.5(b) si è analizzato il piano $y/D = 1$ ad $R = 5$. L'andamento del flusso come già osservato ricorda la distribuzione dei vortici di scia alla Kármán che si genera dietro un cilindro solido e, nell'istante considerato, si vede come la formazione dei vortici di scia avvenga nella regione immediatamente a valle del getto.

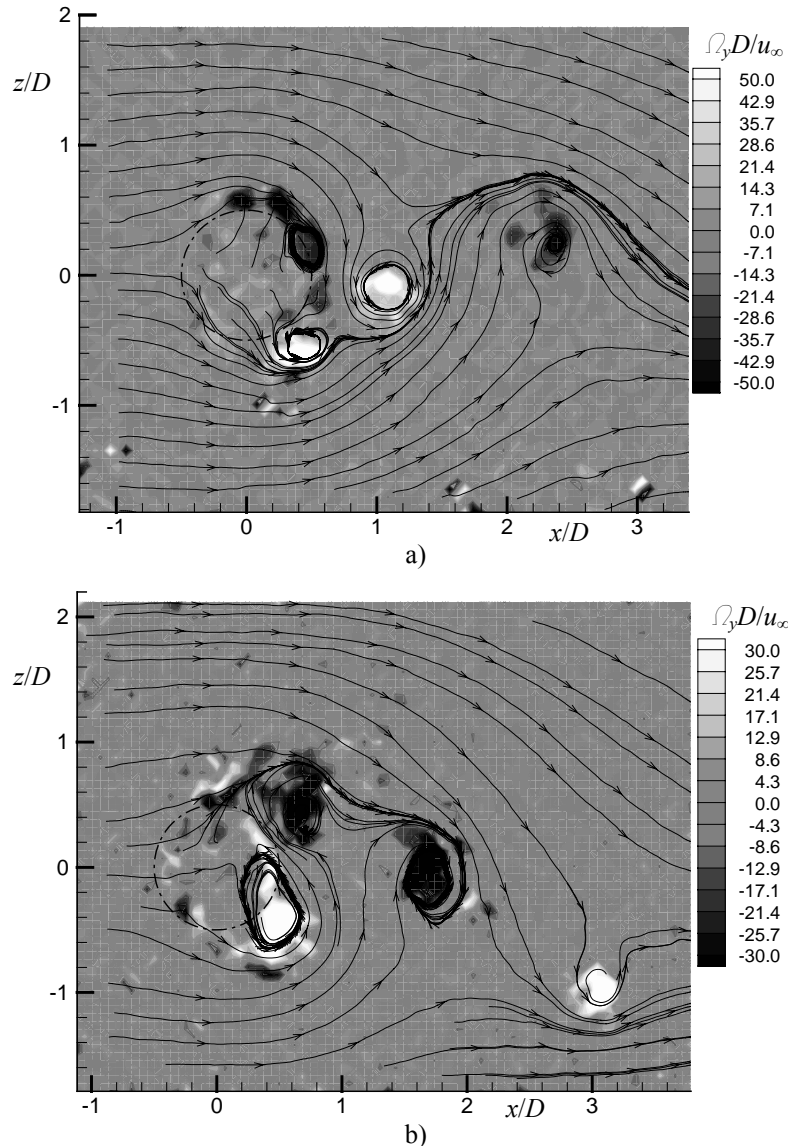


Figura 10.5 Linee di flusso istantanee e mappe adimensionalizzate della vorticità $\Omega_z D/u_\infty$ per $Re = 8000$. a) $R = 4$ e $y/D = 0.5$; b) $R = 5$ e $y/D = 1$.

Per ottenere ulteriori informazioni sull'andamento dei vortici di scia, le misure sono state fatte nel caso di $Re = 8000$ anche nella regione a $x/D > 4$ ed un esempio di mappa ottenuta è riportato in Figura 10.6. Nella figura sono evidenziate le stesse caratteristiche riscontrate immediatamente a valle del getto. Poiché non è stato possibile riprendere più di due vortici contemporaneamente non si è riusciti a confermare l'esistenza nella scia di strutture a fungo simili a quelle proposte da Kelso et al. (1996). Per rapporti di velocità bassi, non si è riusciti a visualizzare i vortici essendo il getto troppo vicino alla parete. Inoltre, non si è riscontrata una relazione diretta tra i vortici verticali e quelli a ferro di cavallo, in quanto ad alti numeri di Reynolds, pur non essendo riusciti a trovare prove della formazione dei vortici a staffa, i vortici di scia sono più regolari, più perio-

dici ed hanno una scala caratteristica più larga.

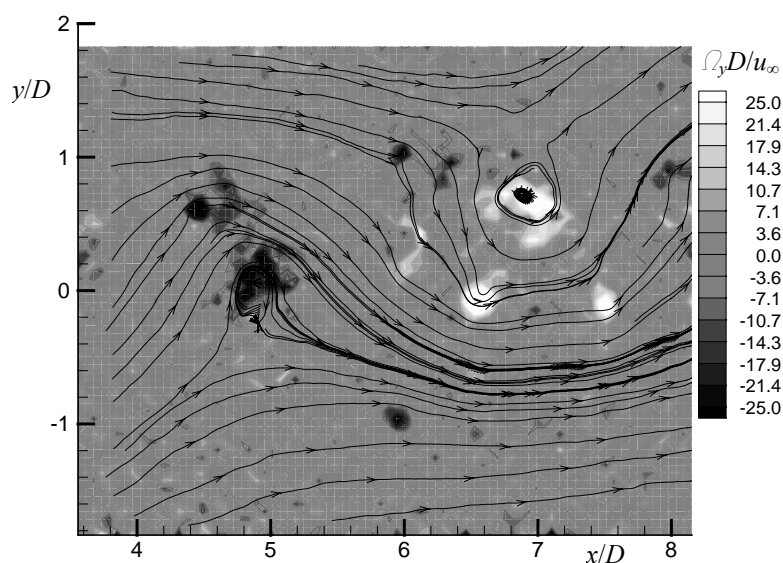
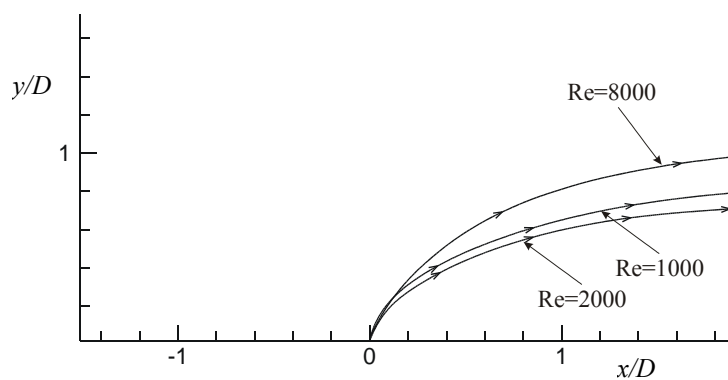
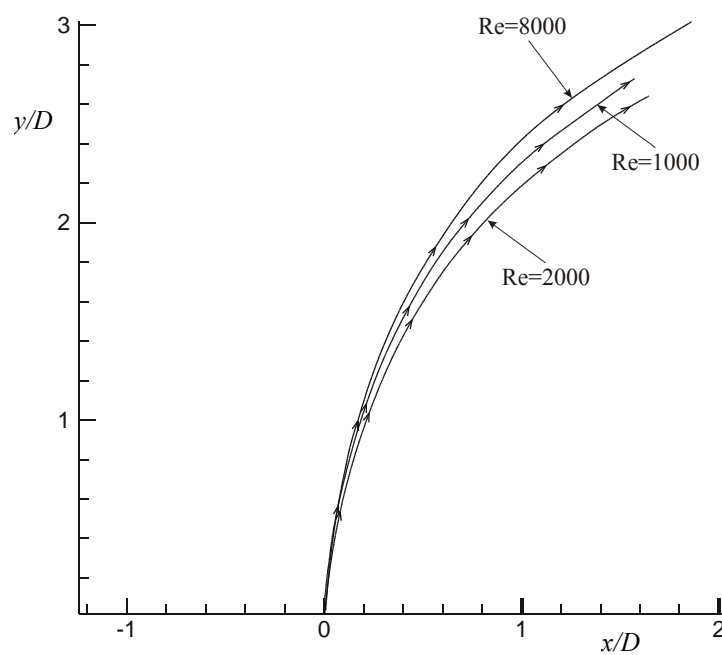


Figura 10.6 Linee di flusso istantanee e mappe adimensionalizzate della vorticità $\Omega_z D/u_\infty$ nella regione di scia del getto per $Re = 8000$, $R = 5$ e $y/D = 2$.



a)



b)

Figura 10.7 Traiettorie del getto a diversi numeri di Reynolds. a) $R = 1$; b) $R = 3$.

10.1.3. Traiettorie

Le caratteristiche principali della traiettoria del getto sono state esaminate ai diversi regimi ed al variare del rapporto di velocità. In accordo con Yuan & Street (1998), si è scelto di definire la traiettoria come la linea di flusso media che si origina dal centro della sezione di uscita del condotto.

In Figura 10.7 sono riportate le traiettorie per tre diversi valori del numero di Reynolds e per due valori del rapporto di iniezione: $R = 1$ ed $R = 3$. In accordo con Yuan & Street (1998), per $R = 3.3$ (cfr. Figura 10.7(b)), il getto a $Re = 2000$ penetra più lentamente all'interno del fluido rispetto a quello a $Re = 1000$. La traiettoria a $Re = 8000$, invece, è più alta rispetto alle altre due. Una situazione analoga si presenta anche per $R = 1$ (vedi Figura 10.7(a)). In entrambi i casi la curvatura sembra avere un massimo in corrispondenza di $Re = 2000$ per tutti i rapporti di velocità esaminati. Dei tre regimi esaminati, quello con numero di Reynolds minore appare il più sensibile alla variazione del rapporto di iniezione. Infatti, mentre la posizione relativa delle traiettorie ai valori di Reynolds elevati rimane la stessa al variare del rapporto di iniezione, la traiettoria a $Re = 1000$ è molto vicina a quella a $Re = 2000$ per $R = 1$ e tende a spostarsi verso curvature intermedie al crescere del rapporto di iniezione. Risulta difficile fornire una spiegazione valida per questo tipo di comportamento soprattutto perché, per valori della velocità del flusso trasversale inferiori, il valore della velocità misurata per regolare il flusso in galleria è affetta da errori maggiori. Molto probabilmente, quando il numero di Reynolds diventa basso le caratteristiche del flusso mutano rapidamente al crescere di R a causa della crescente velocità del getto ed incide maggiormente sul livello di turbolenza nella zona di interazione tra i due flussi.

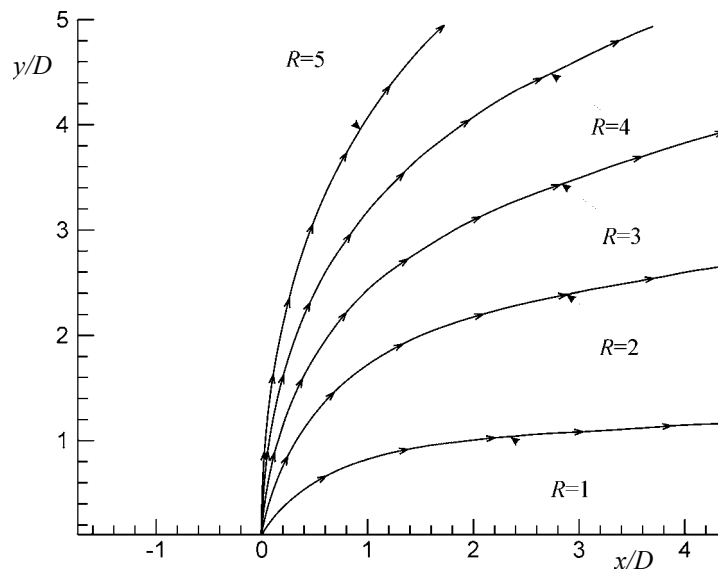


Figura 10.8 Andamento delle traiettorie medie del getto per diversi rapporti di iniezione per $Re = 8000$.

Per analizzare l'equazione della traiettoria, per ciascuno dei rapporti di iniezione esaminati, si sono confrontati i dati sperimentali con la curva teoria ottenuta utilizzando la legge di potenza proposta da Chassaing et al. (1974):

$$\frac{y}{D} = A \left(\frac{x}{D} \right)^n. \quad (10.4)$$

In Figura 10.8 è riportato l'andamento delle traiettorie misurate sperimentalmente al variare di R per un numero di Reynolds pari a 8000. I coefficienti A ed n sono ricavati dalla curva di regressione calcolata a partire dai dati sperimentali con il metodo dei minimi quadrati su una doppia scala logaritmica. L'esponente n assume un valore pressoché costante al variare di R , mentre il coefficiente A , come mostrato in Figura 10.9, ha un andamento lineare rispetto ad R (fattore di correlazione $r_{xy}^2 = 0.9994$).

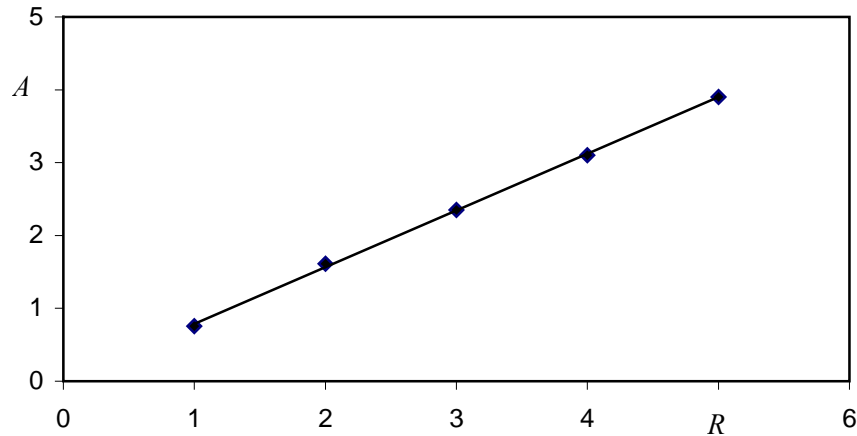


Figura 10.9 Regressione della curva $A(R)$ per $Re = 8000$.

La linearità della A con R per tutto l'intervallo di valori di R differisce rispetto alla variazione nella pendenza ad $R = 3$ trovata da Camussi et al. (2002). Ciò probabilmente è imputabile al fatto che il numero di Reynolds nelle sperimentazioni di questi ultimi è molto basso ed i livelli di turbolenza negli strati viscosi del getto cambiano notevolmente. La dipendenza lineare di A da R suggerisce l'utilizzo di fattori di scala diversi per le componenti x ed y e consente di riscrivere la (10.4) come:

$$\frac{y}{RD} = B \left(\frac{x}{D} \right)^n. \quad (10.5)$$

In questo modo si possono riportare le traiettorie misurate ai diversi rapporti di velocità su uno stesso diagramma e, come si può verificare in Figura 10.10, si ha che i dati si addensano su un'unica curva di regressione. In questo caso i valori dei parametri della curva di regressione calcolati sono rispettivamente $n = 0.358$ e $B = 0.781$ con fattore di correlazione $r^2_{xy} = 0.9727$. Si noti che in Figura 10.10 nella zona più lontana dalla sezione di uscita del getto, alcune realizzazioni si discostano maggiormente dalla curva di regressione. Detti punti sono relativi alla traiettoria per $R = 1$ e, se si effettua la regressione escludendo i dati ricavati per questa prova, il fattore di correlazione aumenta. Quest'ultimo incremento si può spiegare considerando le caratteristiche del getto per bassi rapporti di iniezione. Infatti, in tali condizioni il getto comincia ad incurvarsi già all'interno del condotto da cui fuoriesce ed la posizione precisa della linea di flusso media per il calcolo della traiettoria è di difficile determinazione.

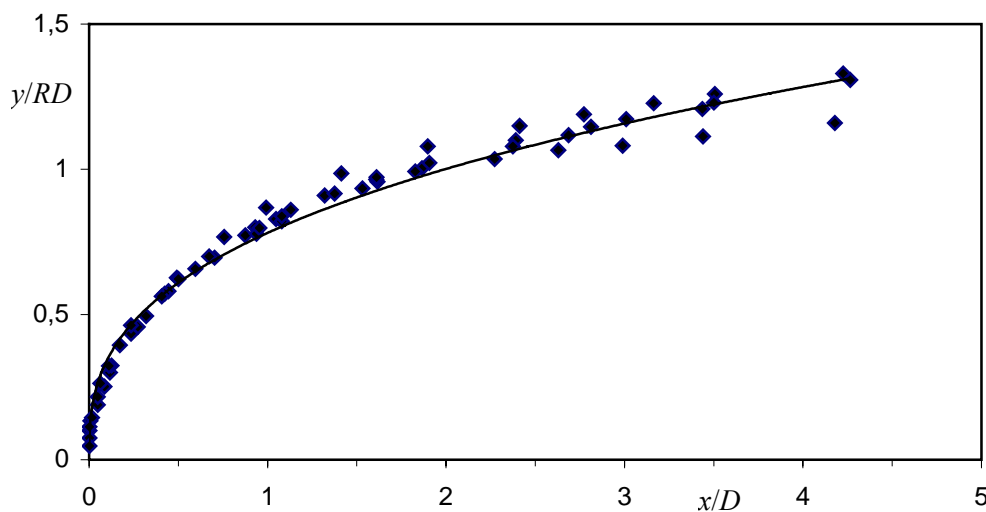


Figura 10.10 Andamento della traiettoria del getto a $Re = 8000$ ottenuta per fattori di scala diversi sui due assi.

10.2. Statistiche del flusso

In maniera analoga a quanto fatto finora, in tutte le mappe analizzate di seguito le coordinate spaziali sono riportate in forma adimensionale dividendo i valori per il diametro del condotto. Le statistiche misurate sul campione di 500 immagini sono state calcolate introducendo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} u' = u - \bar{u}, & v' = v - \bar{v}, & w' = w - \bar{w} \\ \overline{u'v'} = \overline{uv} - \bar{u}\bar{v}, & \overline{u'w'} = \overline{uw} - \bar{u}\bar{w}, & \overline{v'w'} = \overline{vw} - \bar{v}\bar{w} \\ V_y = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}, & V = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2} \\ k_y = \overline{u'^2} + \overline{w'^2}, & k_z = \overline{u'^2} + \overline{v'^2}, & k = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \end{cases} \quad (10.6)$$

dove u , v e w indicano come di consueto le componenti del vettore velocità, il simbolo $\bar{}$ indica la media di insieme, u' , v' e w' indicano le fluttuazioni del campo di moto, V indica il modulo della velocità e k a meno di un fattore rappresenta l'energia cinetica turbolenta. Le componenti di velocità medie nelle mappe successive sono adimensionalizzate rispetto alla velocità del flusso trasversale u_∞ mentre gli sforzi turbolenti e l'energia cinetica turbolenta sono adimensionalizzati rispetto al quadrato della stessa velocità di riferimento. Per le misure eseguite nel piano $y = 0$, la circonferenza disegnata a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto.

10.2.1. Misure nel piano di simmetria del getto ($y/D = 0$)

Le statistiche nel piano di simmetria del getto saranno presentate soltanto per le prove eseguite ad un numero di Reynolds pari ad 8000 in quanto, agli altri numeri di Reynolds i risultati sono qualitativamente simili. Per questo tipo di misure, come è già stato a suo tempo sottolineato, non è stato necessario utilizzare la tecnica stereoscopica poiché, essendo il piano di misura un piano di simmetria per il flusso, le grandezze non appartenenti al piano, ad eccezione della fluttuazione ortogonale al piano che è comunque piccola, sono nulle.

L'andamento del campo di moto medio presenta le stesse caratteristiche per ciascun rapporto di iniezione analizzato, per cui sarà esaminato in dettaglio soltanto il caso $R = 3$. In Figura 10.11(a) sono riportate le linee di flusso medie e le mappe di livello della componente di velocità nella direzione del flusso principale (orizzontale). I risultati sono in buon accordo con le mappe riportate da Yuan et al. (1999) e con i valori misurati da Andreopoulos & Rodi (1984) con l'anemometria a filo caldo. Come si vede in figura, in prossimità della parete il flusso tende a ristagnare a monte del getto mentre, muovendosi più in alto lungo il getto, il flusso trasversale tende a deviare sul getto e ad accelerare. Quando il getto subisce una forte curvatura, la componente u assume il valore massimo in corrispondenza dell'ascissa $x/D \approx 1$ lungo la traiettoria del getto, raggiungendo un valore pari a circa una volta e mezzo la velocità del flusso trasversale libero. Immediatamente a valle del getto, il flusso trasversale penetra all'interno della scia generando una regione con inversione del flusso, così come si evince dai valori negativi assunti dalla componente di velocità u . Circa due diametri più a valle rispetto all'asse del condotto da cui fuoriesce il getto, la componente u diventa nuovamente positiva.

In Figura 10.11(b) è riportata la mappa corrispondente alla componente di velocità media v (verticale). Soltanto due regioni hanno un valore elevato di v : una che comincia all'uscita del getto ed è dovuta all'elevata quantità di moto associata al getto, l'altra è situata in corrispondenza della regione di scia dove, secondo Yuan et al. (1999), è presente un elevato moto verso l'alto prodotto dalla rottura dei vortici quasi-stazionari che si formano ai lati del getto. Inoltre, anche le linee di flusso mettono in evidenza il moto lungo la direzione y nella scia del getto dove il massimo raggiunge un valore pari ad 1.4 volte u_∞ . Come si deduce da entrambe le figure Figura 10.11(a) e (b), i valori massimi delle velocità si trovano più in alto rispetto alla traiettoria del getto a causa dell'accelerazione del flusso trasversale. Lo stesso tipo di considerazioni possono essere dedotte dalla Figura 10.11(c) in cui sono riportate le mappe del modulo della velocità. Anche in questo caso il massimo è raggiunto all'uscita del getto, mentre i valori minimi si hanno a

monte e a valle del getto. Nella regione di scia la velocità cresce più rapidamente lungo l'ordinata $y/D \approx 1$.

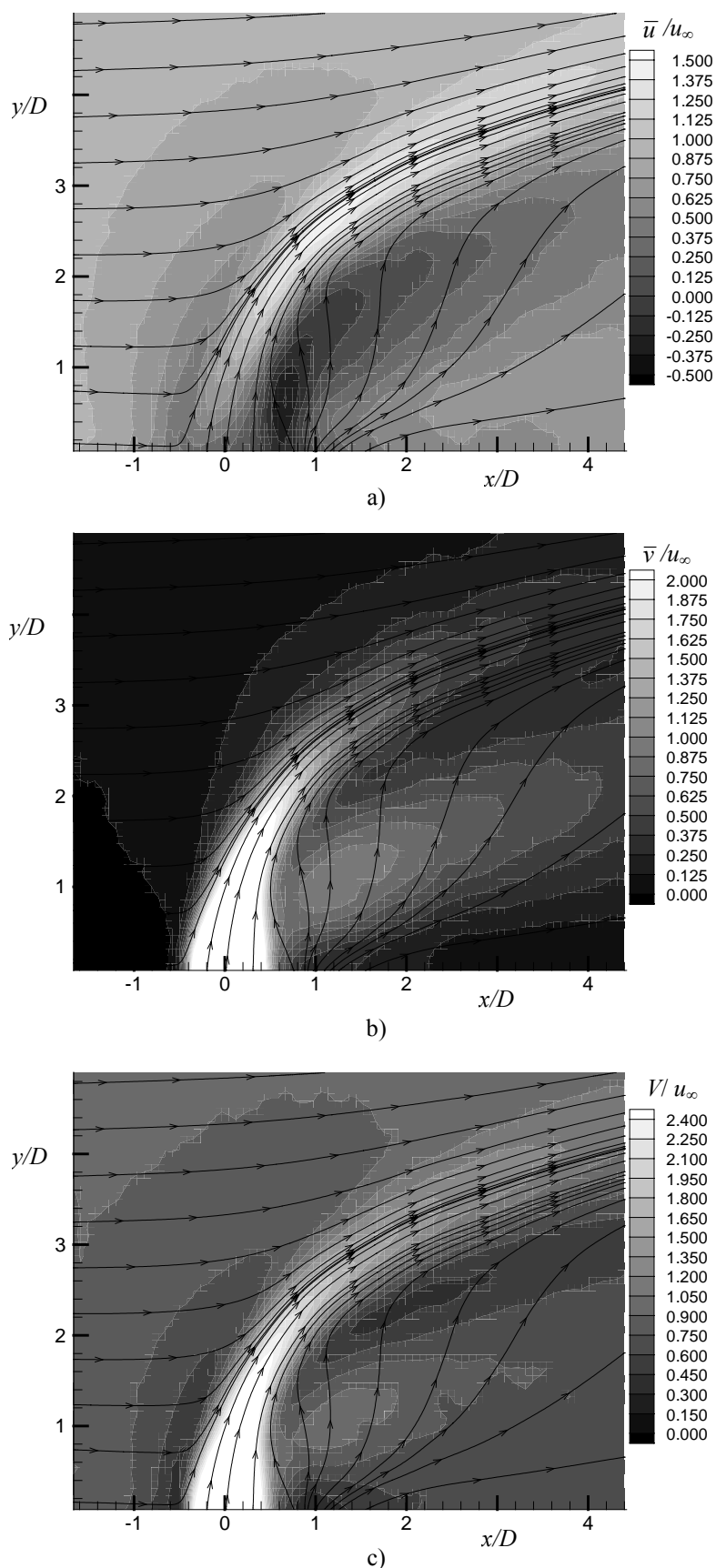


Figura 10.11 Linee di flusso del campo medio per $R = 3$ e $Re = 8000$: a) mappe della componente media di velocità u ; b) mappe della componente media di velocità v ; c) mappe del modulo della velocità media.

Per esaminare le caratteristiche principali dell'energia cinetica turbolenta, in Figura 10.12 sono riportate le relative mappe nel piano di simmetria del getto per due rapporti di iniezione crescenti. Per il rapporto di iniezione pari a 3 (Figura 10.12(b)) si può notare che il valore massimo della turbolenza è raggiunto nella stessa regione in cui la componente u raggiunge il suo valore massimo. Il valore massimo è imputabile all'elevata turbolenza generata dai vortici e dagli strati viscosi presenti nella zona di confine tra il getto ed il flusso trasversale. A valle della sezione di uscita è presente un'altra regione ad elevata energia cinetica turbolenta sottostante la traiettoria del getto e generata dal contributo addizionale fornito dalla coppia di vortici contro-rotanti e dai vortici di scia. Le mappe di turbolenza mostrate sono in accordo con le linee di livello riportate da Yuan et al. (1999), anche se il numero di Reynolds esaminato nel presente lavoro è più elevato e la fluttuazione lungo la direzione ortogonale al piano di misura non è stata considerata. Per effettuare un confronto quantitativo, le mappe riportate devono essere divise per il quadrato del rapporto di iniezione poiché gli autori citati hanno adimensionalizzato le mappe rispetto al quadrato della velocità di uscita del getto. I valori disponibili in letteratura differiscono all'incirca del 20% rispetto a quelli mostrati in figura e, molto probabilmente, la differenza nei valori è imputabile alla differenza dei numeri di Reynolds. Le mappe relative al rapporto di velocità pari ad 1 (Figura 10.12(a)), invece, presentano il valore massimo della turbolenza nella regione di scia a valle del getto e non a monte dove i gradienti di velocità in questo caso sono contenuti.

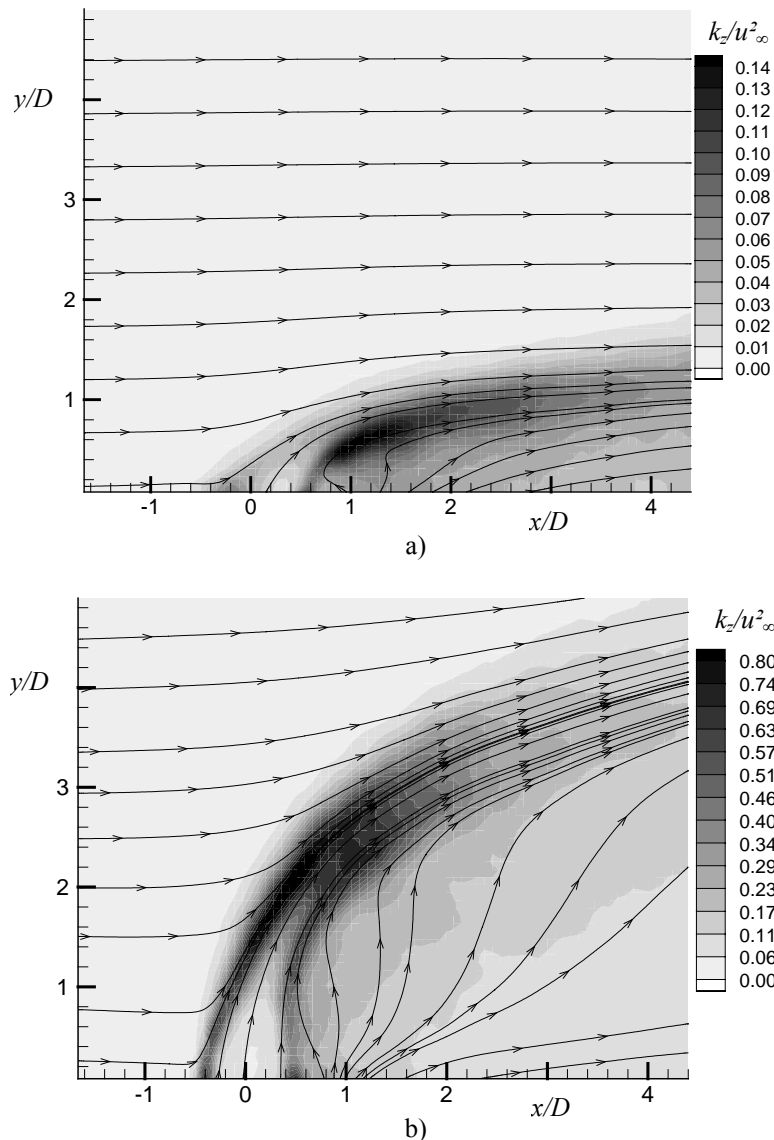
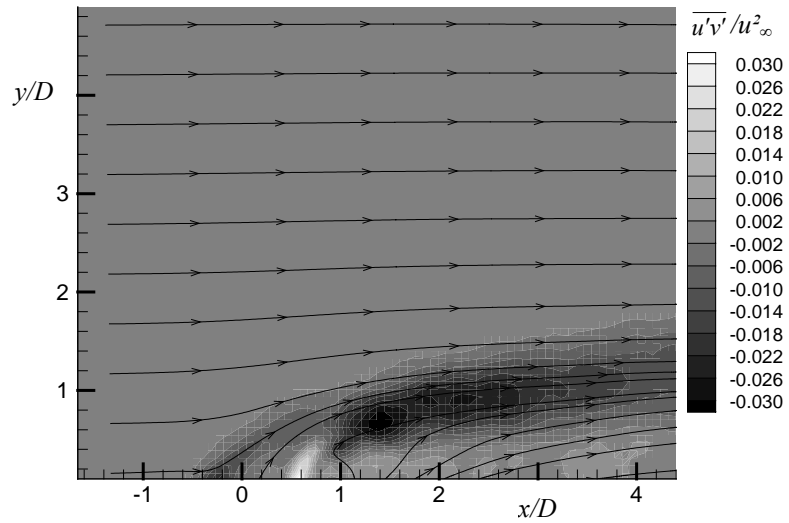
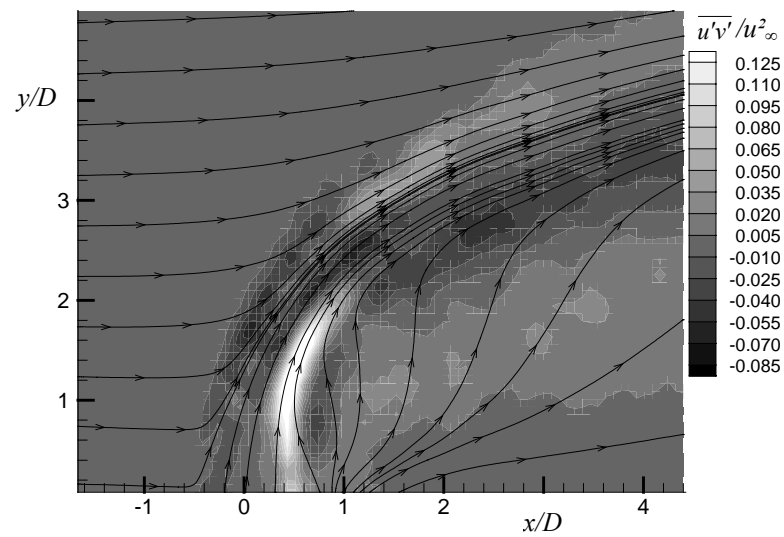


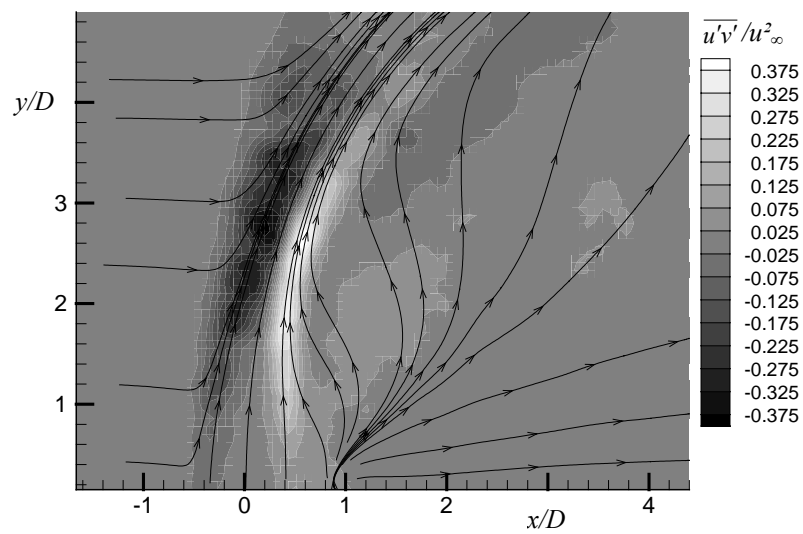
Figura 10.12 Linee di flusso medie ed energia cinetica turbolenta per $Re = 8000$: a) $R = 1$; b) $R = 3$.



a)



b)



c)

Figura 10.13 Linee di flusso medie e mappe degli sforzi di Reynolds $\overline{u'v'}/u_\infty^2$ a $Re = 8000$: a) $R = 1$; b) $R = 3$; c) $R = 5$.

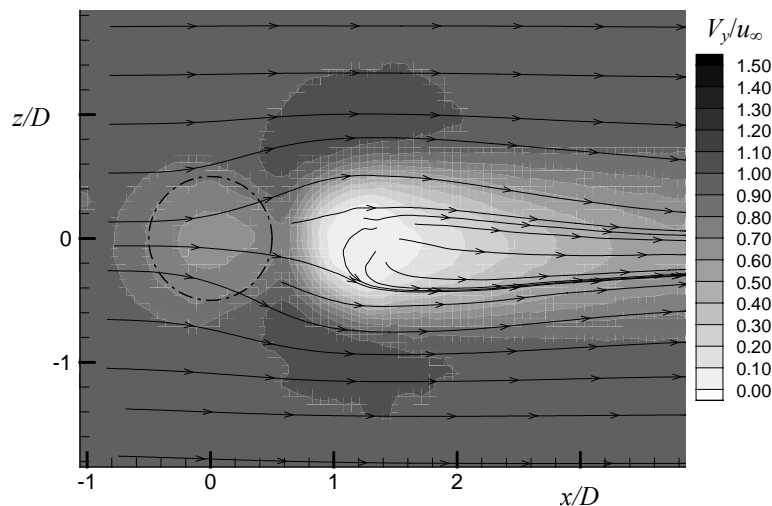
In Figura 10.13 sono riportate le mappe degli sforzi di Reynolds nella forma $\overline{u'v'}/u_\infty^2$ e per diversi valori di R . In generale, detti sforzi sono piuttosto alti in corrispondenza delle zone che presentano elevati i gradienti di velocità e che sono situate in prossimità del getto e negli strati viscosi compresi tra il getto ed la corrente principale. Nella regione di scia gli sforzi sono bassi in quanto la velocità presenta valori minori e più uniformi: la forte curvatura generata dall'interazione dei due flussi ha, infatti, un effetto stabilizzante sul flusso (vedi Andreopoulos & Rodi 1984).

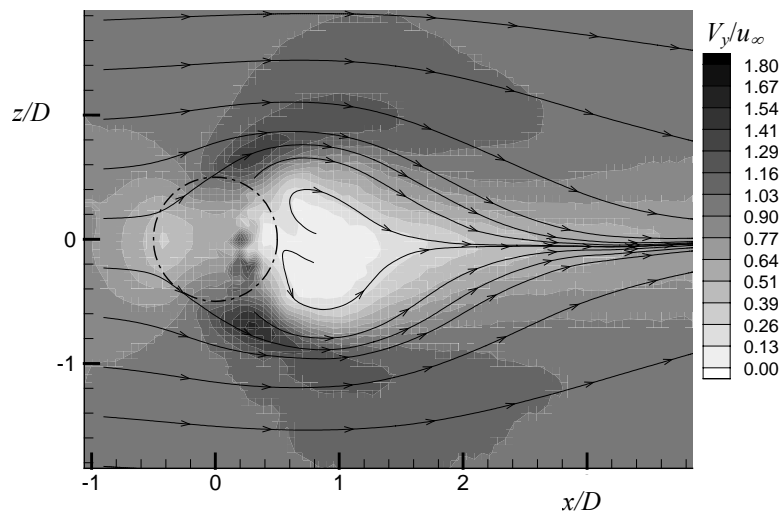
In accordo con Kelso et al. (1996) la Figura 10.13, nella regione di scia vicino la parete in corrispondenza della sezione posta a $x/D \approx 1$, mostra la presenza del nodo che diventa sempre più evidente al crescere del rapporto di iniezione. Al crescere di R , infatti, si crea dal lato sottovento del getto una zona a bassa pressione che provoca il moto della corrente esterna verso il piano di simmetria e la conseguente inversione del flusso in prossimità del nodo. Vale la pena osservare che nelle immediate vicinanze della parete non è stato possibile visualizzare completamente il nodo a causa delle riflessioni del laser. Ad elevati R , inoltre, la distribuzione di velocità all'uscita è più uniforme e la curvatura del getto è molto più graduale. Il campo di vista limitato non ha permesso di analizzare la distribuzione delle linee di corrente per distanze $x/D > 4$ dove il getto ricurva leggermente verso la parete ed il flusso alla parete assume l'aspetto caratteristico di uno strato limite. Infine, si osservi che in tutti i casi mostrati in Figura 10.13 gli sforzi viscosi hanno segno opposto negli strati a monte e a valle del getto e per $R > 1$, a valle della deviazione del getto, il profilo lungo la verticale degli sforzi turbolenti cambia segno tre volte anziché due poiché in quella zona la componente orizzontale della velocità è superiore alla corrente esterna. Gli sforzi in prossimità della parete sono meno evidenti al crescere del rapporto di iniezione poiché il profilo di velocità tende a diventare più uniforme.

10.2.2. Misure nei piani paralleli alla parete

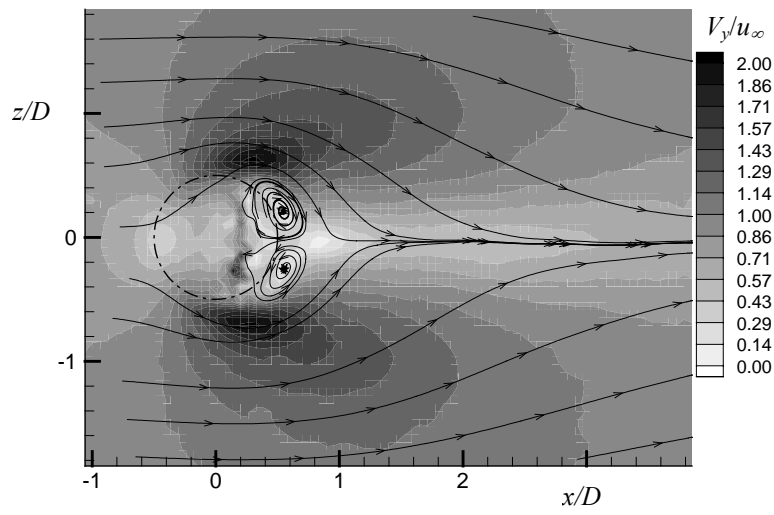
Per quanto riguarda le prove nei piani paralleli alla parete, le mappe della velocità media saranno riportate soltanto per le misure con $Re = 8000$ in quanto agli altri regimi i risultati sono del tutto analoghi. Le statistiche di turbolenza, invece sono riportate per diversi numeri di Reynolds ad eccezione del caso $Re = 1000$ per il quale il basso valore delle velocità in gioco non ha permesso di ottenere risultati aventi lo stesso grado di accuratezza. In quest'ultimo caso, pertanto, saranno riportate qualitativamente soltanto le linee di flusso del campo di moto medio.

In Figura 10.14 sono riportate le linee di flusso medie e le componenti di velocità parallele alla parete per i diversi rapporti di iniezione esaminati in prossimità della parete ($y/D = 0.25$). Come si vedrà in seguito, la ragione per cui si è riportata la componente di velocità parallela alla parete risiede nel fatto che l'andamento di questa componente influenza lo scambio nelle regioni laterali del getto.

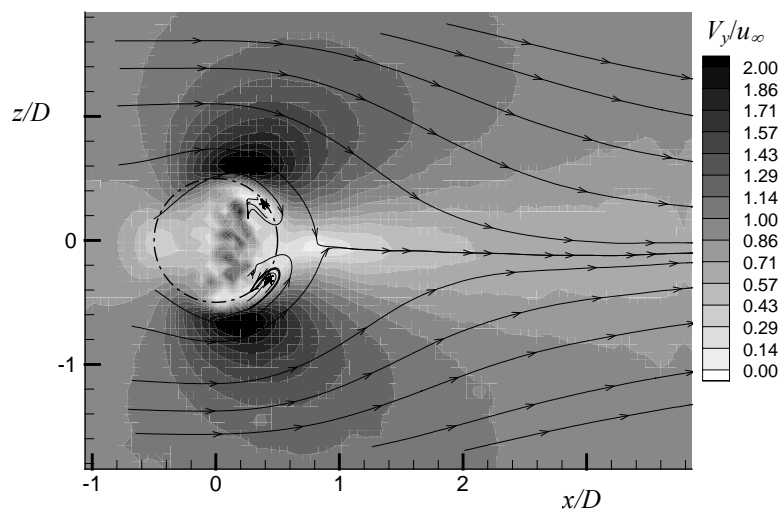




b)



c)



d)

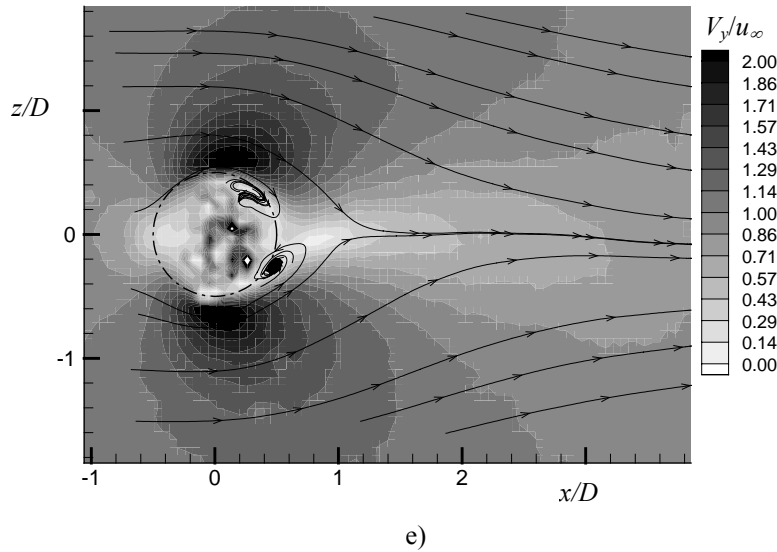


Figura 10.14 Linee di flusso medie e modulo della componente del vettore parallela al piano per $Re = 8000$ e nel piano $y/D = 0.25$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$.

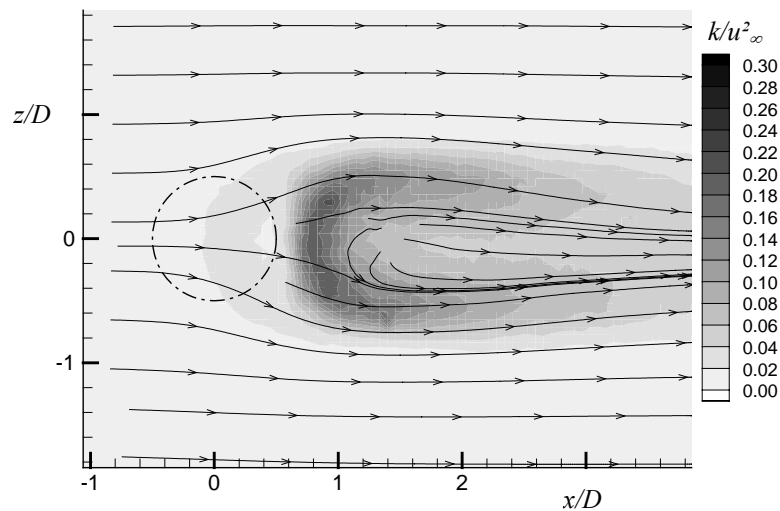
Per un rapporto di iniezione $R = 1$ (Figura 10.14(a)), la componente di velocità nel piano di misura presenta valori piuttosto uniformi nella regione ai lati ed a monte del getto, raggiungendo i valori massimi non molto pronunciati in corrispondenza della sezione $x/D = 1$. I valori minimi coprono una zona decisamente più ampia situata immediatamente a valle del getto, nella regione di scia corrispondente al nodo. Una zona con valore basso della velocità si trova in corrispondenza della sezione di uscita indicata con la circonferenza disegnata con una linea a tratto e punto. La presenza di questa zona è dovuta al rallentamento che subisce il flusso trasversale ad opera del getto. Si noti che, in questo caso, la posizione del getto è traslata a valle rispetto alla sezione di uscita per due ragioni: il getto comincia ad incurvarsi all'interno del condotto ed il piano di misura, a causa delle riflessioni del laser sulla parete, è posizionato ad una distanza relativamente alta. Si noti che a questo rapporto di iniezione non si è visualizzata la coppia di strutture vorticosse contro-rotanti.

Come mostrato in Figura 10.14(b), per $R = 2$ la regione di massimo ai lati del getto si ingrandisce notevolmente, estendendosi oltre la sezione di uscita del condotto per una lunghezza pari a due diametri. La regione di minimo della velocità in corrispondenza del nodo aumenta leggermente raggiungendo la massima estensione rispetto ai rapporti di iniezione esaminati, invece, più a valle, la regione di minimo tende a ridursi più rapidamente rispetto al caso $R = 1$. L'aumento della regione di minimo, molto probabilmente, è dovuta all'incremento di dimensioni della regione nodale sia rispetto ai rapporti di iniezioni minori, per i quali il getto rimane pressoché attaccato alla parete, sia rispetto ai rapporti maggiori, per i quali il getto tende a assumere caratteristiche più simili a quelle di un cilindro solido e si allarga a distanze sempre maggiori dalla parete. A causa della maggiore penetrazione del getto nel flusso trasversale, la regione a bassa velocità a monte della sezione di uscita si sposta in direzione opposta alla corrente e diventa molto più ampia. Si osservi che, in corrispondenza della sezione di uscita del condotto, i valori della velocità sono molto più rumorosi rispetto ai valori presentati per le altre zone della mappa. In corrispondenza di questa zona, essendo la componente della velocità ortogonale al piano di misura molto elevata, i valori riportati hanno una scarsa attendibilità. Al crescere del rapporto di iniezione, il problema si accentua notevolmente e, pertanto, i valori riportati in quella zona delle figure non saranno analizzati.

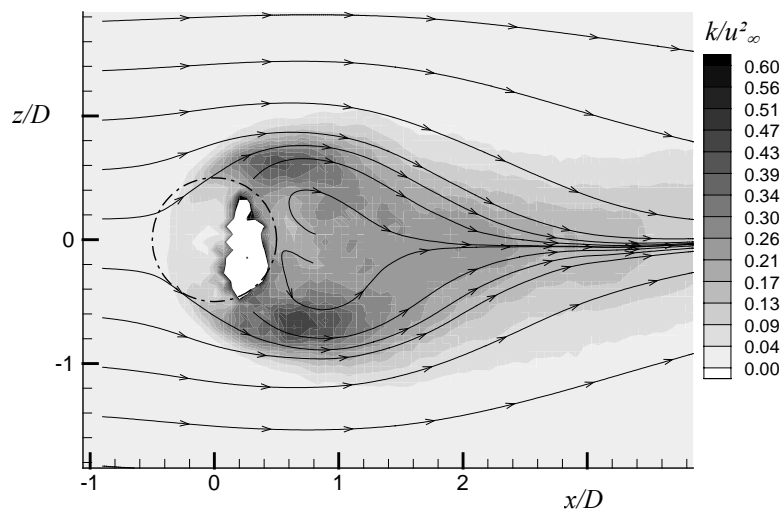
Rispetto alle mappe relative ad un rapporto $R = 2$, le mappe di velocità per $R = 3$ riportate in Figura 10.14(c) presentano molte analogie con differenze più marcate nella regione di scia ed ai bordi del getto. Nella regione di ristagno del flusso trasversale, a monte del getto, le mappe di velocità sono praticamente coincidenti con quelle precedentemente analizzate. Le regioni di

massimo si presentano ugualmente ai lati del getto anche se con una distribuzione diversa. Infatti, in questo caso, si hanno picchi più accentuati nelle immediate vicinanze del getto e valori che si riducono gradualmente al valore assunto dalla corrente principale. Le suddette regioni, pur presentando ancora una forma allungata nella direzione del flusso trasversale, tendono ad assumere una forma più circolare e a spostarsi più a monte. La regione a bassa velocità in corrispondenza della scia tende a ridursi ulteriormente rispetto ai casi con rapporto di iniezione inferiore. Infine, nella regione corrispondente al nodo, la zona a velocità minima è notevolmente ridotta rispetto agli altri rapporti di iniezione. Ciò è dovuto alla presenza della coppia di vortici contro-rotanti che, per $R = 3$ è già completamente sviluppata in corrispondenza del piano di misura, come appare evidente dalle linee di flusso mostrate in figura.

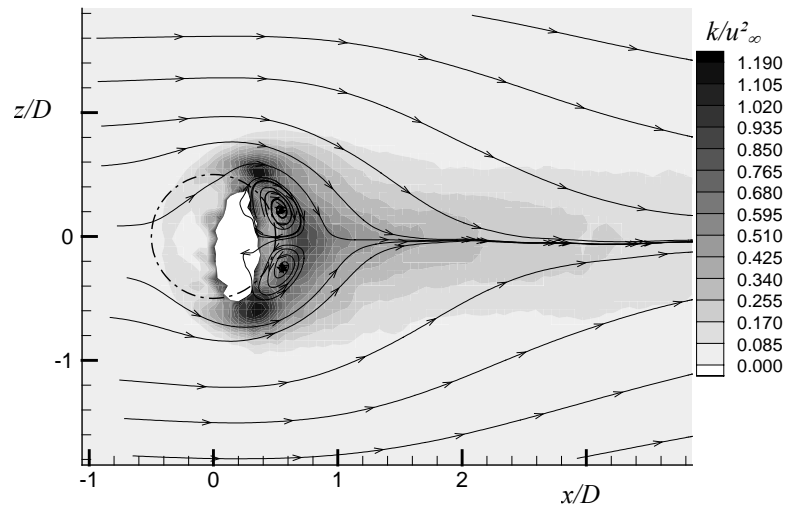
Le mappe relative alle misure effettuate ai rapporti di iniezione $R = 4$ ed $R = 5$ sono mostrate rispettivamente in Figura 10.14(d) e Figura 10.14(e). In entrambi i casi le mappe mostrano andamenti identici eccetto alcune zone in cui per $R = 5$ le tendenze riscontrate ad un rapporto di velocità inferiore sono leggermente più accentuate. In particolare, per entrambe le mappe l'allungamento verso valle delle zone di massimo per la velocità non è presente in maniera così evidente come ai rapporti di velocità inferiori ed i picchi ai lati del getto sono ancora più elevati. Soprattutto per $R = 5$, la distribuzione delle mappe di velocità diventa molto simile a quelle che si otterrebbero nel caso di un cilindro solido. Rispetto al rapporto $R = 3$, la regione di scia a bassa velocità si estende maggiormente sia lontano dal getto, sia in corrispondenza del nodo. Questo ultimo incremento è imputabile probabilmente al non completo sviluppo dei vortici contro-rotanti.



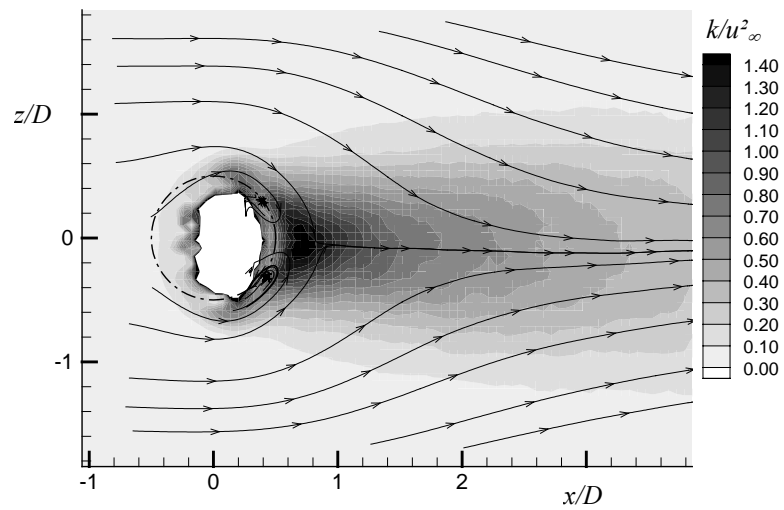
a)



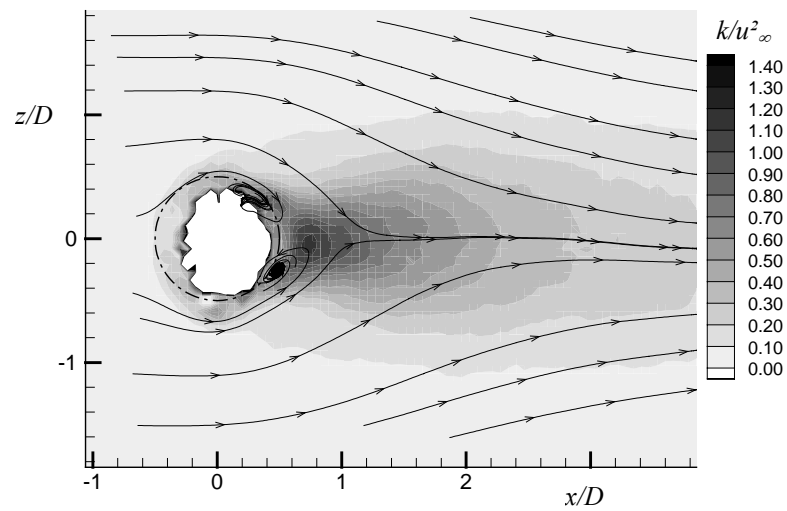
b)



c)



d)



e)

Figura 10.15 Mappe dell'energia cinetica turbolenta e linee di flusso medie per $Re = 8000$ nel piano $y/D = 0.25$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$.

Per analizzare l'effetto di R sulle statistiche del flusso, in Figura 10.15 sono riportate le mappe dell'energia cinetica turbolenta in forma adimensionalizzata per i diversi rapporti di iniezione esaminati a $Re = 8000$ nel piano $y/D = 0.25$ che costituisce la minima distanza in cui è stato possibile effettuare le prove. È stato stimato che, a tale distanza dalla parete, le misure sono appena all'interno dello strato limite. In queste mappe, nelle zone corrispondenti alla sezione di uscita del getto, non sono stati riportati i dati poiché l'elevato valore della velocità del getto non ha consentito di ottenere risultati affidabili. Per tale ragione, la forma di queste regioni è molto simile alla forma della sezione del getto. In Figura 10.15 non è stato necessario escludere i valori dalle mappe poiché il getto curva rapidamente a valle dell'uscita mentre, in Figura 10.15(b) e Figura 10.15(c), la forma della sezione del getto è in accordo con le simulazioni di Coelho & Hunt (1989). Nelle Figura 10.15(d) e Figura 10.15(e) la regione senza valori è quasi circolare ed il flusso trasversale ancora non sembra avere una grossa influenza nella deformazione del getto.

Per tutti i rapporti di iniezione esaminati, la regione avente l'energia cinetica turbolenta massima si trova immediatamente a valle del condotto di uscita all'inizio della regione di scia del getto, ma la distribuzione delle mappe cambia notevolmente al crescere del rapporto di velocità ed a bassi rapporti di iniezione il comportamento è molto diverso rispetto ai valori più elevati. Infatti, per $R = 1$ ed $R = 2$ sono presenti due regioni ad elevata turbolenza disposte ai lati del getto e simmetricamente rispetto alla sezione di uscita. I valori massimi sono raggiunti rispettivamente in corrispondenza delle sezioni poste a 0.9 e 0.7 diametri lungo l'asse orizzontale. Per $R > 3$ è presente una sola regione di massimo posta a $x/D = 0.7$ lungo la linea centrale sul lato sottovento del getto. Le mappe con $R = 3$, invece, costituiscono una configurazione di transizione.

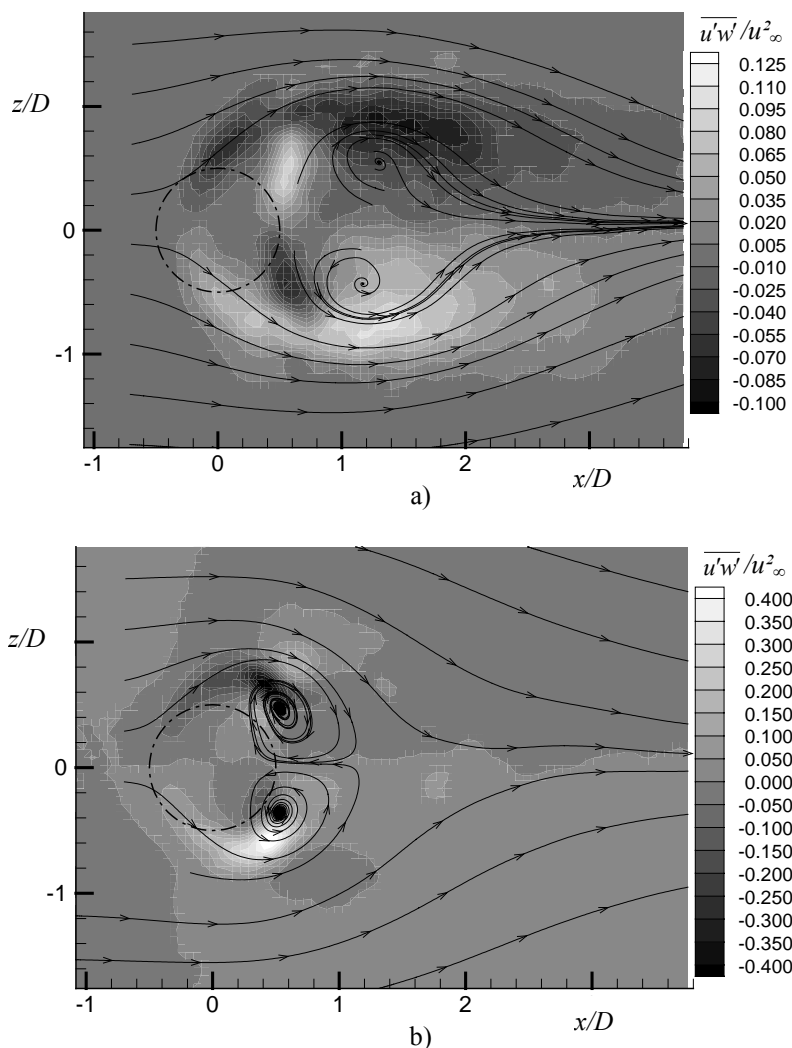


Figura 10.16 Linee di flusso medie e mappe degli sforzi $\overline{u'w'}/u_\infty^2$ ad $y/D = 1$ per $Re = 8000$. a) $R = 3$; b) $R = 5$.

Per quanto concerne gli sforzi di Reynolds $\overline{u'w'}$, a causa della mancanza di dati affidabili nella regione di uscita del getto, non è possibile mostrarli per il piano posto alla distanza $y/D = 0.25$. Poiché, d'altra parte, l'andamento qualitativo non muta allontanandosi di poco dalla parete, per i rapporti di iniezione elevati è possibile dedurne le caratteristiche analizzando le misure a distanza maggiore. Allo scopo, in Figura 10.16(a) e Figura 10.16(b) sono mostrati rispettivamente gli sforzi di Reynolds e le linee di flusso medie misurate nel piano $y/D = 1$ ed a $Re = 8000$ per i rapporti $R = 3$ ed $R = 5$. Dalle mappe riportate si evince che i valori massimi degli sforzi si hanno ai lati del getto lungo le superfici di separazione tra il getto e la corrente principale. A monte del CVP è presente una piccola regione del flusso in cui gli sforzi cambiano segno. Per $R = 5$ la coppia di vortici contro-rotanti si sposta più a monte ed ha dimensioni minori. Per tale ragione, la regione di massimo per gli sforzi turbolenti ha una estensione minore ed i picchi ai lati del getto sono molto più accentuati.

Per valutare l'influenza della distanza dalla parete sull'energia cinetica turbolenta, in Figura 10.17 sono riportate le mappe relative al piano $y/D = 1$ per un numero di Reynolds pari a 8000. In figura è riportata solo la misura con rapporto di iniezione $R = 3$ poiché per i valori inferiori a 3 il getto è molto incurvato, mentre per i valori superiori a 3 i risultati sono del tutto analoghi. Come si vede dalla figura, a questa distanza, la mappa di turbolenza presenta i massimi ai lati del getto con una mappa che è simile a quella che si riscontra a $R = 2$ in prossimità della parete. Ciò si giustifica osservando le caratteristiche del flusso medio. Infatti, mentre in prossimità della parete sia il nodo che la coppia di vortici contro-rotanti contribuiscono ad aumentare la turbolenza, a valle del getto, allontanandosi dal nodo, il flusso diventa più stabile ed il CVP, avendo una scala maggiore, contribuisce in misura minore all'incremento dell'energia cinetica turbolenta.

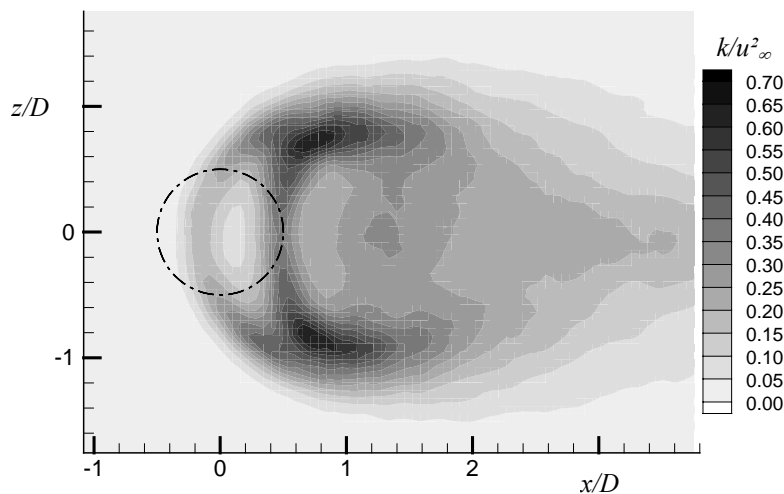
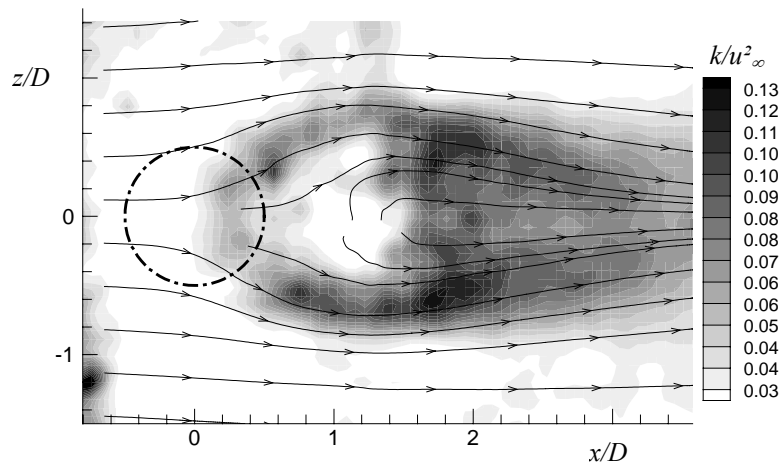


Figura 10.17 Mappe dell'energia cinetica turbolenta nel piano $y/D = 1$ per $Re = 8000$ ed $R = 3$.

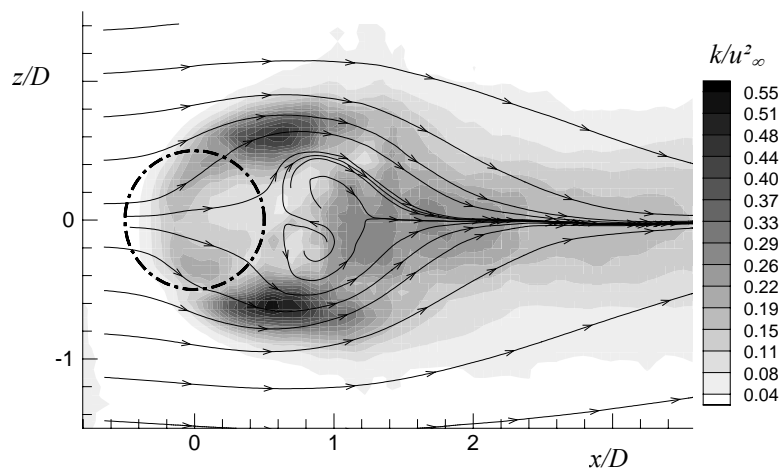
Per valutare l'effetto del numero di Reynolds sulle statistiche turbolente in Figura 10.18 e in Figura 10.19 sono state riportate, rispettivamente per $Re = 2000$ e $Re = 4000$, le mappe dell'energia cinetica turbolenta adimensionalizzata misurate agli stessi rapporti di iniezione delle mappe mostrate per $Re = 8000$. La minore velocità assunta in uscita del getto questa volta ha consentito di ottenere misure valide anche in corrispondenza della sezione di uscita del condotto. Come si evince dalle figure seguenti, avendo mantenuto lo stesso sfasamento tra i laser, le misure a numero di Reynolds inferiore sono affette da un rumore di fondo più elevato.

La maggior parte delle considerazioni fatte per le misure ad un numero di Reynolds più elevato si possono estendere anche alle misure con numero di Reynolds inferiori. Le prove con $Re = 2000$ e $Re = 4000$, seppure con qualche differenza, presentano mappe dell'energia cinetica turbolenta con caratteristiche identiche tra di loro e la differenza tra i valori medi nelle singole prove è imputabile all'incertezza nella misura piuttosto che ad una effettiva differenza tra le caratteristiche di turbolenza dei singoli flussi in esame. Entrambe, però, hanno mediamente livelli di turbo-

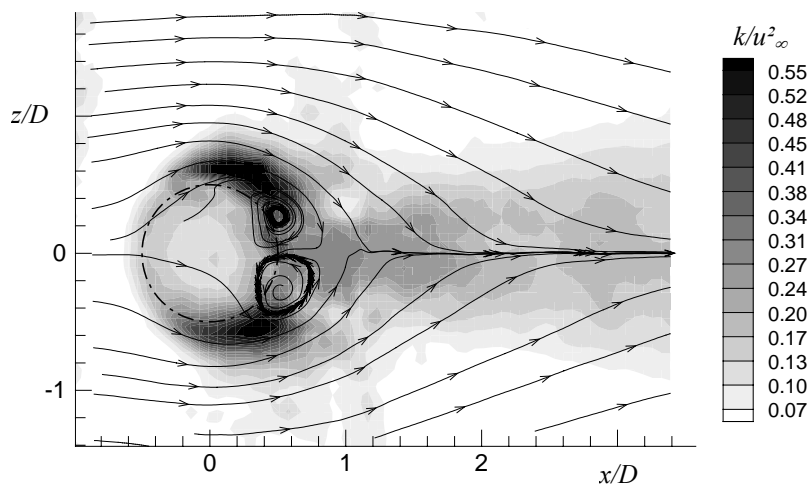
lenza inferiori rispetto alle mappe ottenute ad un numero di Reynolds superiore. Le linee di flusso medio riportate sulle immagini sono l'ulteriore conferma che, ad eccezione di piccole differenze nella posizione e nella forma dei vortici, le caratteristiche del flusso sono identiche per tutti i regimi analizzati.



a)



b)



c)

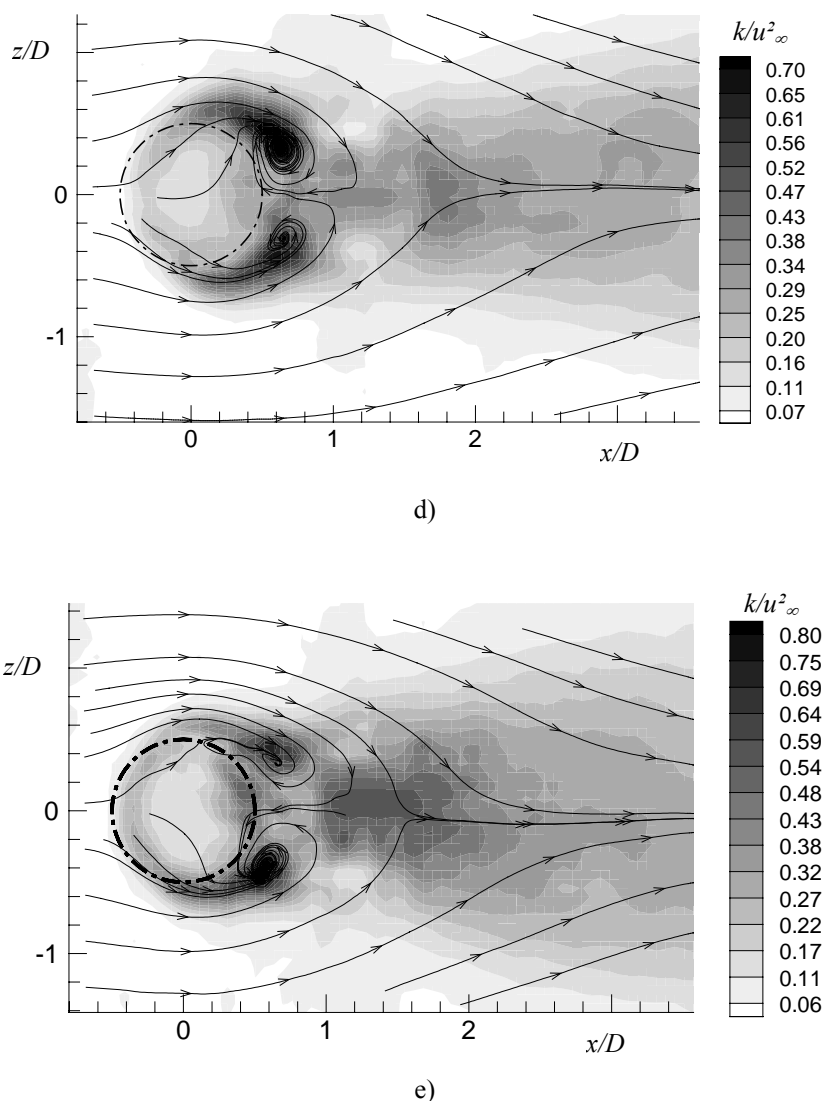
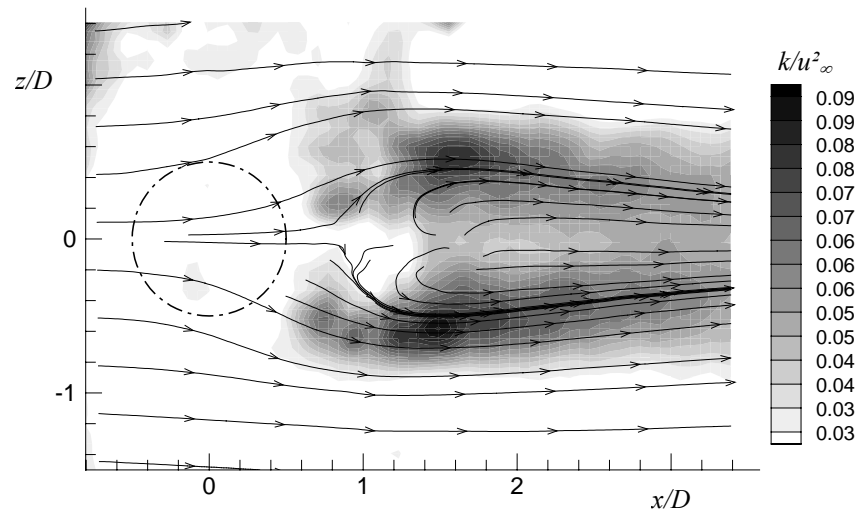


Figura 10.18 Mappe dell'energia cinetica turbolenta e linee di flusso medie per $Re = 2000$ nel piano $y/D = 0.25$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$.

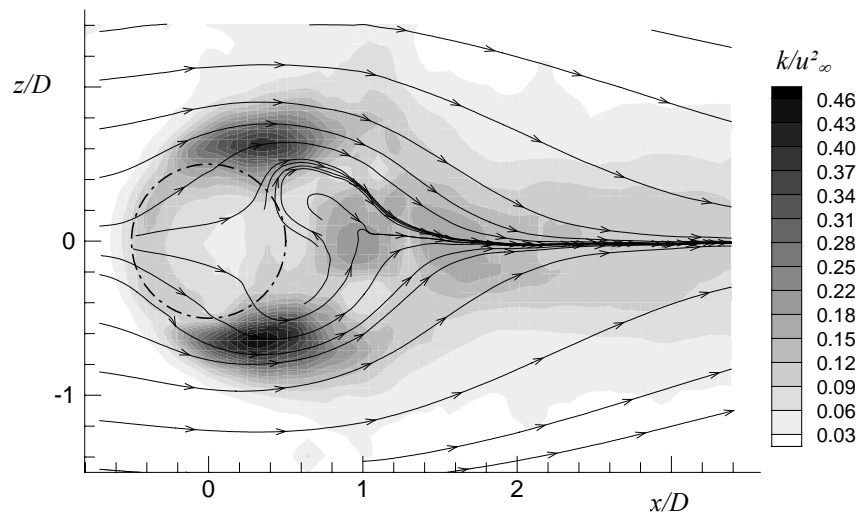
Le mappe relative ad un rapporto di iniezione $R = 1$ presentano una regione con un minimo immediatamente a monte del nodo che è molto più pronunciata rispetto alla corrispondente prova a $Re = 8000$ e le regioni di massimo ai lati del getto si estendono per un tratto maggiore nella direzione della corrente in particolar modo per la prova a $Re = 2000$. Al decrescere del numero di Reynolds, a tutti i rapporti di iniezione la regione di scia ad elevata turbolenza tende ad essere meno uniforme. La stessa regione, a bassi Reynolds tende ad allungarsi ed a ridurre leggermente la propria estensione lungo la direzione dell'asse z .

Per quanto riguarda le regioni ad elevata turbolenza presenti ai bordi del getto, per $Re = 2000$ i picchi sono leggermente più evidenti rispetto alle prove a numeri di Reynolds maggiori, mentre la regione di massimo presente sull'asse delle x è meno marcata rispetto alle zone circostanti. Infine, al decrescere del numero di Reynolds i vortici assumono una forma più definita a tutti i rapporti di iniezione esaminati.

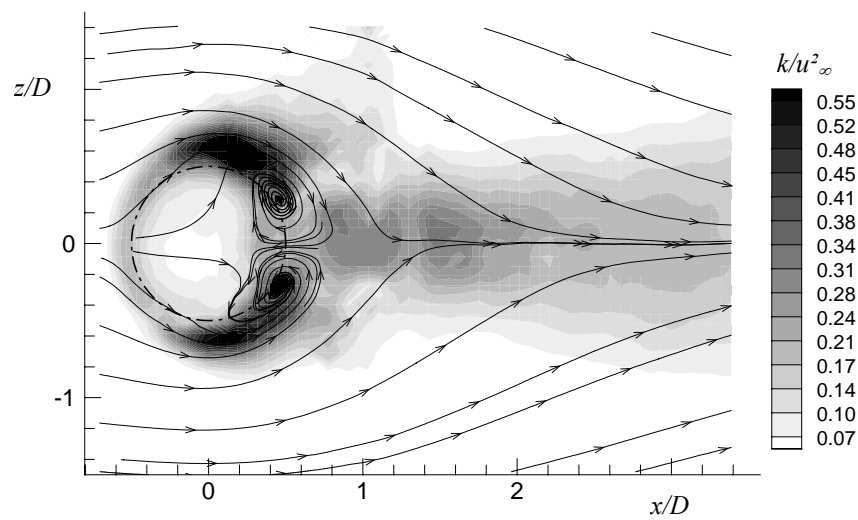
Sia la dimensione che la forma della scia, sia le caratteristiche dei vortici a basso numero di Reynolds si possono giustificare con il crescente aumento delle forze viscosse rispetto ai termini cinetici. Il prevalere dei termini cinetici, infatti, contribuisce a distruggere le eventuali strutture vorticosche che si formano nel fluido ed a propagare le perturbazioni presenti nella scia per una lunghezza maggiore all'interno della corrente principale.



a)



b)



c)

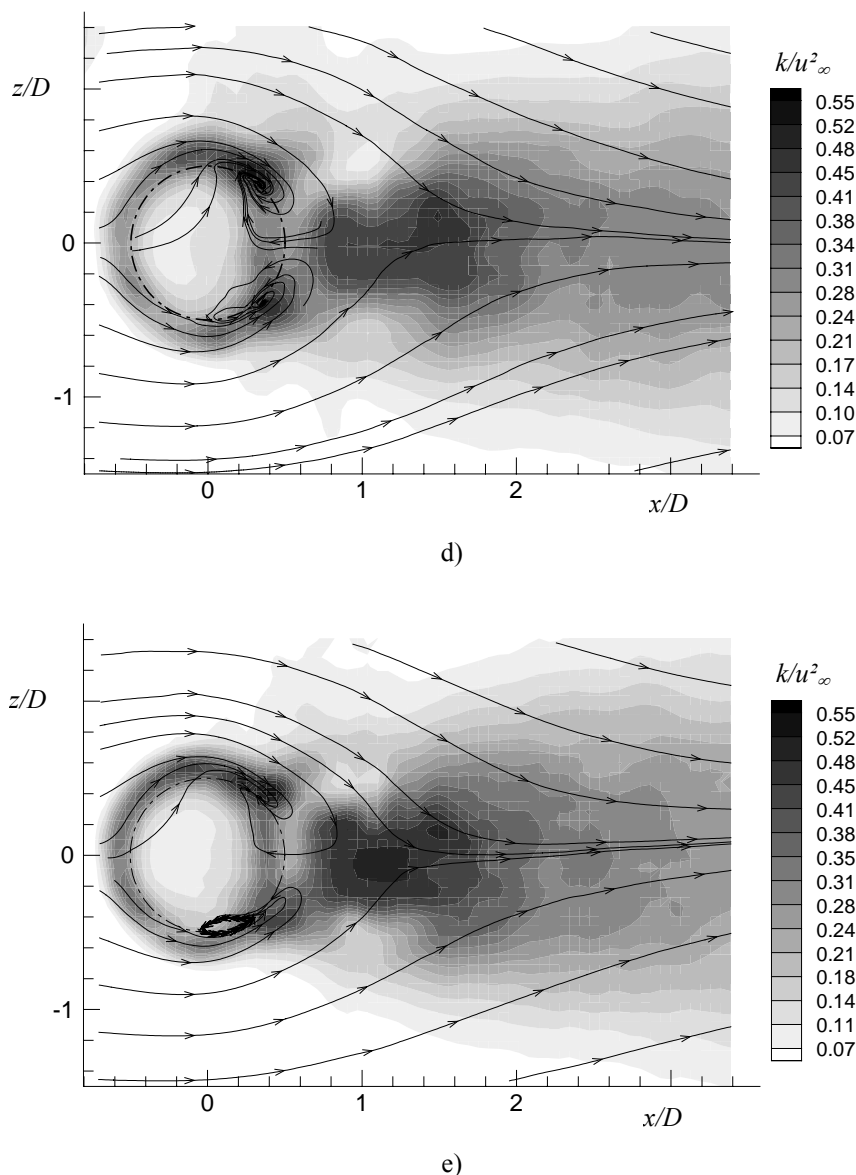


Figura 10.19 Mappe dell'energia cinetica turbolenta e linee di flusso medie per $Re = 4000$ nel piano $y/D = 0.25$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$.

Per analizzare meglio l'influenza del numero di Reynolds sulla coppia di vortici contro-rotanti, in Figura 10.20 sono riportate le linee di flusso medie per il rapporto di iniezione $R = 3$ per Re variabili da 1000 a 8000. Si è scelto di analizzare il rapporto di iniezione intermedio in quanto, soltanto per $R = 3$ la coppia di vortici è risultata completamente sviluppata. Inoltre, sebbene delle misure a $Re = 1000$ non sia stato possibile riportare le mappe dell'energia cinetica turbolenta a causa dell'elevata incertezza nella misura, ai fini di una valutazione puramente qualitativa, l'utilizzo delle linee di flusso medie è in questo caso lecito.

Dagli andamenti delle linee di flusso riportati nelle figure si deduce chiaramente l'evoluzione del CVP. Per valori bassi del numero di Reynolds, la coppia di vortici assume una forma ellittica leggermente allungata lungo la direzione della corrente principale e, sia il nodo, sia il CVP si trovano in una posizione più lontana rispetto alla sezione di uscita del getto. Per $Re = 2000$, la coppia di vortici assume una forma circolare e si trova spostata insieme al nodo leggermente più a monte rispetto quella corrispondente a $Re = 1000$. Quando il numero di Reynolds cresce ulteriormente, il CVP assume nuovamente una forma ellittica, questa volta, però, lungo la direzione z ed è situato insieme al nodo su sezioni che si spostano sempre più a monte. Il tipo di comportamento descritto si giustifica considerando che, al crescere del numero di Reynolds, il flusso,

diventando sempre più turbolento, riesce a penetrare maggiormente all'interno della regione di scia e ciò, oltre a limitare lo sviluppo della coppia di vortici nella direzione della corrente, fa spostare il punto nodale nella scia verso valori dell'ascissa inferiori.

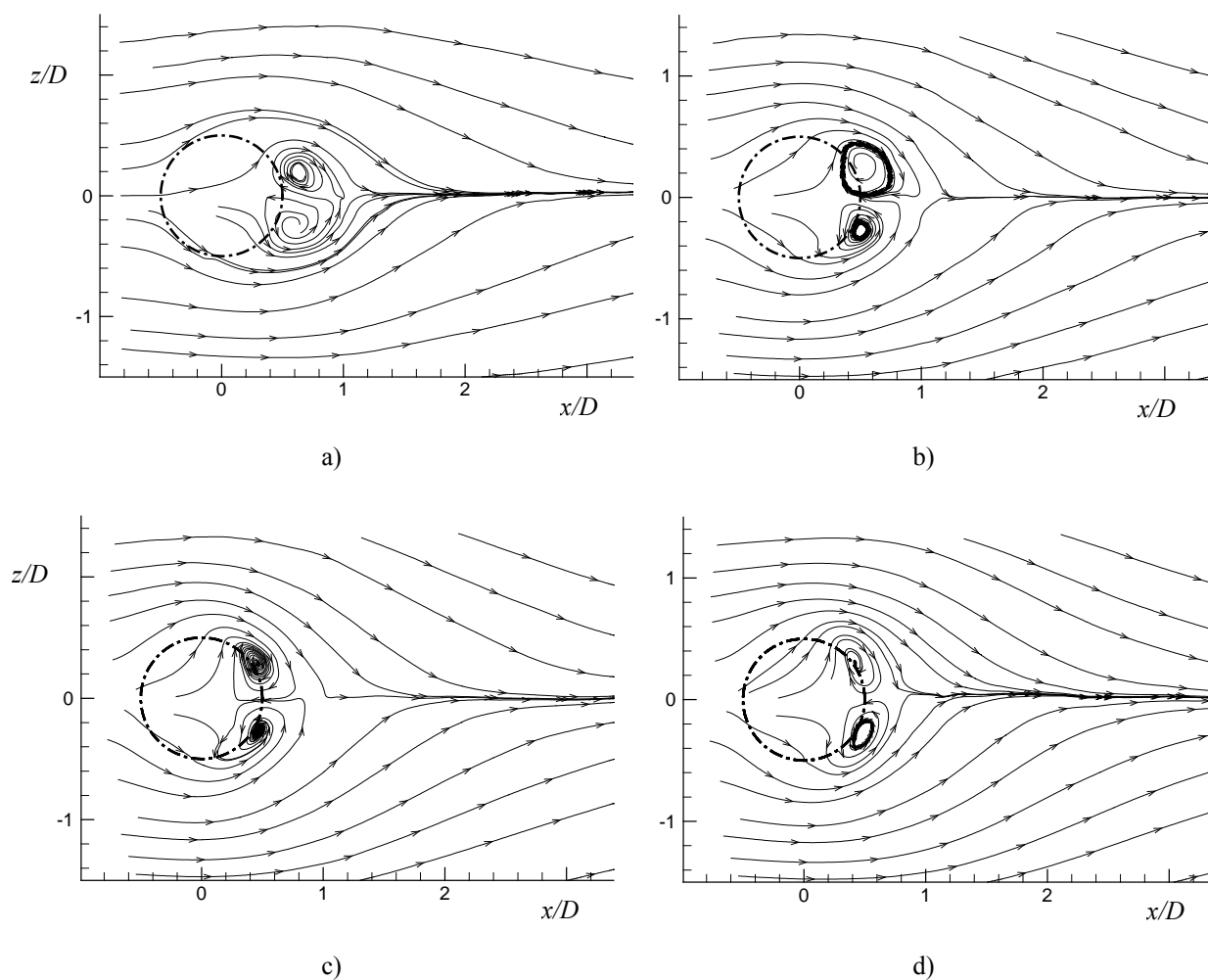


Figura 10.20 Evoluzione della coppia di vortici contro-rotanti nel piano $y/D = 0.25$ per $R = 3$: a) $Re = 1000$; b) $Re = 2000$; c) $Re = 4000$; d) $Re = 8000$.

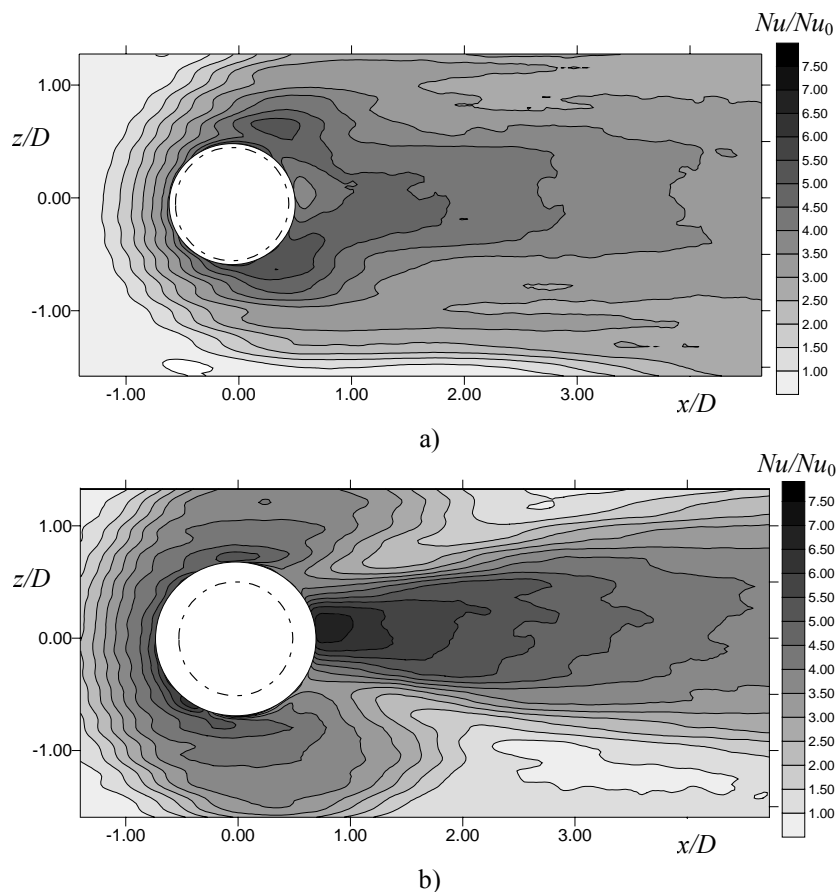
11. RISULTATI DELLE MISURE TERMOGRAFICHE

Di seguito saranno mostrati i risultati delle misure dello scambio termico alla parete ai diversi numeri di Reynolds e rapporti di iniezione esaminati. I risultati saranno mostrati in termini di numero di Nusselt Nu normalizzato rispetto al valore Nu_0 ottenuto senza immissione del getto ed otturando il condotto di uscita. Per ciascuna delle figure analizzate, la circonferenza disegnata a tratto e punto indica la sezione di uscita del getto, mentre il cerchio bianco indica la zona in cui non sono stati riportati i risultati. In questa zona, situata in corrispondenza della sezione di uscita del condotto, i dati non sono attendibili in parte a causa dell'assenza di riscaldamento e in parte a causa degli elevati effetti di bordo (dovuti alla elevata conduzione) ai lati del condotto. Anche per riportare le prove termografiche si è fatto uso di scale adimensionalizzate rispetto al diametro di uscita del condotto. Di seguito verranno prima descritte le caratteristiche generali delle mappe termiche visualizzate e, successivamente, saranno analizzati gli effetti del numero di Reynolds e del rapporto di iniezione.

11.1. Caratteristiche principali delle mappe di scambio termico

Per esaminare le principali caratteristiche delle mappe di scambio termico, in Figura 11.1 sono riportate le mappe normalizzate del numero di Nusselt in prossimità della regione di uscita del getto per un numero di Reynolds pari ad 8000 e per rapporti di iniezione variabili da 1 a 5.

Per tutti i rapporti di iniezione esaminati, a monte del getto è presente una regione ad elevato scambio termico causata dall'effetto aspirante del getto sullo strato limite, dagli elevati effetti conduttivi e dal conseguente incremento della turbolenza nello strato limite. Al crescere del rapporto di velocità si evidenzia una scia ad elevato scambio termico a partire dalla regione sottovento del getto. La scia, che non è ben definita per $R = 1$, si ingrandisce passando da $R = 3$ ad $R = 4$ e rimane pressoché inalterata ad $R = 5$ almeno nella zona di confine con il flusso principale. Ad $R = 1$ si sono individuate due regioni di massimo spostate più a valle rispetto ai lati del condotto.



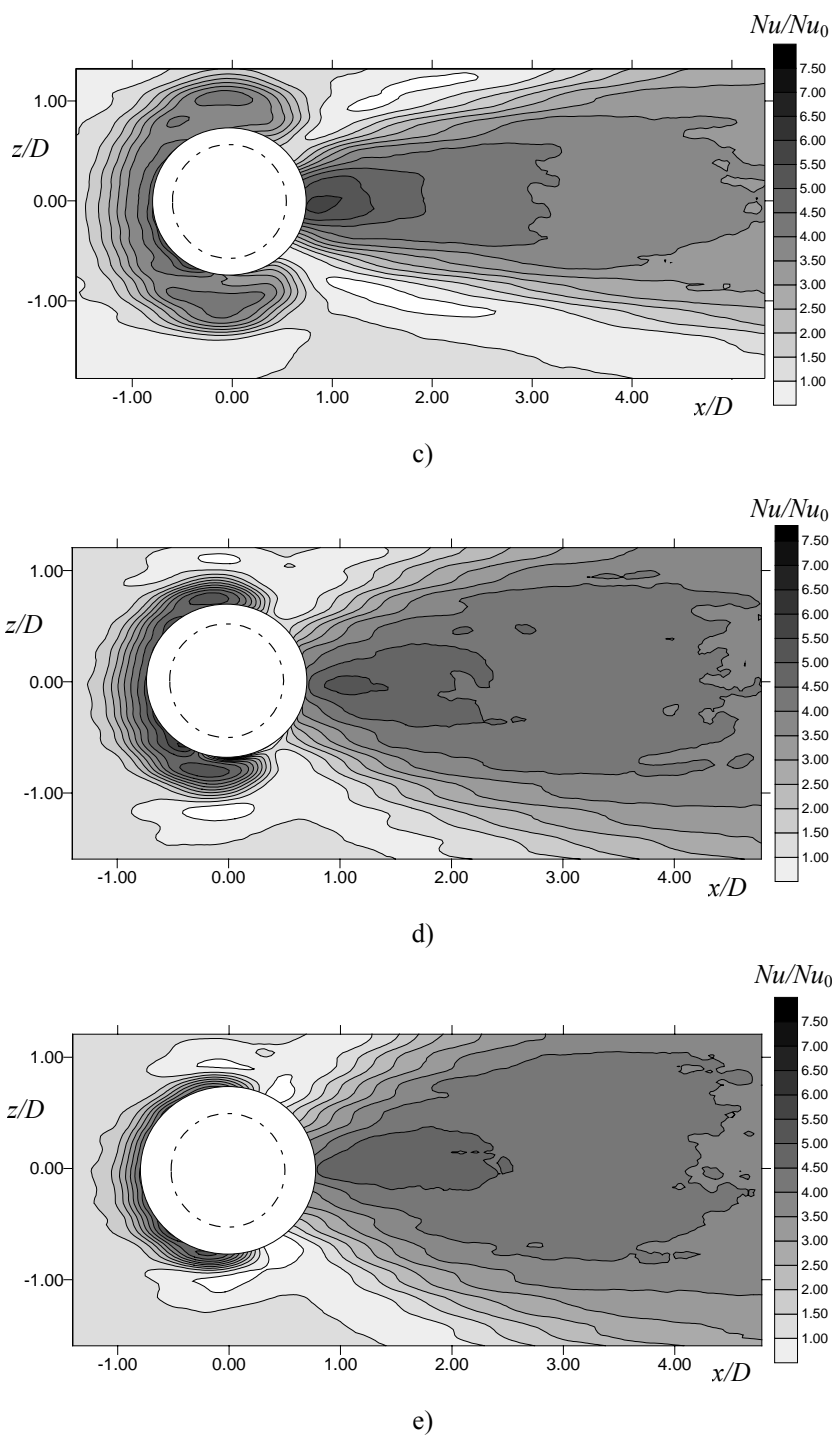


Figura 11.1 Mappe del numero di Nusselt normalizzato Nu/Nu_0 sulla parete riscaldata per $Re = 8000$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$. La circonferenza a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto mentre il cerchio bianco indica la regione in cui non sono stati riportati i dati.

Lungo la linea centrale a valle del condotto le mappe hanno un comportamento particolare in corrispondenza della zona posta ad $x/D = 1$. In questa regione, mentre per un rapporto di iniezione pari ad 1 le mappe di Nu/Nu_0 presentano un minimo, per rapporti di velocità maggiori il minimo diventa un massimo che si indebolisce e tende a spostarsi più a valle al crescere di R , raggiungendo il valore massimo per $R = 2$. Inoltre, lo scambio termico medio alla parete diminuisce passando da $R = 1$ ad $R = 3$ ed aumenta andando da $R = 3$ ad $R = 5$. Quest'ultimo incremento è imputabile al moto verticale del getto che diventa sempre più marcato al crescere del rapporto di velocità ed è associato alla diminuzione di pressione nella scia sempre più significativa. Nella

zona immediatamente a monte del getto lo scambio termico diminuisce al crescere di R in seguito alla crescente ostruzione del getto che riduce notevolmente la velocità del flusso trasversale in quella zona.

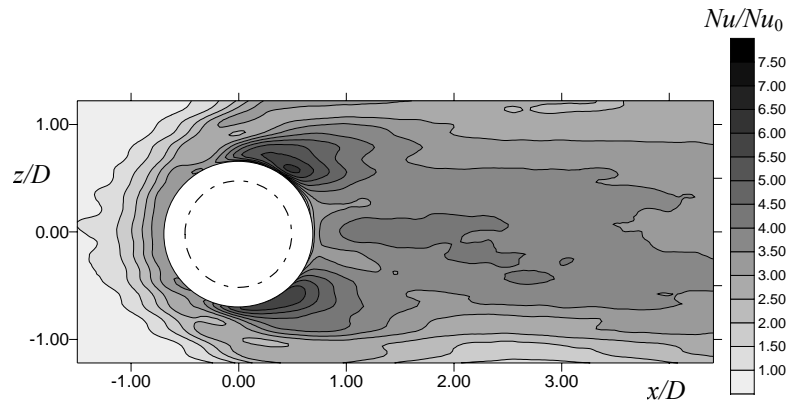
L'andamento delle mappe di Nu/Nu_0 nella regione di scia si può giustificare se si tiene presente l'andamento delle mappe di energia cinetica turbolenta presentate nel capitolo precedente. Per $R = 1$ ed $R = 2$, infatti, anche l'energia cinetica turbolenta presenta due regioni di massimo nelle zone laterali del getto, mentre la regione di minimo non è molto pronunciata. In questo caso le posizioni dei massimi ai due rapporti di velocità si trovano rispettivamente in corrispondenza delle ascisse $x/D = 0.9$ ed $x/D = 0.7$ e sono traslate rispetto alle mappe di scambio termico a causa della deviazione del getto. Inoltre, anche per l'energia cinetica turbolenta si ha un massimo per i valori $R > 3$ e si riscontra una piccola diminuzione di valori passando dal rapporto di iniezione 3 a 4.

Le caratteristiche delle mappe di scambio termico si comprendono meglio mediante l'analisi del campo di moto medio e delle statistiche turbolente nei piani ortogonali alla parete. Rispetto ai rapporti di iniezione elevati, ad $R = 1$ il getto a valle della sezione di uscita è molto vicino alla parete e, mescolandosi allo strato limite, induce un'ampia regione ad elevata turbolenza e scambio termico così come si evince dalla Figura 11.1(a). La vicinanza del getto alla parete favorisce la formazione di una zona di ricircolo al di sotto di esso che è responsabile della formazione della regione di minimo per lo scambio termico. Inoltre, l'assenza della coppia di vortici contro-rotanti non comporta alcun contributo addizionale alla turbolenza e, di conseguenza, allo scambio termico. Per $R = 2$, nella regione sottovento del getto si raggiunge il valore massimo dello scambio termico rispetto a tutti i rapporti di iniezione considerati a causa della presenza del nodo posto nella regione $x/D = 1$ e del CVP che contribuiscono ad incrementare notevolmente la turbolenza. In aggiunta, la zona a bassa pressione non è molto ampia ed il raffreddamento è dovuto principalmente al flusso del getto che non è stato riscaldato dalla parete piuttosto che al flusso trasversale che penetra all'interno della scia.

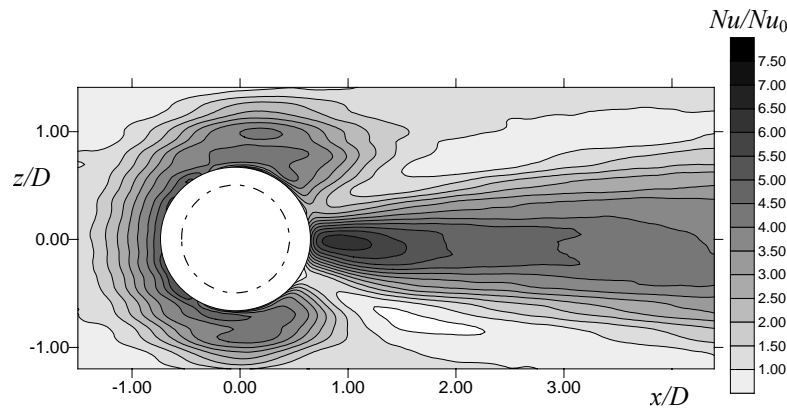
L'evoluzione della regione di massimo nella scia al crescere del rapporto di iniezione è legata allo sviluppo della coppia di vortici contro-rotanti. Il meccanismo di formazione di quest'ultima fornisce una spiegazione valida al motivo per cui, ad elevati rapporti di velocità, il picco nello scambio termico si riduce o scompare. Infatti, per i rapporti più alti la formazione del CVP è ritardata rispetto agli altri casi e la coppia di vortici si sposta a monte più vicino al getto. Ciò riduce l'effetto del CVP sull'incremento della turbolenza e fa sì che la regione di massimo dello scambio termico trasli più a valle. Inoltre, l'elevata componente di moto verticale nella regione posteriore del getto, rendendo il moto più stabile, contribuisce alla diminuzione del picco. Le mappe dell'energia cinetica turbolenta non spiegano la regione ad elevato scambio termico a monte del getto; ciò, in parte può essere attribuito alla posizione del piano di misura che, contrariamente a quanto accade a valle, in cui lo strato limite è interrotto dalla presenza del getto, non è completamente all'interno dello strato limite.

Per $R = 5$ (Figura 11.1(e)) ai lati del getto ed a $z/D > 1$ lo scambio termico recupera il valore ottenuto in assenza di iniezione del getto. Per un rapporto di iniezione pari a 4 il comportamento è molto simile mentre, per $R = 3$ la zona a basso Nu si sposta verso regioni più lontane dal getto. La presenza delle suddette zone è anche dovuta in parte ad una sorta di separazione della corrente trasversale indotta dal flusso del getto ad elevata quantità di moto ed in parte alla distribuzione della velocità media nella zona adiacente al getto. Ricordando le mappe della componente di velocità parallela alla parete, si nota che i valori massimi di V_y si trovano sempre nella stessa posizione in cui si hanno i massimi dello scambio termico. Per piccoli rapporti di iniezione la corrente principale non riesce a penetrare sotto al getto e la velocità non raggiunge rapidamente il valore relativo al flusso libero; di conseguenza, le mappe di Nu/Nu_0 non presentano minimi ai lati della regione di scia. Al crescere di R sia l'influenza del getto sullo scambio termico che il campo di moto sono più simili a quelli relativi ad un cilindro solido. In particolare, per $R = 4$ ed $R = 5$ il flusso principale penetra nella scia generando delle regioni di massimo per la velocità che

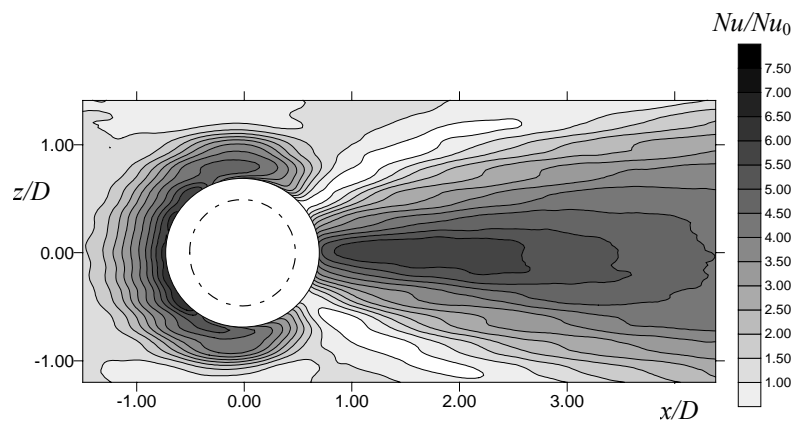
tendono a concentrarsi maggiormente nelle immediate vicinanze del getto. Anche se in corrispondenza di $z/D = \pm 1$ il valore della velocità rimane piuttosto elevato, in questa zona, la bassa turbolenza e la separazione del flusso hanno un ruolo dominante sullo scambio termico e generano le regioni di minimo esterne al getto. Infine, si osservi che le zone a basso Nu/Nu_0 ai lati della scia sono dovute molto probabilmente alla diminuzione dell'energia cinetica della corrente trasversale. Anche lo spostamento a valle della suddette regioni, che avviene ad $R = 3$, può essere spiegato con le mappe della componente di velocità nel piano. Dal momento che $R = 3$ costituisce una configurazione di transizione tra i regimi a bassi rapporti di iniezione e quelli a rapporti più elevati, le regioni di massimo si estendono più a valle. Ciò induce un incremento nello scambio termico convettivo in prossimità dei lati della sezione di uscita e la conseguente traslazione in direzione della corrente del minimo nelle mappe di Nu/Nu_0 .



a)



b)



c)

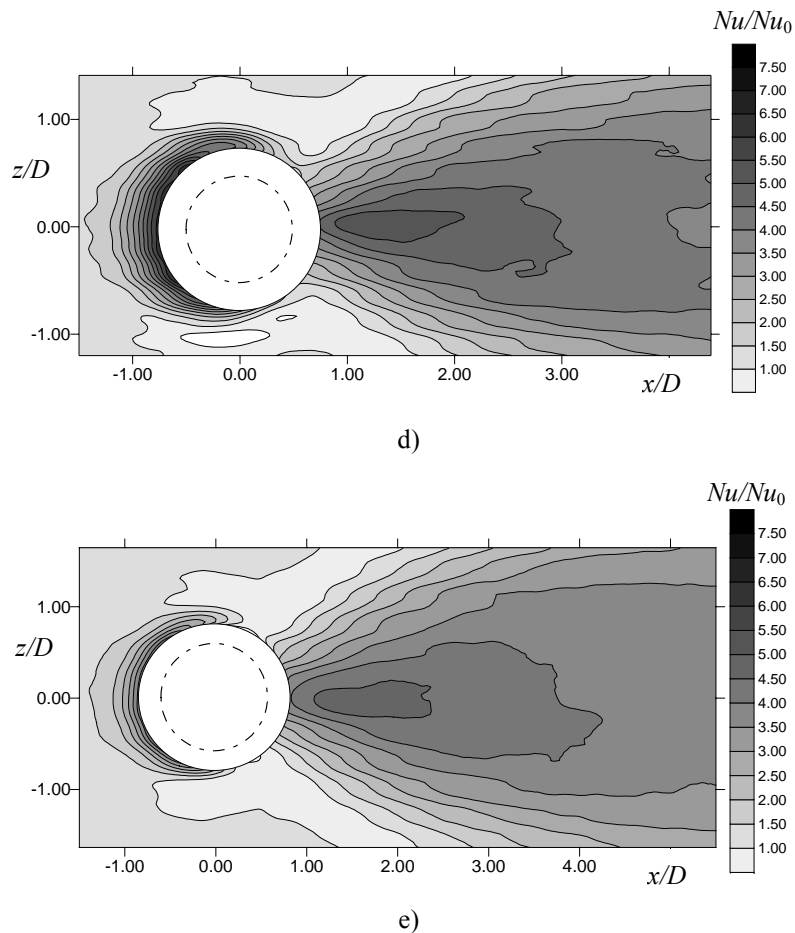
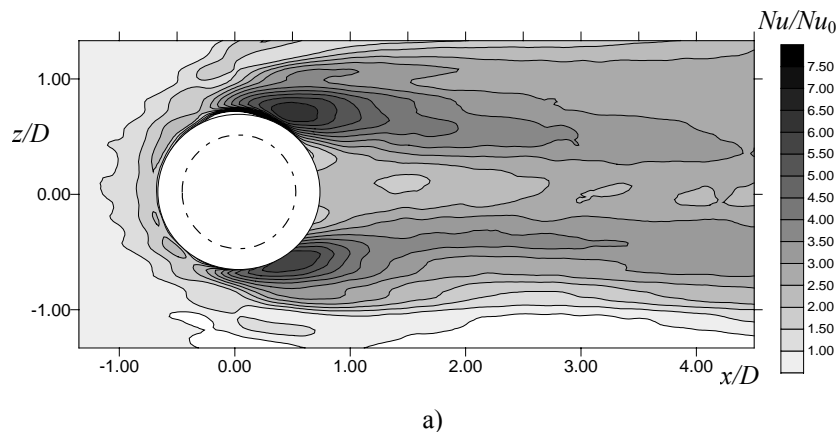


Figura 11.2 Mappe del numero di Nusselt normalizzato Nu/Nu_0 sulla parete riscaldata per $Re = 4000$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$. La circonferenza a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto mentre il cerchio bianco indica la regione in cui non sono stati riportati i dati.

11.2. Influenza del numero di Reynolds

Per valutare l'effetto del numero di Reynolds sullo scambio termico alla parete, le mappe normalizzate del numero di Nusselt mostrate a $Re = 8000$ sono confrontate con quelle relative ad un numero di Reynolds pari a 4000 e 2000 e riportate rispettivamente in Figura 11.2 e Figura 11.3. Nel caso del regime a Re minore, nelle mappe si è riscontrata una leggera asimmetria rispetto al piano centrale, in quanto a velocità così basse, il contributo della convezione naturale, seppur piccolo, non è più trascurabile. In generale, l'effetto del rapporto di iniezione è analogo anche ad un numero di Reynolds inferiore e gli andamenti delle mappe sono molto simili avendo scambio termico più uniforme e scia più larga ad R bassi ed una regione di scia ad elevato scambio termico a valle del getto che tende prima a restringersi e poi ad ingrandirsi al crescere di R .



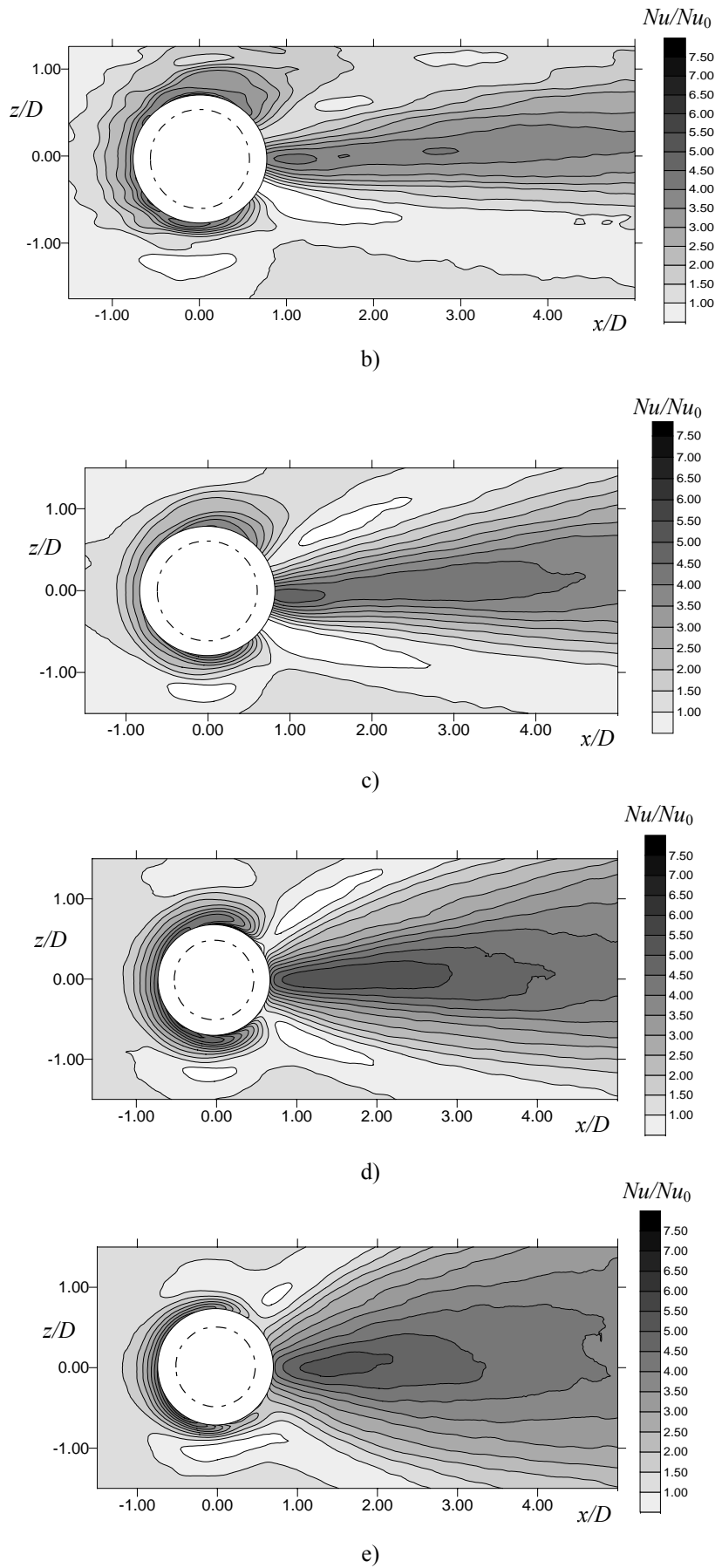


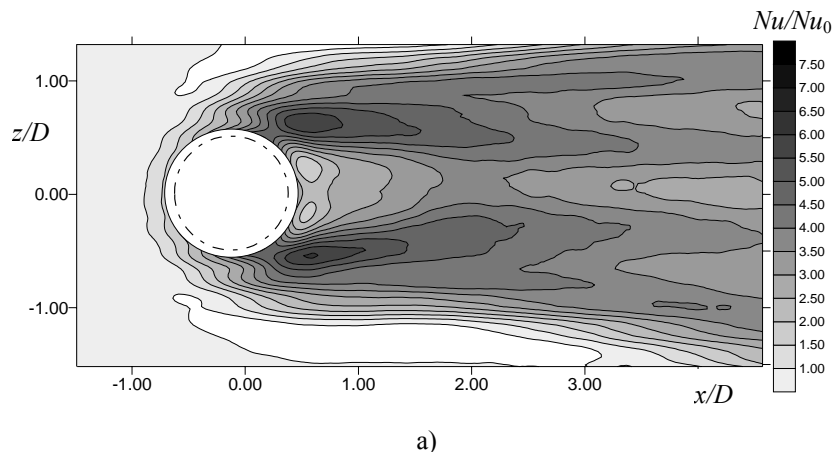
Figura 11.3 Mappe del numero di Nusselt normalizzato Nu/Nu_0 sulla parete riscaldata per $Re = 2000$: a) $R = 1$; b) $R = 2$; c) $R = 3$; d) $R = 4$; e) $R = 5$. La circonferenza a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto mentre il cerchio bianco indica la regione in cui non sono stati riportati i dati.

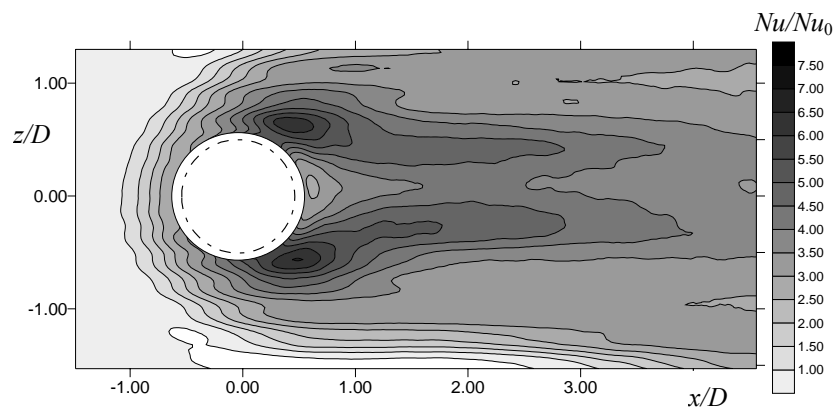
Al crescere del numero di Reynolds i valori medi del Nusselt normalizzato restano pressoché invariati, presentando un lieve aumento nei valori che può essere imputabile anche all'incertezza sperimentale, mentre la forma e le dimensioni delle mappe di livello cambiano sensibilmente in particolar modo ai regimi inferiori. Per $R = 1$, riducendo il numero di Reynolds, la regione di minimo a valle del getto tende ad ingrandirsi estendendosi più a valle. Le regioni di massimo ai lati del getto tendono anch'esse ad allungarsi nella direzione della corrente. Infatti, confrontando la Figura 11.1(a) con la Figura 11.2(a) e la Figura 11.3(a) si vede chiaramente che a $Re = 8000$ la zona di minimo è confinata ad una piccola regione circolare sul lato sottovento del getto. Riducendo il numero di Reynolds a 4000, la regione a valle del getto assume un valore del Nusselt normalizzato inferiore ed i picchi ai lati assumono valori che si discostano maggiormente da quelli delle zone adiacenti assumendo una forma più ovalizzata in direzione x . Riducendo ulteriormente il numero di Reynolds, infine, la regione di minimo assume una forma triangolare che si estende fino a circa due diametri e mezzo a valle della sezione di uscita.

A R maggiori le differenze più significative nelle mappe si hanno per i rapporti di iniezione da 2 a 4 per i quali le mappe dello scambio termico si modificano allo stesso modo. Analogamente a quanto accade per le misure ad $R = 1$, le mappe di livello iso-Nusselt sono molto più allungate verso la direzione della corrente nella regione di scia mentre la regione di massimo a monte del getto tende a ridurre le proprie dimensioni. Questo comportamento è del tutto analogo a quello riscontrato nelle mappe dell'energia cinetica turbolenta ottenuta nelle misure con tecnica PIV. La regione a massimo scambio termico nella scia del getto, invece, tende ad essere più intensa ed a spostarsi più a monte. Quest'ultimo comportamento si può giustificare attraverso l'evoluzione della coppia di vortici contro-rotanti che si è riscontrata nelle misure anemometriche. Come si è visto, al crescere del numero di Reynolds il CVP tende a diventare ellittico lungo la direzione z , rimanendo più attaccato al lato posteriore del getto; di conseguenza, anche il suo contributo allo scambio termico risulta traslato verso monte.

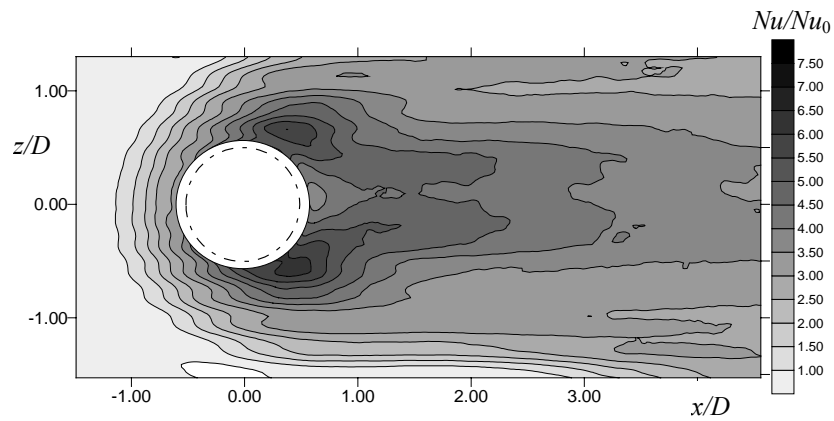
11.3. Influenza del rapporto di iniezione

I risultati riportati in Figura 11.1 hanno evidenziato che le mappe di scambio termico convettivo cambiano in maniera significativa soltanto a bassi rapporti di iniezione, per i quali le mappe sono più uniformi sia in prossimità del getto che nella regione di scia. Per analizzare in maniera più approfondita il meccanismo con cui evolve lo scambio termico passando da valori piccoli di R a valori grandi, in Figura 11.4 sono riportate le mappe di Nu/Nu_0 a $Re = 8000$ per rapporti di iniezione variabili da 0.5 a 1.75 con un passo più fitto in corrispondenza dei valori di transizione. Per bassi rapporti di iniezione, la regione di minimo trovata ad $R = 1$ nella zona sottovento del getto si estende su una superficie maggiore e, contemporaneamente, le zone di massimo ai lati della scia si allungano maggiormente in direzione dell'asse x . La massima estensione per questa zona si ha chiaramente per $R = 0.5$ ed è imputabile al maggiore ricircolo prodotto dalla deviazione immediata del getto all'uscita dal condotto.

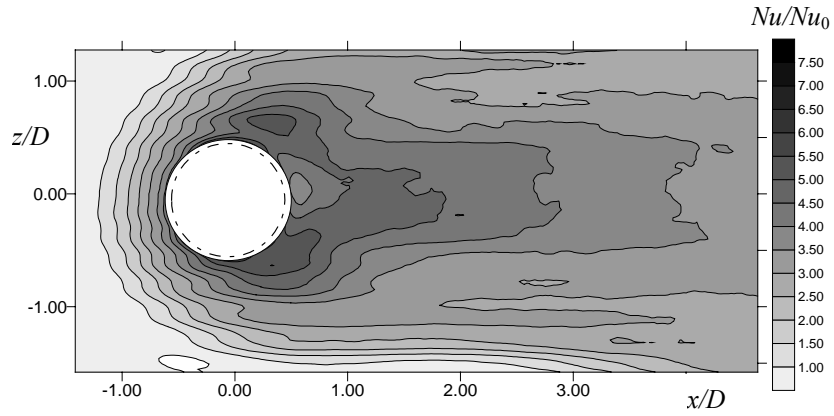




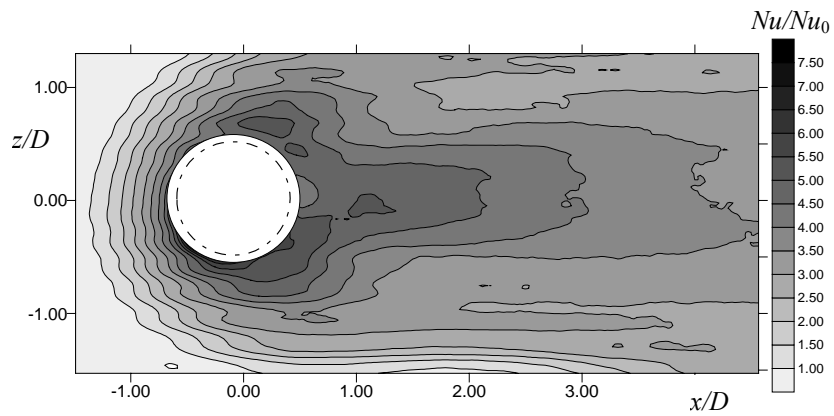
b)



c)



d)



e)

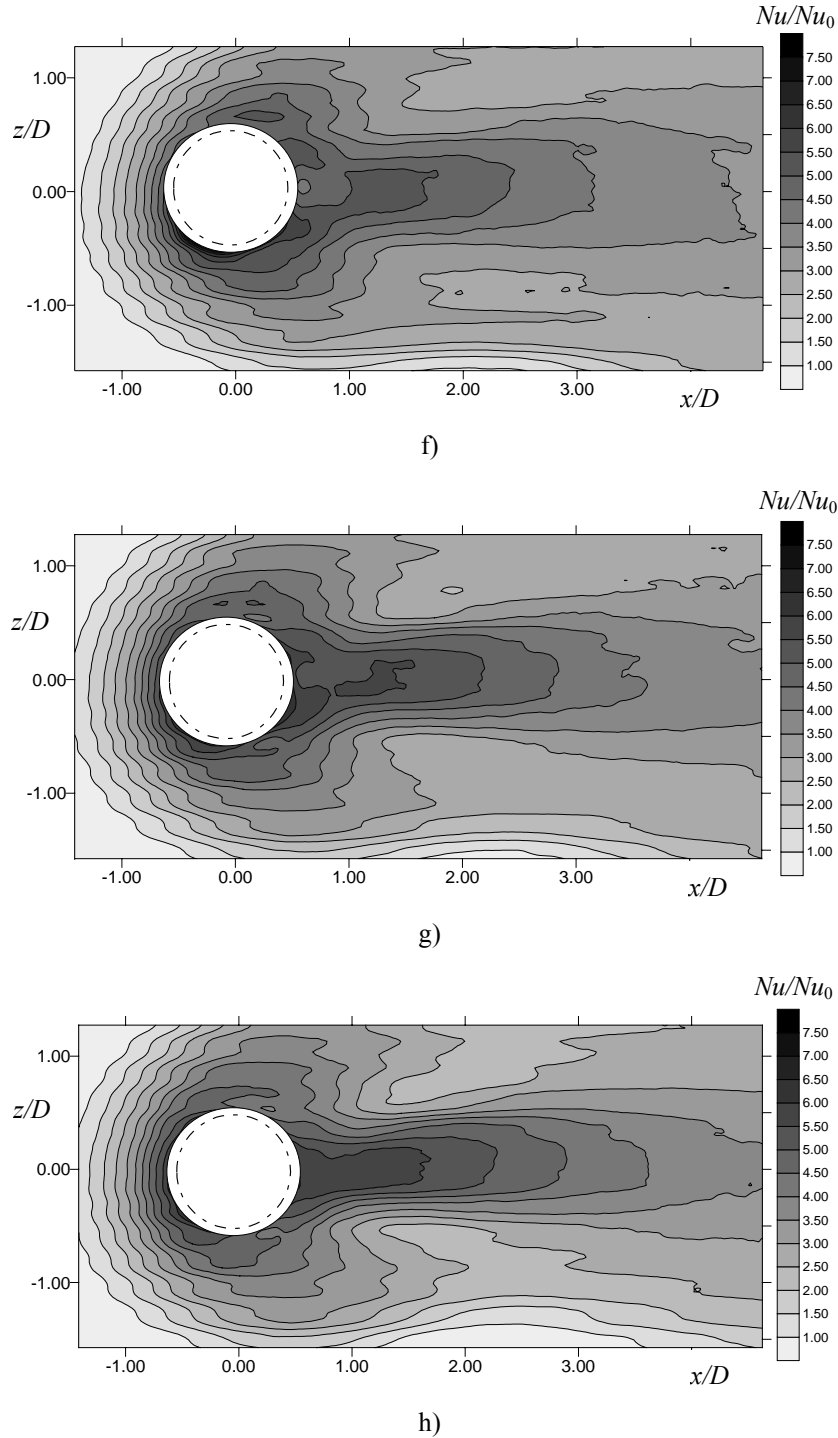
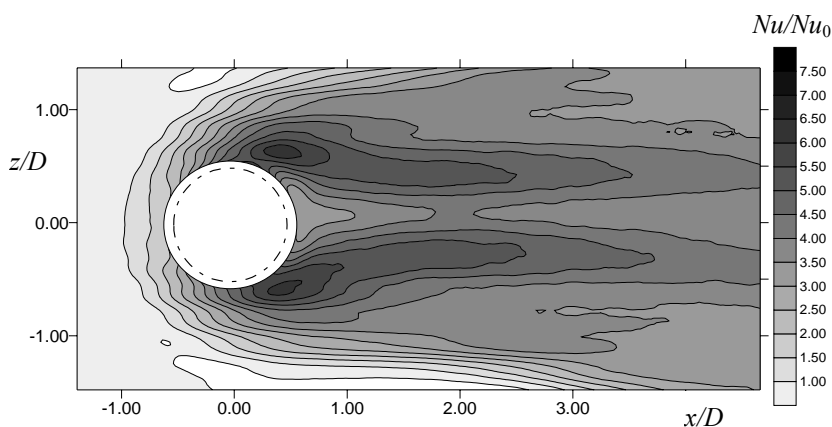


Figura 11.4 Mappe del numero di Nusselt normalizzato Nu/Nu_0 sulla parete riscaldata per $Re = 8000$: a) $R = 0.5$; b) $R = 0.75$; c) $R = 0.87$; d) $R = 1$; e) $R = 1.12$; f) $R = 1.25$; g) $R = 1.5$; h) $R = 1.75$. La circonferenza a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto mentre il cerchio bianco indica la regione in cui non sono stati riportati i dati.

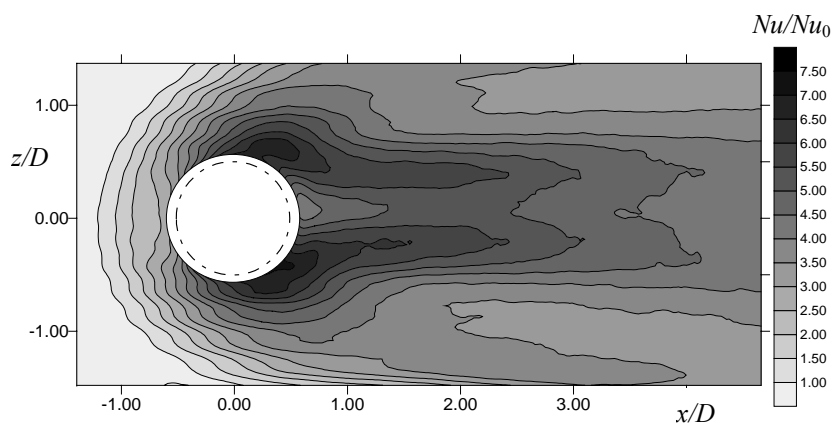
Sempre nella misura ad $R = 0.5$, vicino alle zone laterali della scia termica del getto sono individuate due regioni allungate a basso scambio termico che si estendono per una lunghezza di tre diametri e tendono ad allontanarsi dal piano di simmetria al crescere del rapporto di iniezione. A valle della zona di ricircolo il numero di Nusselt normalizzato aumenta nuovamente a causa del riattacco del flusso sulla parete e, a circa $x/D = 4$, le mappe presentano altre zone di minimo per lo scambio termico che tendono a scomparire al crescere di R . Ad $R = 0.75$, sebbene si riduca la regione di ricircolo, le zone di massimo ai lati del condotto raggiungono la massima estensione e la massima intensità. Per $R > 0.75$, entrambe le zone scompaiono gradualmente al crescere

del rapporto di iniezione. A $R = 1.5$ entrambe le regioni non sono più presenti e le mappe di Nu/Nu_0 raggiungono una distribuzione che è già più simile a quella ottenuta nelle mappe ad $R = 2$ piuttosto che in quelle ad $R = 1$.

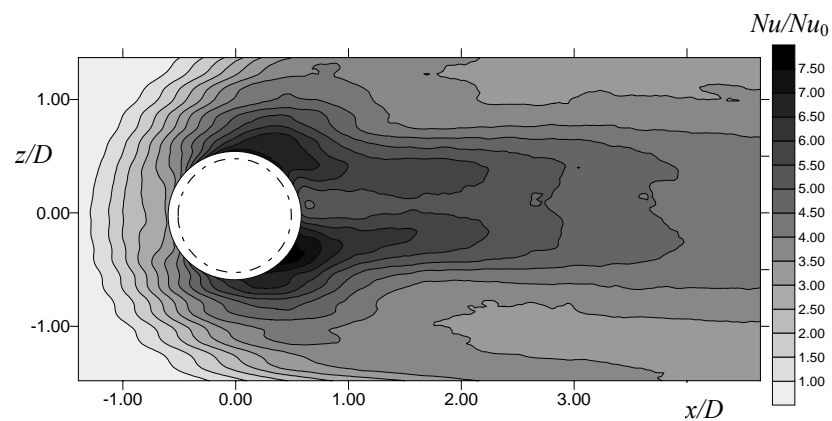
L'effetto del rapporto di iniezione sulle mappe di scambio termico è stato studiato anche per un numero di Reynolds maggiore, riscontrando per talune prove delle differenze rispetto al caso esaminato precedentemente. In Figura 11.5 sono mostrati i risultati delle misure termografiche eseguite ad un numero di Reynolds pari a 16'000 e per rapporti di iniezione compresi nell'intervallo di valori 0.5-3. Rispetto alle misure effettuate ad un numero di Reynolds inferiore, dalle mappe si evince che il numero di Nusselt normalizzato è mediamente superiore ed i maggiori incrementi si hanno nei valori massimi e minimi situati rispettivamente ai lati ed a valle del condotto di uscita.



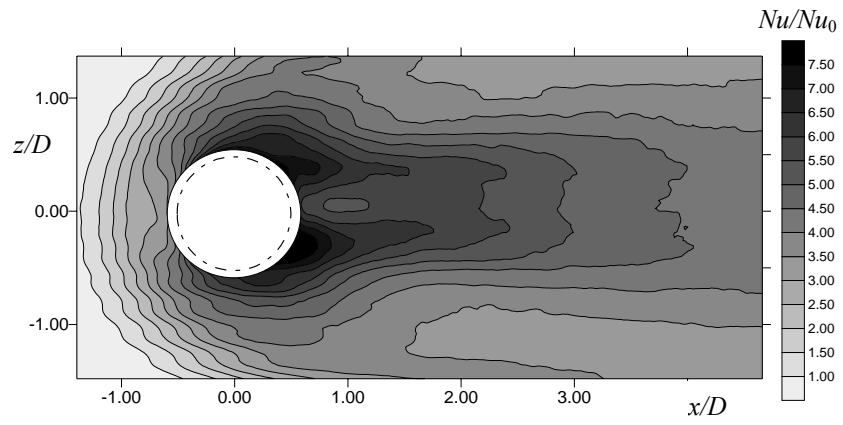
a)



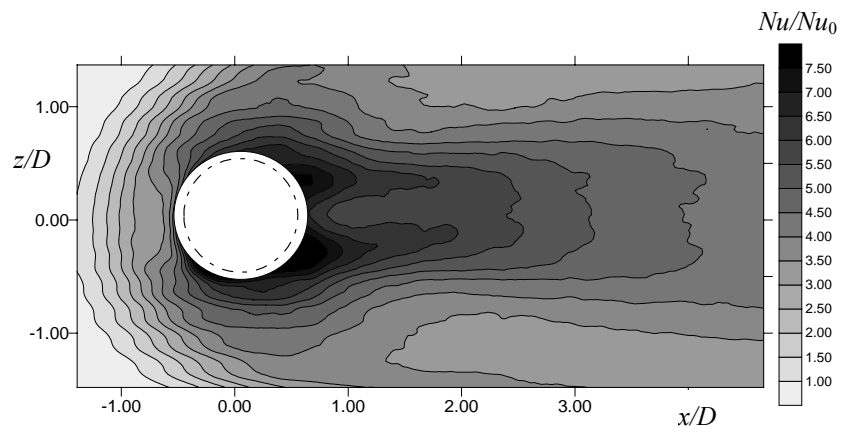
b)



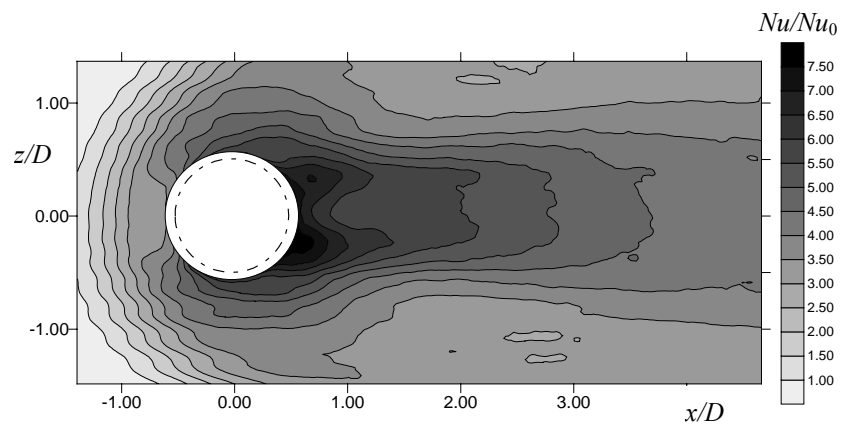
c)



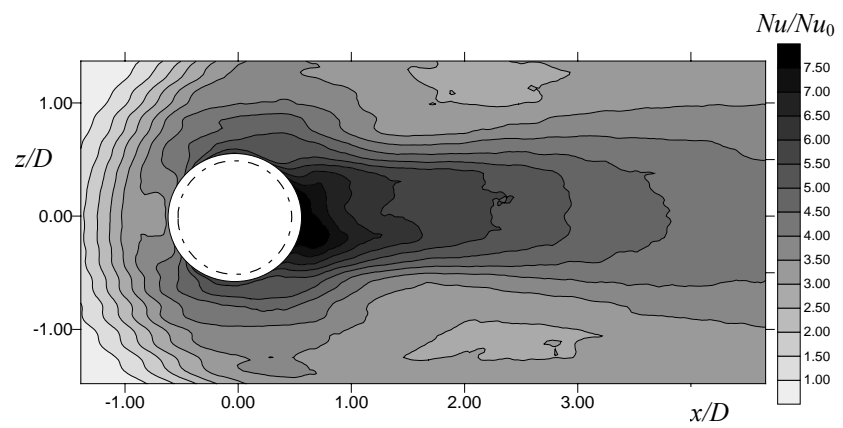
d)



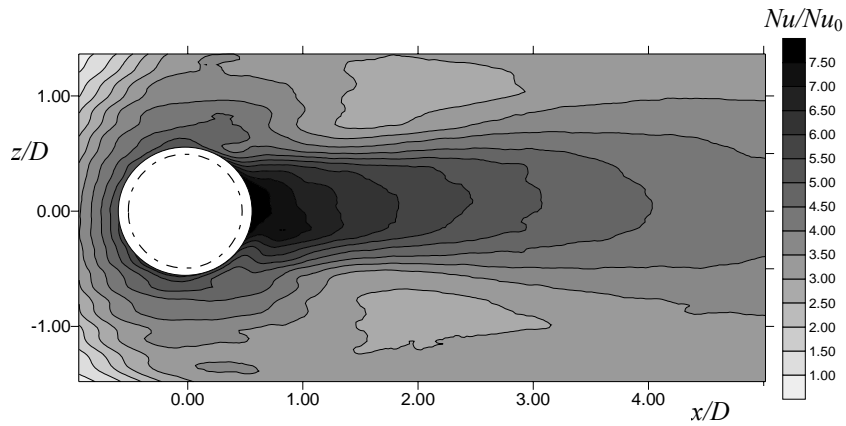
e)



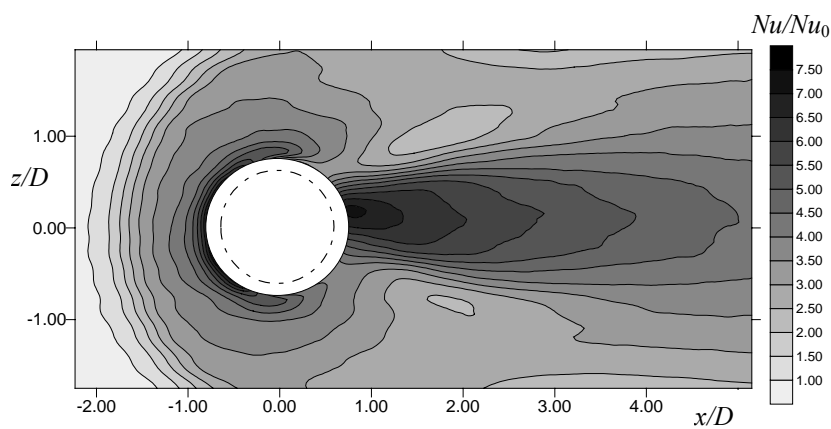
f)



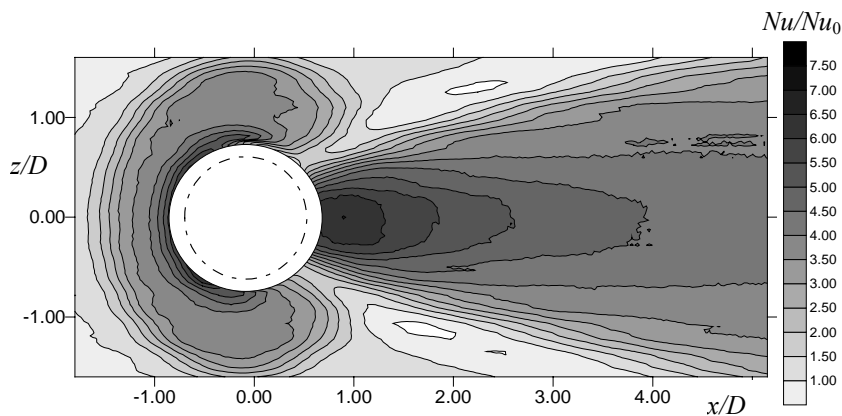
g)



h)



i)



l)

Figura 11.5 Mappe del numero di Nusselt normalizzato Nu/Nu_0 sulla parete riscaldata per $Re = 8000$: a) $R = 0.5$; b) $R = 0.75$; c) $R = 0.87$; d) $R = 1$; e) $R = 1.12$; f) $R = 1.25$; g) $R = 1.5$; h) $R = 1.75$; i) $R = 2$; l) $R = 3$. La circonferenza a tratto e punto indica la sezione di uscita del condotto mentre il cerchio bianco indica la regione in cui non sono stati riportati i dati.

L'incremento nello scambio termico che si ha al crescere del numero di Reynolds è dell'ordine del 10% per la maggior parte dei rapporti di iniezione esaminati mentre, per $R > 1.75$, l'aumento registrato in base alle mappe si riduce al 5%. Contrariamente a quanto accade ai regimi esaminati in precedenza, in questo caso la zona di ricircolo ha dimensioni piuttosto ridotte per i rapporti di iniezione compresi tra 0.5 e 1. Ciò si vede chiaramente in Figura 11.5(a-d) e, in parti-

colare, per $R = 1$ la regione è appena visibile. Per i rapporti di velocità da 1.5 a 3 le mappe di scambio termico appaiono distribuite in maniera più regolare attorno al getto e lo spostamento del massimo di Nu/Nu_0 è ancora più evidente. Inoltre, soprattutto ad $R = 3$ si nota un lieve ingrandimento delle regioni ad elevato Nu/Nu_0 poste sia a monte che ai lati del getto ed una riduzione dell'estensione delle zone a basso scambio termico poste ai bordi della scia.

12. CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente lavoro è stato quello di sviluppare tecniche di misura PIV stereoscopiche, sia per stimare in maniera accurata gli errori di allineamento tra il fascio di luce laser ed il piano di calibrazione del sistema, sia per applicare la tecnica allo studio di getti in un flusso trasversale.

Nella prima parte del lavoro è stata introdotta la tecnica di misura, descrivendo per linee generali gli aspetti caratteristici del sistema e richiamando le principali problematiche ricorrenti nella realizzazione delle misure effettuate sia con tecnica PIV a due componenti, sia con tecnica PIV stereoscopica. In particolare, ci si è soffermati sui due metodi utilizzati per le misure: il metodo con mappatura tridimensionale ed il metodo con ricostruzione geometrica delle tre componenti. Partendo dalle formule di ricostruzione utilizzate nel secondo metodo citato, sono state derivate formule teoriche degli errori di allineamento, dovuti al posizionamento non corretto del piano di luce laser rispetto al piano di calibrazione, in funzione dei parametri geometrici e del campo di moto in esame.

L'analisi degli errori è stata effettuata per un campo di spostamento uniforme e per un campo di spostamento non uniforme, soffermandosi in particolare su un campo di spostamento dovuto ad una rotazione rigida nella regione di misura. Per ciascuna delle due tipologie di spostamento si è ricavata, per le tre componenti del campo di moto, l'espressione dell'errore dovuto ad una traslazione, ad una rotazione o ad una posizione generica del piano di luce nella regione di misura.

Nelle configurazioni di misura comunemente adottate per le tecniche stereoscopiche, in presenza di un campo di moto uniforme e per errori di posizione (dovuti sia ad una traslazione che ad una rotazione del piano) inferiori a 5mm , l'errore di allineamento è inferiore al 2%. In presenza di gradienti spaziali nel campo di spostamento, l'errore può raggiungere valori elevati anche per una rotazione del piano di misura di 0.5° ed una traslazione di 1mm .

Le espressioni degli errori ricavate in maniera geometrica sono state verificate sperimentalmente imponendo opportuni spostamenti mediante slitte micrometriche traslazionali e rotazionali. Queste ultime sono state utilizzate per generare il campo di spostamento rotatorio e, perciò, per verificare gli errori di allineamento in presenza di un campo di moto non uniforme. I risultati ottenuti sono in accordo con i valori dedotti in maniera teorica e, soltanto per la componente di spostamento ortogonale al piano di misura, nel caso di un moto non uniforme, i valori sperimentali sono in disaccordo significativo. L'elevata incertezza nella misura della terza componente, in questo caso, non ha permesso di ricavare misure attendibili, per ottenere le quali sarebbe necessario effettuare una media su un campione numeroso di campi di spostamento.

I risultati ottenuti dall'analisi degli errori offrono la possibilità di stabilire in maniera accurata l'ordine di grandezza degli errori in gioco una volta nota la posizione relativa del piano di misura rispetto a quello di calibrazione. Le formule ricavate, pur essendo limitate ad una disposizione simmetrica delle telecamere, consentono di estrapolare i risultati anche ad agli altri tipi di configurazioni. Per ragioni di tempo non è stato possibile verificare l'andamento degli errori su un flusso reale e ciò è quanto ci si propone di fare in futuro. In un passo successivo, come accennato nel lavoro, si può pensare di correggere gli errori di allineamento stimando la posizione effettiva del piano di misura e, successivamente, effettuare la correzione con le formule proposte. Altre tecniche sono comunque possibili a seconda del metodo di ricostruzione stereoscopica utilizzato.

Nella seconda parte del lavoro riguardante le misure sul getto in un flusso trasversale, si è effettuato uno studio comparato tra le mappe di scambio termico convettivo sulla parete da cui fuoriesce il getto e le statistiche del flusso in prossimità di essa e nel piano di simmetria per il flusso. Le prove sono state effettuate per rapporti di iniezione variabili da 0.5 a 5 e per numeri di Reynolds, riferiti al diametro di uscita del condotto ed alla velocità del flusso trasversale, nell'intervallo di valori compresi tra 1000 e 16'000. Le misure di scambio termico sono state ef-

fettuate utilizzando tecniche basate sulla termografia all'infrarosso, le prove sulle statistiche del flusso sono state effettuate con PIV a due componenti e PIV stereoscopica. I risultati ottenuti sono coerenti con l'ampia mole di dati disponibile in letteratura. In questa fase ci si è limitati ad un'analisi principalmente qualitativa sul legame tra lo scambio termico e le caratteristiche fluidodinamiche del fluido sia in termini di campo di moto, sia in termini di statistiche del flusso.

Nella regione di scia del getto si è osservato che lo scambio termico è influenzato dall'andamento dell'energia cinetica turbolenta del fluido mentre, nelle regioni laterali del getto, il campo di moto medio sembra essere il maggiore responsabile della distribuzione delle temperature superficiali sulla parete. Al crescere del rapporto di iniezione la distribuzione delle mappe del numero di Nusselt normalizzato cambiano notevolmente nelle regione sottovento del getto passando da una situazione con un minimo nelle mappe, evidente soprattutto ad $R = 0.5$ e dovuto alla regione di ricircolo, ad una situazione con un massimo che è influenzato dalla coppia di vortici contro-rotanti. Questa struttura vorticoso è la maggiore responsabile delle variazioni nelle statistiche del flusso e nelle mappe di scambio termico prodotte dalla variazione del numero di Reynolds.

Dopo aver analizzato in dettaglio le mappe ottenute con le due tecniche di misura, in prospettiva futura si può pensare di cercare correlazioni empiriche tra le mappe di scambio termico convettivo e le statistiche del flusso in prossimità della parete. Per avere statistiche sul flusso attendibile è, però, necessario ottenere misure PIV più accurate. Ciò è realizzabile soltanto se si abbatta la rumorosità nelle misure vicino alla parete connesse ai limiti dell'apparato sperimentale e si riducono gli errori di misura presenti nella tecnica stereoscopica, tra i quali rientrano anche gli errori di allineamento tra il piano di misura e quello di calibrazione.

APPENDICE A: Statistiche di insieme del campione tracciante

Di seguito sono calcolate le statistiche di insieme del campione tracciante definito nel capitolo 2. Cominciamo con l'osservare che la funzione densità di probabilità $\rho(\underline{\Gamma}, t)$, associata alla probabilità di trovare l'insieme di N particelle nel volume V nello stato $\underline{\Gamma}$ ed al tempo t , gode della seguente proprietà:

$$\int_{[\underline{V}]^N} \rho(\underline{\Gamma}, t) d\underline{\Gamma} = 1. \quad (\text{A.1})$$

Nel caso le particelle traccianti siano uniformemente distribuite in un flusso incompressibile, in base alla (A.1), si ha:

$$\rho(\underline{\Gamma}, t) = V^{-N}. \quad (\text{A.2})$$

La media di insieme del campione tracciante è data da:

$$\begin{aligned} \langle G(\underline{X}, t) \rangle &= \int G(\underline{\Gamma}) \rho(\underline{\Gamma}) d\underline{\Gamma} = \int \cdots \int \sum_{i=1}^N \delta[\underline{X} - \underline{X}_i] V^{-N} d\underline{X}_1 \cdots d\underline{X}_N = \\ &= \frac{N}{V^N} \int \delta[\underline{X} - \underline{X}_1] d\underline{X}_1 \int \cdots \int d\underline{X}_2 \cdots d\underline{X}_N = \frac{N}{V^N} V^{N-1} = \frac{N}{V} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e la conseguente statistica del secondo ordine diventa:

$$\begin{aligned} \langle G(\underline{X}', t') G(\underline{X}'', t'') \rangle &= \int \cdots \int \sum_{i=1}^N \delta[\underline{X}' - \underline{X}_i] \sum_{j=1}^N \delta[\underline{X}'' - \underline{X}_j - \underline{D}(\underline{X}_j)] V^{-N} d\underline{X}_1 \cdots d\underline{X}_N = \\ &= \int \cdots \int \sum_{i=j} \delta[\underline{X}' - \underline{X}_i] \delta[\underline{X}'' - \underline{X}_i - \underline{D}(\underline{X}_i)] V^{-N} d\underline{X}_1 \cdots d\underline{X}_N + \\ &+ \int \cdots \int \sum_{i \neq j} \delta[\underline{X}' - \underline{X}_i] \delta[\underline{X}'' - \underline{X}_j - \underline{D}(\underline{X}_j)] V^{-N} d\underline{X}_1 \cdots d\underline{X}_N = \\ &= \frac{N}{V^N} \int \delta[\underline{X}' - \underline{X}_1] \delta[\underline{X}'' - \underline{X}_1 - \underline{D}(\underline{X}_1)] d\underline{X}_1 \int \cdots \int d\underline{X}_2 \cdots d\underline{X}_N + \\ &+ \frac{N^2 - N}{V^N} \int \delta[\underline{X}' - \underline{X}_1] \delta[\underline{X}'' - \underline{X}_2 - \underline{D}(\underline{X}_2)] d\underline{X}_2 d\underline{X}_1 \int \cdots \int d\underline{X}_3 \cdots d\underline{X}_N = \\ &= \frac{N}{V} \delta[\underline{X}'' - \underline{X}' - \underline{D}(\underline{X}'; t', t'')] + \frac{N^2 - N}{V^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove $\underline{D}(\underline{X}'; t', t'')$ è il campo di spostamento. Nel limite per N e $V \rightarrow \infty$ con $N/V = C$ costante, le (A.3) e (A.4) diventano rispettivamente:

$$\langle G(\underline{X}, t) \rangle = C \quad (\text{A.5})$$

$$\langle G(\underline{X}', t') G(\underline{X}'', t'') \rangle = C \delta[\underline{X}'' - \underline{X}' - \underline{D}(\underline{X}'; t', t'')] + C^2. \quad (\text{A.6})$$

APPENDICE B: Statistiche di insieme delle immagini PIV

In questa sezione ci si propone di ricavare le espressioni delle statistiche di insieme del primo e del secondo ordine delle immagini PIV.

B.1. Media

Cominciamo con l'osservare che la media di insieme $\langle I(x, y) \rangle$ si può esprimere in funzione della media di insieme $\langle g(x, y) \rangle$ del campione tracciante sull'immagine:

$$\langle I(x, y) \rangle = \langle I_Z t(x, y) * g(x, y) \rangle = I_Z t(x, y) * \langle g(x, y) \rangle. \quad (B.1)$$

Ricordando la definizione di g e tenendo conto della (A.5), la media di insieme di $g(x, y)$ può essere facilmente calcolata:

$$\langle g(x, y) \rangle = \left\langle \frac{1}{M^2} \int \frac{I_o(Z)}{I_Z} G\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}, Z\right) dZ \right\rangle = \frac{1}{M^2} \int \frac{I_o(Z)}{I_Z} \left\langle G\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}, Z\right) \right\rangle dZ = \frac{CAZ'}{M^2}, \quad (B.2)$$

dove

$$\Delta Z' = \frac{1}{I_Z} \int I_o(Z) dZ. \quad (B.3)$$

Per un profilo Gaussiano si ha $\Delta Z' = 0.63 \Delta Z_0$. Sostituendo la (B.3) nella (B.1) si ottiene l'espressione cercata:

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{1}{M^2} I_Z t_0 CAZ', \quad (B.4)$$

con

$$t_0 = \iint t(x, y) dx dy. \quad (B.5)$$

Si noti che, in base alla (B.4), la media $\langle I(x, y) \rangle$ risulta invariante rispetto allo spazio e al tempo.

B.2. Autocovarianza

Si definisce autocovarianza di insieme dell'immagine $I(x, y)$ la quantità:

$$C_I(x', y'; x'', y'') = \langle I(x', y') I(x'', y'') \rangle - \langle I(x', y') \rangle \langle I(x'', y'') \rangle. \quad (B.6)$$

In base alla (B.4) si ricava che:

$$\langle I(x', y') \rangle \langle I(x'', y'') \rangle = \left[\frac{1}{M^2} I_Z t_0 CAZ' \right]^2 \quad (B.7)$$

per cui, per ottenere l'espressione della funzione di autocovarianza è sufficiente calcolare la statistica $\langle I(x', y') I(x'', y'') \rangle$. Quest'ultima può essere espressa in funzione della corrispondente statistica del campione tracciante $g(x, y)$ per mezzo della relazione:

$$\begin{aligned} \langle I(x', y') I(x'', y'') \rangle &= I_Z^2 \langle t(x', y') * g(x', y') \cdot t(x'', y'') * g(x'', y'') \rangle = \\ &= I_Z^2 \iint t(x' - u', y' - v') \iint t(x'' - u'', y'' - v'') \langle g(u', v') g(u'', v'') \rangle du'' dv'' du' dv'. \end{aligned} \quad (B.8)$$

La statistica del secondo ordine di $g(x, y)$, tenendo conto della (A.6), è data da:

$$\begin{aligned} \langle g(u', v') g(u'', v'') \rangle &= \left\langle \frac{1}{M^4 I_Z^2} \iint I_o(Z') I_o(Z'') G\left(\frac{u'}{M}, \frac{v'}{M}, Z'\right) G\left(\frac{u''}{M}, \frac{v''}{M}, Z''\right) dZ' dZ'' \right\rangle = \\ &= \frac{1}{M^4 I_Z^2} \iint I_o(Z') I_o(Z'') \left\langle G\left(\frac{u'}{M}, \frac{v'}{M}, Z'\right) G\left(\frac{u''}{M}, \frac{v''}{M}, Z''\right) \right\rangle dZ' dZ'' = \\ &= \frac{1}{M^4 I_Z^2} \iint I_o(Z') I_o(Z'') \left[C \delta\left(\frac{u'' - u'}{M}, \frac{v'' - v'}{M}, Z'' - Z'\right) + C^2 \right] dZ' dZ'' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{M^2 I_Z^2} \left[\int I_o^2(Z) dZ \right] C \delta(u'' - u', v'' - v') + \frac{1}{M^4 I_Z^2} \left[\int I_o(Z) dZ \right]^2 C^2 = \\
 &= \frac{1}{M^2} \Delta Z'' C \delta(u'' - u', v'' - v') + \frac{1}{M^4} C^2 (\Delta Z')^2
 \end{aligned} \quad (B.9)$$

con

$$\Delta Z'' = \frac{1}{I_Z^2} \int I_o^2(Z) dZ. \quad (B.10)$$

Per un profilo Gaussiano si ha $\Delta Z'' = 0.44 \Delta Z_0$. Sostituendo la (B.9) nella (B.8) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \langle I(x', y') \rangle \langle I(x'', y'') \rangle &= \frac{I_Z^2}{M^4} \iint t(x' - u', y' - v') \iint t(x'' - u'', y'' - v'') \cdot \\
 &\cdot \left[M^2 \Delta Z'' C \delta(u'' - u', v'' - v') + C^2 (\Delta Z')^2 \right] du' dv' du'' dv'' = \\
 &= \frac{I_Z^2}{M^2} \left[\iint t(x' - u', y' - v') t(x'' - u'', y'' - v'') du' dv' \right] C \Delta Z'' + \frac{I_Z^2}{M^4} \left[\iint t(u, v) du dv \right]^2 C^2 = \\
 &= \frac{I_Z^2}{M^2} C \Delta Z'' t_0^2 F_t(x'' - x', y'' - y') + \left[\frac{1}{M^2} I_Z t_0 C \Delta Z' \right]^2
 \end{aligned} \quad (B.11)$$

con

$$F_t(x, y) = \frac{1}{t_0^2} \iint t(u, v) t(u + x, v + y) du dv. \quad (B.12)$$

Sostituendo la (B.11) e la (B.7) nella (B.6) il secondo termine della (B.11) si elimina, ottenendo:

$$C_I(x', y'; x'', y'') = I_Z^2 M^{-2} C \Delta Z'' t_0^2 F_t(x'' - x', y'' - y'). \quad (B.13)$$

Si noti che la funzione di autocorrelazione dell'immagine risulta invariante rispetto al tempo e rispetto alle traslazioni. Quest'ultima proprietà consente di riscrivere la (B.13) nella forma più compatta:

$$C_I(\underline{s}) = I_Z^2 M^{-2} C \Delta Z'' t_0^2 F_t(\underline{s}) \quad (B.14)$$

dove con $\underline{s} = (x'' - x', y'' - y')$ si è indicata il vettore spostamento tra i due punti i cui è calcolata l'autocorrelazione statistica.

B.3. Mutua covarianza

Si definisce funzione di mutua covarianza di insieme delle realizzazioni $I'(x, y)$ ed $I''(x, y)$ di $I(x, y)$ agli istanti t' e t'' rispettivamente la quantità:

$$C_{I'I''}(x', y'; x'', y'') = \langle I'(x', y') I''(x'', y'') \rangle - \langle I'(x', y') \rangle \langle I''(x'', y'') \rangle. \quad (B.15)$$

Procedendo nella stessa maniera utilizzata per il calcolo della funzione di autocorrelazione, per il secondo termine della (B.15) si ottiene:

$$\langle I'(x', y') \rangle \langle I''(x'', y'') \rangle = \left[\frac{1}{M^2} I_Z t_0 C \Delta Z' \right]^2 \quad (B.16)$$

e, analogamente alla (B.8), si ha:

$$\begin{aligned}
 \langle I'(x', y') \rangle \langle I''(x'', y'') \rangle &= I_Z^2 \langle t(x', y') * g'(x', y') \cdot t(x'', y'') * g''(x'', y'') \rangle = \\
 &= I_Z^2 \iint t(x' - u', y' - v') \iint t(x'' - u'', y'' - v'') \langle g'(u', v') g''(u'', v'') \rangle du' dv' du'' dv''.
 \end{aligned} \quad (B.17)$$

La statistica congiunta del secondo ordine di $g'(x, y)$ e $g''(x, y)$ è data da:

$$\begin{aligned}
 \langle g(u', v') g(u'', v'') \rangle &= \frac{1}{M^4 I_Z^2} \iint I_o(Z') I_o(Z'') \left\langle G\left(\frac{u''}{M}, \frac{v''}{M}, Z''\right) G\left(\frac{u''}{M}, \frac{v''}{M}, Z''\right) \right\rangle dZ' dZ'' = \\
 &= \frac{1}{M^4 I_Z^2} \iint I_o(Z') I_o(Z'') \left[C \delta\left(\frac{u'' - u'}{M} - D_x, \frac{v'' - v'}{M} - D_y, Z'' - Z' - D_z\right) + C^2 \right] dZ' dZ''
 \end{aligned} \quad (B.18)$$

con $\underline{D} = (D_x, D_y, D_z)$. A rigore, il campo di spostamento è una funzione di u', v' e Z' . Supponendo, come è lecito assumero, \underline{D} costante, la (B.18) diventa:

$$\begin{aligned} & \langle g(u', v') g(u'', v'') \rangle = \\ & = \frac{1}{M^4 I_z^2} \left[\int I_o(Z) I_o(Z + D_z) dZ \right] C \delta \left(\frac{u'' - u'}{M} - D_x, \frac{v'' - v'}{M} - D_y \right) + \frac{1}{M^4 I_z^2} \left[\int I_o(Z) dZ \right]^2 C^2 = \\ & = \frac{1}{M^4} \Delta Z'' F_o(D_z) C \delta \left(\frac{u'' - u'}{M} - D_x, \frac{v'' - v'}{M} - D_y \right) + \frac{1}{M^4} C^2 (\Delta Z')^2 \end{aligned} \quad (B.19)$$

con

$$F_o(D_z) = \frac{\int I_o(Z) I_o(Z + D_z) dZ}{\int I_o^2(Z) dZ}. \quad (B.20)$$

La funzione definita dalla (B.20) rappresenta, come è noto, la perdita di particelle corrispondenti sull'immagine dovuta alla componente del flusso ortogonale al piano di luce laser. Tenendo conto della (B.2) e, indicando rispettivamente con $\underline{s} = (u'' - u', v'' - v')/M$ e con $\underline{s}_D = M(D_x, D_y)$ la distanza tra i punti in cui è valutata la mutua covarianza e lo spostamento delle particelle sul piano immagine, è possibile ricavare l'espressione della mutua covarianza dei campioni traccianti $g'(x, y)$ e $g''(x, y)$:

$$C_{g'g''}(\underline{s}) = M^{-2} F_o(D_z) \cdot C \Delta Z'' \cdot \delta(\underline{s} - \underline{s}_D). \quad (B.21)$$

Sostituendo, invece, la (B.19) nella (B.17) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \langle I'(x', y') \rangle \langle I''(x'', y'') \rangle = \frac{I_z^2}{M^4} \iint t(x' - u', y' - v') \iint t(x'' - u'', y'' - v'') \cdot \\ & \cdot \left[C \Delta Z'' F_o(D_z) \delta \left(\frac{u'' - u'}{M} - D_x, \frac{v'' - v'}{M} - D_y \right) + C^2 (\Delta Z')^2 \right] du' dv' du'' dv'' = \\ & = \frac{I_z^2}{M^2} C \Delta Z'' F_o(D_z) \iint t(x' - u', y' - v') t(x'' - u'' - MD_x, y'' - v'' - MD_y) du' dv' + \\ & \quad + \frac{I_z^2}{M^4} \left[\iint t(u, v) du dv \right]^2 C^2 = \\ & = \frac{I_z^2}{M^2} C \Delta Z'' t_0^2 F_o(D_z) F_t(x'' - x' - MD_x, y'' - y' - MD_y) + \left[\frac{1}{M^2} I_z t_0 C \Delta Z' \right]^2. \end{aligned} \quad (B.22)$$

Si noti che anche nel ricavare la (B.22) si è assunto che gli spostamenti D_x e D_y siano indipendenti da u', v' e Z' . Sostituendo la (B.22) nella (B.15), effettuando le dovute semplificazioni, si ottiene la seguente espressione:

$$C_{I'I''}(x', y'; x'', y'') = I_z^2 M^{-2} C \Delta Z'' F_o(D_z) t_0^2 F_t(x'' - x' - MD_x, y'' - y' - MD_y). \quad (B.23)$$

Anche in questo caso, la (B.23) si può scrivere in forma più compatta in funzione degli spostamenti \underline{s} ed \underline{s}_D :

$$C_{I'I''}(\underline{s}) = I_z^2 M^{-2} C \Delta Z'' F_o(D_z) t_0^2 F_t(\underline{s} - \underline{s}_D). \quad (B.24)$$

Confrontando la (B.24) con la (B.14) si può esprimere la mutua covarianza in funzione dell'autocorrelazione dell'immagine, ottenendo:

$$C_{I'I''}(\underline{s}) = F_o(D_z) C_I(\underline{s} - \underline{s}_D) = F_o(D_z) C_I * \delta(\underline{s} - \underline{s}_D). \quad (B.25)$$

La mutua covarianza risulta, pertanto, proporzionale al valore dell'autocovarianza traslata di una quantità pari allo spostamento delle particelle sull'immagine ed il fattore di proporzionalità è dato da F_o . In definitiva, lo spostamento delle particelle nel piano di luce laser si determina individuando il baricentro della funzione $C_{I'I''}$.

APPENDICE C: Analisi digitale di immagini PIV

In questa sezione sono trattati più in dettaglio alcuni degli aspetti connessi all'analisi di immagini PIV digitali.

C.1. Statistiche delle immagini PIV discrete

Note le statistiche delle immagini PIV continue, è possibile calcolare le statistiche delle immagini discrete. Indicando con $I[i, j]$ l'immagine discreta, con $I(x, y)$ l'immagine continua e con $p(x, y)$ la funzione di campionamento, si ha che:

$$\begin{aligned}\langle I[i, j] \rangle &= \left\langle \iint p(x - id_r, y - jd_r) I(x, y) dx dy \right\rangle = \iint p(x - id_r, y - jd_r) \langle I(x, y) \rangle dx dy = \\ &= \langle I(x, y) \rangle \iint p(x - id_r, y - jd_r) dx dy = \langle I(x, y) \rangle,\end{aligned}\quad (C.1)$$

per cui l'intensità media di un'immagine discreta coincide con l'intensità media di quella continua. In maniera analoga si può ottenere l'autocovarianza dell'immagine discreta in funzione di quella continua:

$$C_I[i, j; k, l] = \iint p(x' - id_r, y' - jd_r) \iint p(x'' - kd_r, y'' - ld_r) C_I(x', y'; x'', y'') dx' dy' dx'' dy''. \quad (C.2)$$

Poiché la funzione di autocovarianza di $I(x, y)$ è invariante rispetto alle traslazioni, si può riscrivere la $C_I(x', y'; x'', y'')$ come $C_I(u, v)$, avendo posto $u = x'' - x'$ e $v = y'' - y'$. Con dette posizioni, la (C.2) diventa:

$$C_I[i, j; k, l] = \{\Phi_{pp} * C_I\}(kd_r - id_r, ld_r - jd_r) \quad (C.3)$$

con

$$\Phi_{pp}(u, v) = \iint p(x, y) p(u - x, v - y) dx dy. \quad (C.4)$$

Nel caso in cui la funzione p sia costante su ogni pixel, la Φ_{pp} assume la forma di una piramide quadrilatera di base pari a $2d_r$. Si noti che anche la funzione di autocovarianza dell'immagine discreta risulta invariante per traslazioni e, di conseguenza, rappresenta un campo casuale omogeneo. In base a quest'ultima osservazione, la (C.3) si può perciò riscrivere come:

$$C_I[r, s] = \{\Phi_{pp} * C_I\}(rd_r, sd_r). \quad (C.5)$$

Per $d_l/d_r = 0$, la funzione di covarianza $R_I[r, s]$ è data da Φ_{pp} e diventa pari a zero nelle regioni adiacenti al punto $[0, 0]$. Per tutti i valori non nulli di d_l/d_r , come accade nella pratica, la funzione di covarianza occupa più di un pixel e ciò consente di effettuare la stima frazionaria dello spostamento.

La relazione tra $C_{I''}[i, j; k, l]$ e $C_{I''}(x', y'; x'', y'')$ è praticamente identica a quella tra l'autocorrelazione discreta e quella continua data dalla (C.2):

$$\begin{aligned}C_{I''}[i, j; k, l] &= \langle I'[i, j] I''[k, l] \rangle - \langle I'[i, j] \rangle \langle I''[k, l] \rangle = \\ &= \iint p(x' - id_r, y' - jd_r) \iint p(x'' - kd_r, y'' - ld_r) C_{I''}(x', y'; x'', y'') dx' dy' dx'' dy''.\end{aligned}\quad (C.6)$$

La principale differenza risiede nel fatto che, a differenza della (C.2), la $C_{I''}(x', y'; x'', y'')$ in linea di principio non è invariante rispetto alle traslazioni. Come è stato già fatto precedentemente, si assume che la funzione di mutua covarianza sia con buona approssimazione invariante rispetto alle traslazioni ciò consente di sostituire l'espressione (B.23) nella (C.6), ottenendo con un cambiamento di variabili:

$$\begin{aligned}C_{I''}[i, j; k, l] &= \iint p(x', y') \iint p(x'', y'') \cdot \\ &F_O(D_Z) C_I(x'' - x' + kd_r - id_r - MD_X, y'' - y' + ld_r - jd_r - MD_Y) dx' dy' dx'' dy''.\end{aligned}\quad (C.7)$$

Poiché le variabili di integrazione compaiono soltanto come differenze nella (C.7), è possibile ricondursi ad un'espressione analoga alla (C.3):

$$C_{I''}[i, j; k, l] = F_O(D_Z) \{\Phi_{pp} * C_I\}(kd_r - id_r - MD_X, ld_r - jd_r - MD_Y) \quad (C.8)$$

che, nella forma più compatta, si scrive:

$$C_{I''}[r, s] = F_O(D_Z) \{ \Phi_{pp} * C_I \} (rd_r - MD_X, sd_r - MD_Y). \quad (C.9)$$

Si osservi che, non esplicitando la dipendenza della funzione di mutua covarianza dalla funzione di autocovarianza, il legame tra la mutua covarianza di immagini discrete e quella riferita ad immagini continue è analogo a quello fornito dalla (C.5):

$$C_{I''}[r, s] = \{ \Phi_{pp} * C_{I''} \} (rd_r, sd_r). \quad (C.10)$$

C.2. Stima dell'intensità media dell'immagine

Per la stima della media spaziale dell'immagine I_{ij} su una regione quadrata di $N \times N$ pixel si utilizza lo stimatore³⁰:

$$\bar{I} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_{i,j}. \quad (C.11)$$

Il valore atteso e la varianza di \bar{I} sono dati rispettivamente da (Priestley, 1992):

$$E[\bar{I}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[I_{i,j}] = \langle I \rangle \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{I}] &= E[(\bar{I} - \langle I \rangle)^2] = \frac{1}{N^4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_I[k-i, l-j] = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) C_I[r, s]. \end{aligned} \quad (C.13)$$

Per un campione di dimensioni finite (N piccolo) I_{ij} e \bar{I} sono correlate e la loro covarianza è data da:

$$\text{cov}[I_{i,j}, \bar{I}] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_I[k-i, l-j]. \quad (C.14)$$

Per immagini PIV con dimensioni delle immagini delle particelle piccole ($d_i/d_r \approx 1$) $C_I[r, s]$ è praticamente trascurabile per $[r, s] \neq [0, 0]$, per cui le (C.13) e (C.14) diventano:

$$\text{var}[\bar{I}] \approx \frac{1}{N^2} C_I[0, 0] \text{ e } \text{cov}[I_{i,j}, \bar{I}] = \frac{1}{N^2} C_I[0, 0]. \quad (C.15)$$

Le (C.12) e (C.15) mostrano che la (C.12) costituisce uno stimatore corretto e consistente dell'intensità media dell'immagine.

C.3. Stima della mutua covarianza

La mutua covarianza di immagini PIV di $N \times N$ pixel per uno spostamento $[r, s]$ si può stimare con la relazione:

$$\hat{C}_{I''}[r, s] = \frac{1}{N^2} \sum_i^{N-|r|} \sum_j^{N-|s|} \Delta I'_{i,j} \Delta I''_{i+r, j+s} \quad (C.16)$$

con

$$\Delta I'_{i,j} = I'_{i,j} - \langle I \rangle, \quad \Delta I''_{i,j} = I''_{i,j} - \langle I \rangle \quad (C.17)$$

e con

$$\sum_i^{N-|r|} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N-r} & \text{per } r \geq 0 \\ \sum_{i=1-r}^N & \text{per } r < 0 \end{cases} \quad (C.18)$$

³⁰ D'ora in avanti, salvo avviso contrario, per non appesantire la notazione si indicherà l'intensità dell'immagine discreta nel generico pixel $I[i, j]$ con il simbolo $I_{i,j}$.

Poiché in generale non si conosce a priori il valore di $\langle I \rangle$, è necessario stimarlo dall'immagine registrata. Ciò implica che lo stimatore di mutua covarianza è legato alla media dell'intensità dell'immagine. Se però si stima la media dell'intensità su tutta l'immagine di dimensioni $M \times M$ e la covarianza soltanto sulla finestra di interrogazione $N \times N$, con $M \gg N$, detta correlazione può essere trascurata. Infatti, in base alla (C.15) si ha che:

$$\text{var}[\bar{I}] \approx O\left(\frac{1}{M^2}\right) \text{ e } \text{cov}[\Delta I_{i,j}, \bar{I}] = O\left(\frac{1}{M^2}\right) \quad (\text{C.19})$$

mentre, come si vedrà tra breve, il rumore dello stimatore di mutua correlazione dato dalla (C.16) è di ordine $(1/N^2)$.

Il valore atteso dello stimatore (C.16) fornisce:

$$\begin{aligned} E\{\hat{C}_{II'}[r,s]\} &= \frac{1}{N^2} \sum_i^{N-|r|} \sum_j^{N-|s|} E\{\Delta I'_{i,j} \Delta I''_{i+r,j+s}\} = \frac{1}{N^2} \sum_i^{N-|r|} \sum_j^{N-|s|} C_{II'}[r,s] = \\ &= \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) C_{II'}[r,s] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

da cui si deduce che lo stimatore non è polarizzato soltanto per $N \rightarrow \infty$. La covarianza dello stimatore è, invece, data da:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{C}_{II'}[r,s], \hat{C}_{II'}[r+t,s+u]\} &= \\ = E\{\hat{C}_{II'}[r,s] \hat{C}_{II'}[r+t,s+u]\} - E\{\hat{C}_{II'}[r,s]\} E\{\hat{C}_{II'}[r+t,s+u]\}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Esplicitando le espressioni al secondo membro si può giungere ad una formulazione piuttosto complessa in termini di mutua covarianza delle due immagini. Trascurando i contributi del cumulante del quarto ordine della distribuzione congiunta di $\Delta I'$ e $\Delta I''$ e limitando l'analisi al caso in cui N sia sufficientemente grande si ottiene l'espressione semplificata (vedi Westerweel, 1993):

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{C}_{II'}[r,s], \hat{C}_{II'}[r+t,s+u]\} &\approx \\ \approx \frac{1}{N^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_I[m,n] C_I[m+t,n+u] + C_{II'}[m+r,t,n+s+u] C_{II'}[r-m,s-n]\}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Ponendo nella (C.22) $t = 0$ e $u = 0$, si ottiene l'espressione della varianza dello stimatore di mutua covarianza:

$$\text{var}\{\hat{C}_{II'}[r,s]\} \approx \frac{1}{N^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{C_I^2[m,n] + C_{II'}[m+r,n+s] C_{II'}[r-m,s-n]\}. \quad (\text{C.23})$$

Le condizioni per cui N si considera sufficientemente grandi sono le seguenti:

$$N \gg d_t/d_r \text{ e } |r|, |s| \ll N. \quad (\text{C.24})$$

La prima delle (C.24) implica che il picco di correlazione corrispondente allo spostamento sia abbastanza stretto da poter ritenere $C_I[r,s] \approx 0$ per $r \neq 0$ ed $s \neq 0$. Se, inoltre, si assume per semplicità che $F_O \approx 1$ e che lo spostamento delle particelle sul piano immagine sia pari ad un numero intero di pixel, la funzione di mutua covarianza è una copia traslata della funzione di autocovarianza. Sotto le suddette ipotesi le (C.23), (C.24) diventano rispettivamente:

$$\text{cov}\{\hat{C}_{II'}[r,s], \hat{C}_{II'}[r+t,s+u]\} \approx 0 \quad (\text{C.25})$$

$$\text{var}\{\hat{C}_{II'}[r,s]\} \approx \frac{1}{N^2} C_I[0,0] \quad (\text{C.26})$$

per cui il rumore nella stima di $C_{II'}[r,s]$ è incorrelato ed è proporzionale ad $1/N^2$. In definitiva, il risultato della (C.16) è costituito da un picco dominante

$$E\{\hat{C}_{II'}[r,s]\} \gg \text{var}\{\hat{C}_{II'}[r,s]\}^{1/2} \quad (\text{C.27})$$

che è associato al picco di correlazione della $C_{II'}[r,s]$ ed emerge su un rumore di fondo che ha le caratteristiche di un campo casuale bianco.

C.4. Funzioni di peso

Nell'analisi precedente si è assunto che ciascun pixel ΔI_{ij} contribuisca allo stesso modo alla stima della covarianza. Poiché in alcuni casi è indispensabile imporre un peso diverso a ciascun pixel, è utile valutare l'effetto delle funzioni di peso sulla stima della mutua covarianza.

Supponendo di moltiplicare $\Delta I'_{ij}$ e $\Delta I''_{ij}$ per una funzione di peso indicata con W_{ij} , l'espressione dello stimatore della mutua covarianza discreta diventa:

$$\hat{C}_{I'I''}[r, s] = \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_n^{N-|r|, N-|s|} W_{m,n} \Delta I'_{m,n} W_{m+r, n+s} \Delta I''_{m+r, n+s} . \quad (C.28)$$

Essendo $\Delta I'_{ij}$ e $\Delta I''_{ij}$ campi casuali omogenei a media nulla, il valore atteso della (C.28) è fornito dalla realzione:

$$E\{\hat{C}_{I'I''}[r, s]\} = F_I[r, s] C_{I'I''}[r, s], \quad (C.29)$$

con

$$F_I[r, s] = \frac{1}{N^2} \sum_m \sum_n W_{m,n} W_{m+r, n+s} . \quad (C.30)$$

Nel caso si utilizzi una funzione di peso uniforme, la W_{ij} ha la seguente espressione:

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{per } 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (C.31)$$

e la (C.30) assume la forma:

$$F_I[r, s] = \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) \left(1 - \frac{|s|}{N}\right). \quad (C.32)$$

Si osservi che l'espressione precedente coincide con il coefficiente che precede la $C_{I'I''}[r, s]$ nella (C.20) e, come più volte osservato, rappresenta la perdita di accoppiamento delle particelle nel piano. Nel caso si utilizzi una funzione di peso Gaussiana, l'espressione della funzione W_{ij} è la seguente:

$$W_{i,j} = \exp \left[-8 \frac{\left(i - \frac{1}{2}N\right)^2 + \left(j - \frac{1}{2}N\right)^2}{N^2} \right] \quad (C.33)$$

mentre la corrispondente funzione di perdita di accoppiamento è data, nella sua forma approssimata, da:

$$F_I[r, s] \approx \exp \left[-4 \frac{r^2 + s^2}{N^2} \right]. \quad (C.34)$$

Occorre a questo punto osservare che, estraendo una porzione finita di immagine da una registrazione PIV, si introducono discontinuità ai bordi dell'area di interrogazione. Dette discontinuità sono principalmente dovute alla non uniforme intensità dello sfondo dell'immagine, oppure alle particelle che solo parzialmente sono presenti nella finestra di interrogazione. Per ridurre gli inconvenienti che inevitabilmente influiscono sulla stima della covarianza, è necessario introdurre delle finestre con peso minore sui bordi dell'immagine. L'analisi effettuata finora ha messo in luce l'influenza delle funzioni di peso sulla mutua covarianza discreta, ma nulla è stato detto sugli effetti di dette funzioni quando il calcolo è effettuato con gli algoritmi FFT. In proposito, vale la pena fare qualche considerazione.

Come è noto, un'immagine PIV consiste di un insieme di particelle aventi all'incirca le stesse dimensioni. Per particelle di piccole dimensioni (2-4 pixel) l'intensità dell'immagine fluttua notevolmente sulla finestra di interrogazione. Il numero di particelle che cadono soltanto parzialmente nella celle di interrogazione è proporzionale al rapporto tra il numero di pixel sul bordo della finestra e quello totale N . Se ne deduce che il numero di particelle affette dal suddetto problema è una frazione trascurabile rispetto al totale. Inoltre, per quanto riguarda il contributo addizionale al rumore di correlazione, poiché le immagini di queste particelle "tagliate" sono più

piccole rispetto alle particelle “complete” è plausibile ritenere il contributo al rumore trascurabile rispetto a quello prodotto dalle immagini di particelle casuali nella (C.25). In definitiva, è lecito aspettarsi che la presenza di queste particelle non abbia un contributo rilevante sull’analisi dei risultati. Un problema più serio è invece costituito dalla non uniforme illuminazione dello sfondo. Infatti, per ottenere un campionamento non polarizzato del campo di vista osservato, l’analisi fin qui effettuata si è basata sull’ipotesi che il campione di particelle sia omogeneo. Spesso non è possibile garantire l’uniformità nell’illuminazione, il che rende necessaria l’adozione di qualche accorgimento. Poiché il diametro delle particelle è generalmente minore delle dimensioni della finestra di interrogazione, si può utilizzare un filtro passa alto per rimuovere le fluttuazioni che hanno la stessa scala delle lunghezze della finestra di interrogazione e, al contempo, non alterare il diametro delle particelle che ha una lunghezza minore di quella caratteristica del filtro. In conclusione, se ne deduce che non è necessario l’utilizzo delle funzioni di peso per ridurre gli effetti di bordo presenti nel calcolo con la DFT.

C.5. Stima della scala integrale della lunghezza di covarianza

Per poter valutare la scala integrale della lunghezza di covarianza, conviene utilizzare un modello semplice che permetta di calcolare in maniera agevole le sommatorie che compaiono nelle espressioni (C.22) e (C.23)³¹. Allo scopo, per la funzione di autocovarianza dell’immagine si assume l’espressione:

$$C_I[m, n] = \sigma_I^2 a^{|m|+|n|}, \quad 0 < a < 1 \quad (C.35)$$

con $\sigma_I^2 = \text{var}\{I\}$. Il modello introdotto, essendo a variabili separabili in m ed n , consente di calcolare separatamente la doppia sommatoria su m e su n della (C.35) che, in questo caso, fornisce:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|m|+|n|} = \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2. \quad (C.36)$$

Assumendo che lo spostamento della particelle sull’immagine sia esattamente un multiplo intero di d_r (m_0, n_0 rispettivamente) e che la componente dello spostamento in direzione ortogonale al piano di luce sia trascurabile rispetto allo spessore del fascio stesso, in base alla (C.8) si ha:

$$C_{I'I''}[m, n] = C_I[m - m_0, n - n_0]. \quad (C.37)$$

Per completare il modello è necessario trovare la relazione tra il diametro dell’immagine della particella d_t ed il parametro del modello a . Per ricavare detta espressione basta uguagliare la sommatoria delle (C.35) alla sommatoria delle (C.5). Nell’approssimazione Gaussiana si ottiene che:

$$\{\Phi_{pp} * C_{I'I''}\}(x, y) \approx \sigma_I^2 G(x, y; d_R/4) \quad \text{con} \quad d_R^2 = 2d_t^2 + 4d_r^2, \quad (C.38)$$

per cui, uguagliando le due somme, si ricava l’espressione del parametro a ³²:

$$a = \frac{c-1}{c+1} \quad \text{con} \quad c = \frac{\sqrt{2\pi} d_R}{4d_r}. \quad (C.39)$$

Si noti che per $d_t/d_r \rightarrow 0$ $d_R/d_r \rightarrow 2$, perciò $C_I[r, s]$ ha sempre larghezza finita ed $a > 0.11$ per ogni d_r .

Tenendo conto della (C.37) la (C.22), per $r = m_0$ ed $s = n_0$ diventa:

$$\text{cov}\{\hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0], \hat{C}_{I'I''}[m_0 + t, n_0 + u]\} \approx \frac{2}{N^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_I[m, n] C_I[m + t, n + u]. \quad (C.40)$$

Sostituendo la (C.35) nella (C.40) si ottiene:

$$\text{cov}\{\hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0], \hat{C}_{I'I''}[m_0 + t, n_0 + u]\} \approx \frac{2\sigma_I^4}{N^2} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|+|m+t|} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|+|n+u|} \right). \quad (C.41)$$

³¹ Per il calcolo della scala integrale della lunghezza di covarianza si è riportata la trattazione fatta da Westerweel (1993).

³² Si ricordi che l’integrale di una curva Gaussiana bidimensionale è pari a $2\pi\sigma^2$.

Ciascuno dei due termini in parentesi, per $t \geq 0$, è dato da:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|+|m+t|} &= \sum_{m=-\infty}^{-t} a^{|m|+|m+t|} + \sum_{m=-t+1}^0 a^{|m|+|m+t|} + \sum_{m=1}^{+\infty} a^{|m|+|m+t|} = \sum_{m=t}^{+\infty} a^{|m|+|m-t|} + \sum_{m=0}^{t-1} a^{|m|+|m-t|} + \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} a^{|m|+|m+t|} = \sum_{m=t}^{+\infty} a^{2m-t} + \sum_{m=0}^{t-1} a^{m-m+t} + \sum_{m=1}^{+\infty} a^{2m+t} = a^t \frac{1}{1-a^2} + a^t t + a^t \left(\frac{1}{1-a^2} - 1 \right) = \\ &= a^t \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} + t \right). \end{aligned} \quad (C.42)$$

Per $t \leq 0$ si ottiene un risultato analogo alla (C.42) con $-t$ al posto di t , per cui, in definitiva, la (C.40) è data:

$$\text{cov}\{\hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0], \hat{C}_{I'I''}[m_0 + t, n_0 + u]\} \approx \frac{2\sigma_I^4}{N^2} a^{|t|+|u|} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} + |t| \right) \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} + |u| \right). \quad (C.43)$$

Dividendo la (C.43) per l'espressione della varianza dello stimatore data da:

$$\text{var}\{\hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0]\} = \text{cov}\{\hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0], \hat{C}_{I'I''}[m_0, n_0]\} \quad (C.44)$$

si ottiene il coefficiente di correlazione $\rho[t, u]$ della stima della covarianza in $[m_0, n_0]$ con quella nella posizione $[t, u]$ relativa a $[m_0, n_0]$:

$$\rho[t, u] = a^{|t|+|u|} \left(1 + |t| \frac{1-a^2}{1+a^2} \right) \left(1 + |u| \frac{1-a^2}{1+a^2} \right). \quad (C.45)$$

Il risultato appena ottenuto mostra che la stima della mutua covarianza è correlata su un intervallo di valori finito. In analogia con la scala integrale delle lunghezze di un processo casuale, la scala integrale della lunghezza di covarianza è definita dalla radice quadrata della sommatoria su tutti i valori di t e u del coefficiente di correlazione. Per il modello adottato si ottiene l'espressione:

$$L^2 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \rho[t, u] = \left[\frac{(1-a^2)(1+a)^2}{(1+a^2)(1-a)^2} \right]^2. \quad (C.46)$$

APPENDICE D: Errori di allineamento nella PIV stereoscopica

In questa appendice sono ricavate le formule principali utilizzate nella tesi per la stima degli errori relativi dovuti alla mancanza di allineamento tra il piano di misura e quello di calibrazione.

D.1. Espressione generale dell'errore per un campo di spostamento uniforme

Le proiezioni del campo di spostamento effettivo possono essere espresse in funzione dei coefficienti di correzione f_s ed f_d come:

$$u_s'' = u_s(1 + f_s), \quad u_d'' = u_d(1 + f_d), \quad v_s'' = v_s(1 + f_s) \quad \text{e} \quad v_d'' = v_d(1 + f_d). \quad (\text{D.1})$$

Sostituendo le prime due delle (D.1) nella formula di ricostruzione della componente u dello spostamento si ottiene il valore dello spostamento effettivo misurato:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{B(u_s'' + u_d'') + x_p(u_d'' - u_s'')}{2B + u_s'' - u_d''} = \\ &= \frac{B(u_s + u_d) + x_p(u_d - u_s)}{2B + u_s - u_d + f_s u_s - f_d u_d} + \frac{B(f_s u_s + f_d u_d) + x_p(f_d u_d - f_s u_s)}{2B + u_s - u_d + f_s u_s - f_d u_d}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Ricordando che:

$$u_s = \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} \quad \text{e} \quad u_d = \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w}, \quad (\text{D.3})$$

si ricava:

$$u_s - u_d = \frac{2wB}{H - w} \quad \text{e} \quad u_s + u_d = \frac{2(Hu + wx_p)}{H - w}. \quad (\text{D.4})$$

Tenendo conto delle (D.3) e (D.4), la (D.2) diventa:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{B \frac{2(Hu + wx_p)}{H - w} - x_p \frac{2wB}{H - w}}{2B + \frac{2wB}{H - w} + f_s \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} - f_d \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w}} + \\ &+ \frac{B \left[f_s \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} + f_d \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w} \right] + x_p \left[f_d \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w} - f_s \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} \right]}{2B + \frac{2wB}{H - w} + f_s \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} - f_d \frac{Hu - w(B - x_p)}{H - w}} = \\ &= \frac{2BH u + BH u(f_s + f_d) - (Hu x_p - wB^2 + wx_p^2)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

per cui l'errore relativo sulla componente u è dato da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{u' - u}{u} = \frac{1}{u} \frac{Bu(H - w)(f_s + f_d) - (Hu x_p - wB^2 + wx_p^2 + Hu^2 + uwx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)} = \\ &= \frac{1}{u} \frac{Bu(H - w)(f_s + f_d) - [(Hu + wx_p)(u + x_p) - wB^2](f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Per ricavare gli errori relativi delle altre due componenti del campo di spostamento si procede in maniera analoga a quanto fatto per la componente u . Utilizzando le (D.1), si ottiene il valore della componente effettiva v' :

$$v' = \frac{y_p(u_d'' - u_s'') + B(v_s'' + v_d'')}{2B + u_s'' - u_d''} = \frac{y_p(u_d - u_s) + B(v_s + v_d) + y_p(f_d u_d - f_s u_s) + B(f_s v_s + f_d v_d)}{2B + u_s - u_d + f_s u_s - f_d u_d} =$$

$$\begin{aligned}
 & -y_p \frac{2wB}{H-w} + 2B \frac{Hv + y_p w}{H-w} \\
 & = \frac{2B + \frac{2wB}{H-w} + f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} - f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w}}{2B + \frac{2wB}{H-w} + f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} - f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w}} + \\
 & + \frac{y_p \left[f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w} - f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} \right] + B \left(f_s \frac{Hv + y_p w}{H-w} + f_d \frac{Hv + y_p w}{H-w} \right)}{2B + \frac{2wB}{H-w} + f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} - f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w}} = \\
 & = \frac{2BHv + BHv(f_s + f_d) - (Huy_p + wx_p y_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}, \tag{D.7}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava il corrispondente errore relativo:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_v = \frac{v' - v}{v} &= \frac{1}{v} \frac{(BHv - vwB)(f_s + f_d) - (Huy_p + wx_p y_p + Huv + vwx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)} = \\
 &= \frac{1}{v} \frac{Bv(H-w)(f_s + f_d) - (v + y_p)(Hu + wx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}. \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

Per la componente w , invece, si ha:

$$\begin{aligned}
 w' &= \frac{H(u_s'' - u_d'')}{2B + u_s'' - u_d''} = \frac{H(u_s - u_d) + H(f_s u_s - f_d u_d)}{2B + u_s - u_d + f_s u_s - f_d u_d} = \\
 &= \frac{H \frac{2wB}{H-w} + H \left[f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} - f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w} \right]}{2B + \frac{2wB}{H-w} + f_s \frac{Hu + w(B+x_p)}{H-w} - f_d \frac{Hu - w(B-x_p)}{H-w}} = \\
 &= \frac{2BHw + BHw(f_s + f_d) + H(Hu + wx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)} \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_w = \frac{w' - w}{w} &= \frac{1}{w} \frac{(BHw - w^2 B)(f_s + f_d) + (H-w)(Hu + wx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)} = \\
 &= \frac{(H-w)}{w} \frac{wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}{2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d)}. \tag{D.10}
 \end{aligned}$$

D.2. Rotazione nel piano xz

In presenza di una rotazione del piano di misura nel piano xz , i coefficienti correttivi assumono l'espressione:

$$\begin{aligned}
 f_s &= \frac{\Delta z_s}{H-w-\Delta z_s} = \frac{\frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(x_p + B)tg\alpha - H}}{H-w-\frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(x_p + B)tg\alpha - H}} = \\
 &= \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H-w)[(x_p + B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)} \tag{D.11} \\
 f_d &= \frac{\Delta z_d}{H-w-\Delta z_d} = \frac{\frac{H(x_p - x_c)tg\alpha}{(x_p - B)tg\alpha - H}}{H-w-\frac{H(x_p - x_c)tg\alpha}{(x_p - B)tg\alpha - H}} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H - w)[(x_p - B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)}, \quad (D.12)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} f_s + f_d &= \\ &= \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H - w)[(x_p + B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)} + \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H - w)[(x_p - B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)} = \\ &= \frac{2[(H - w)(x_p tg\alpha - H) - Htg\alpha(x_p - x_c)]Htg\alpha(x_p - x_c)}{[(H - w)(x_p tg\alpha - H) - Htg\alpha(x_p - x_c)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} = \\ &= \frac{2[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]Htg\alpha(x_p - x_c)}{[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} \end{aligned} \quad (D.13)$$

e

$$\begin{aligned} f_s - f_d &= \\ &= \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H - w)[(x_p + B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)} - \frac{Htg\alpha(x_p - x_c)}{(H - w)[(x_p - B)tg\alpha - H] - Htg\alpha(x_p - x_c)} = \\ &= \frac{2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{[(H - w)(x_p tg\alpha - H) - Htg\alpha(x_p - x_c)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} = \\ &= \frac{2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Sostituendo le (D.13) e (D.14) nelle (D.6), (D.8) e (D.10) si ricavano le formule dell'errore per i tre spostamenti. Definendo con D_1 la seguente quantità:

$$D_1 = H(H - x_c tg\alpha) + w(x_p tg\alpha - H) = H(H - w) + (wx_p - Hx_c)tg\alpha$$

l'espressione del denominatore, identico per tutte le componenti è data da:

$$\begin{aligned} &2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d) = 2BH + \\ &wB \frac{2[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]Htg\alpha(x_p - x_c)}{[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} + \\ &+ (Hu + wx_p) \frac{2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} = \\ &= \frac{2BHD_1^2 - 2BH(H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha}{D_1^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} + \\ &+ \frac{2BHtg\alpha(x_p - x_c)[Hw(w - H) - w(wx_p - Hx_c)tg\alpha + (Hu + wx_p)(w - H)tg\alpha]}{D_1^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} = \\ &= 2BH \frac{D_1^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha + Htg\alpha(x_p - x_c)[w(w - H) + (wx_c - wx_p - Hu + uw)tg\alpha]}{D_1^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha} = \\ &= 2BH \frac{D_1^2 - D_2}{D_1^2 - (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (D.15)$$

con:

$$D_2 = (H - w)^2 B^2 tg^2 \alpha - Htg\alpha(x_p - x_c)[w(w - H) + (wx_c - wx_p - Hu + uw)tg\alpha].$$

In base alla (D.6) l'errore relativo sulla componente u risulta:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{u} \frac{Bu(H - w)2[H(x_c tg\alpha - H) - w(x_p tg\alpha - H)]Htg\alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} +$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{u} \frac{[(Hu + wx_p)(u + x_p) - wB^2]2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha u[H(w - H) + (Hx_c - wx_p)tg \alpha] + [(Hu + wx_p)(u + x_p) - wB^2]tg \alpha}{u(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha Hu[w - H + (x_c + u + x_p)tg \alpha] + w(x_p^2 - B^2)tg \alpha}{u(D_1^2 - D_2)}. \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

Analogamente, in base alla (D.8) si ha:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_v &= \frac{1}{v} \frac{Bv(H - w)2[H(x_c tg \alpha - H) - w(x_p tg \alpha - H)]Htg \alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} + \\
 & - \frac{1}{v} \frac{(v + y_p)(Hu + wx_p)2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha v[H(w - H) + (Hx_c - wx_p)tg \alpha] + (v + y_p)(Hu + wx_p)tg \alpha}{v(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha Hv[w - H + (x_c + u)tg \alpha] + y_p(Hu + wx_p)tg \alpha}{v(D_1^2 - D_2)} \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

ed in base alla (D.10):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_w &= \frac{(H - w)}{w} \frac{wB2[H(x_c tg \alpha - H) - w(x_p tg \alpha - H)]Htg \alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} + \\
 & + \frac{(H - w)}{w} \frac{(Hu + wx_p)2(w - H)BHtg^2 \alpha(x_p - x_c)}{2BH(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha w[H(w - H) + (Hx_c - wx_p)tg \alpha] + (Hu + wx_p)(w - H)tg \alpha}{w(D_1^2 - D_2)} = \\
 & = \frac{H(H - w)(x_p - x_c)tg \alpha w[w - H + (x_c - x_p + u)tg \alpha] - Hutg \alpha}{w(D_1^2 - D_2)}. \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

D.3. Piano di misura in posizione qualunque

Ipotizzando che il piano di misura sia disposto secondo una qualsiasi direzione, le distanze dal piano di calibrazione per le telecamera destra e sinistra sono date da:

$$\Delta z_s = H \frac{ax_p + by_p + c}{H + a(x_p + B) + by_p} \quad (D.19)$$

$$\Delta z_d = H \frac{ax_p + by_p + c}{H + a(x_p - B) + by_p} \quad (D.20)$$

per cui i fattori di correzione assumono l'espressione:

$$\begin{aligned}
 f_s &= \frac{\Delta z_s}{H - w - \Delta z_s} = \frac{H \frac{ax_p + by_p + c}{H + a(x_p + B) + by_p}}{H - w - H \frac{ax_p + by_p + c}{H + a(x_p + B) + by_p}} = \\
 & = \frac{H(ax_p + by_p + c)}{(H - w)[H + a(x_p + B) + by_p] - H(ax_p + by_p + c)} \quad (D.21)
 \end{aligned}$$

$$f_d = \frac{H(ax_p + by_p + c)}{(H - w)[H + a(x_p - B) + by_p] - H(ax_p + by_p + c)}. \quad (D.22)$$

Operando le stesse sostituzioni fatte nell'appendice precedente si ha.

$$f_s + f_d = \frac{2H(c + ax_p + by_p)C_1}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2} \quad (D.23)$$

$$f_s - f_d = \frac{2(w - H)BHa(c + ax_p + by_p)}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2}, \quad (D.24)$$

con

$$C_1 = H(H - w - c) - w(ax_p + by_p),$$

da cui:

$$\begin{aligned} & 2BH + wB(f_s + f_d) + (Hu + wx_p)(f_s - f_d) = 2BH + \\ & + wB \frac{2H(c + ax_p + by_p)C_1}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2} + (Hu + wx_p) \frac{2(w - H)BHa(c + ax_p + by_p)}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2} = \\ & = 2BH \left[\frac{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2 + (c + ax_p + by_p)[wC_1 + (Hu + wx_p)(w - H)a]}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2} \right] = \\ & = 2BH \left[\frac{C_1^2 - C_2}{C_1^2 - a^2 B^2 (H - w)^2} \right] \end{aligned} \quad (D.25)$$

dove

$$C_2 = a^2 B^2 (H - w)^2 - (c + ax_p + by_p)[Hw(H - w - c) + Ha(uw - Hu - wx_p) - w^2 by_p].$$

Sostituendo nelle (D.6), (D.8) e (D.10) rispettivamente si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{u} \frac{u(H - w)(c + ax_p + by_p)C_1 - [(Hu + wx_p)(u + x_p) - wB^2](w - H)a(c + ax_p + by_p)}{C_1^2 - C_2} = \\ &= \frac{(H - w)(c + ax_p + by_p)}{u} \frac{u[H(H - w - c) - w(ax_p + by_p)] + a[(Hu + wx_p)(u + x_p) - wB^2]}{C_1^2 - C_2} = \\ &= \frac{(H - w)(c + ax_p + by_p)}{u} \frac{Hu[H - w - c + (u + x_p)a] + w[(x_p^2 - B^2)a - uy_p b]}{C_1^2 - C_2} \end{aligned} \quad (D.26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{1}{v} \frac{v(H - w)(c + ax_p + by_p)C_1 - (v + y_p)(Hu + wx_p)(w - H)a(c + ax_p + by_p)}{C_1^2 - C_2} = \\ &= \frac{(H - w)(c + ax_p + by_p)}{v} \frac{Hv(H - w - c + ua) + y_p[(Hu + wx_p)a - vwb]}{C_1^2 - C_2} \end{aligned} \quad (D.27)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_w &= \frac{(H - w)}{w} \frac{w(c + ax_p + by_p)C_1 + (Hu + wx_p)(w - H)a(c + ax_p + by_p)}{C_1^2 - C_2} = \\ &= \frac{(H - w)(c + ax_p + by_p)}{w} \frac{Hw[H - w - c + (u - x_p)a] - w^2 by_p - H^2 ua}{C_1^2 - C_2}. \end{aligned} \quad (D.28)$$

D.4. Coefficienti correttivi per un campo di moto non uniforme

La proiezione effettiva lungo x del vettore spostamento misurato dalla telecamera sinistra, in funzione delle componenti effettive dello spostamento u_{es} , v_{es} , w_{es} nel punto P'_s è data da:

$$\begin{aligned} u_s'' &= \frac{Hu_{es} + w_{es}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w_{es}} = \frac{Hu + Huf_{eus} + w(B + x_p) + wf_{ews}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} = \\ &= \frac{Hu + w(B + x_p)}{H - w} \frac{H - w}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} + \frac{Huf_{eus} + wf_{ews}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} = \end{aligned}$$

$$= u_s \frac{H - w}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} + \frac{Huf_{eus} + wf_{ews}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}}. \quad (D.29)$$

Dalla (D.29), ricordando la prima delle (D.1) si ottiene l'espressione del coefficiente di correzione per la u che è indicato con f_s^u per distinguerlo da quello relativo alla v :

$$\begin{aligned} f_s^u &= \frac{H - w}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} - 1 + \frac{Huf_{eus} + wf_{ews}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \frac{H - w}{Hu + w(B + x_p)} = \\ &= \frac{\Delta z_s + wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} + \frac{Huf_{eus} + wf_{ews}(B + x_p)}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \frac{H - w}{Hu + w(B + x_p)} = \\ &= \frac{1}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \left\{ \Delta z_s + \frac{H[uf_{eus}(H - w) + wf_{ews}(B + x_p + u)]}{Hu + w(B + x_p)} \right\}. \end{aligned} \quad (D.30)$$

Analogamente, per la componente lungo x misurata dalla telecamera destra si ha:

$$\begin{aligned} u_d'' &= \frac{Hu_{ed} - w_{ed}(B - x_p)}{H - \Delta z_d - w_{ed}} = \frac{Hu - w(B - x_p) + Huf_{eud} - wf_{ewd}(B - x_p)}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} = \\ &= u_d \frac{H - w}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} + \frac{Huf_{eud} - wf_{ewd}(B - x_p)}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}}, \end{aligned} \quad (D.31)$$

da cui:

$$\begin{aligned} f_d^u &= \frac{H - w}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} - 1 + \frac{Huf_{eud} - wf_{ewd}(B - x_p)}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \frac{H - w}{Hu - w(B - x_p)} = \\ &= \frac{\Delta z_d + wf_{ewd}}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} + \frac{Huf_{eud} - wf_{ewd}(B - x_p)}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \frac{H - w}{Hu - w(B - x_p)} = \\ &= \frac{1}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \left\{ \Delta z_d + \frac{H[uf_{eud}(H - w) + wf_{ewd}(u - B + x_p)]}{Hu - w(B - x_p)} \right\}. \end{aligned} \quad (D.32)$$

Per calcolare i coefficienti di correzione per le componenti lungo l'asse y è sufficiente ripercorrere gli stessi passi fatti per la componente u , ottenendo per la telecamera sinistra:

$$\begin{aligned} v_s'' &= \frac{Hv_{es} + y_p w_{es}}{H - w_{es} - \Delta z_s} = \frac{Hv + y_p w + Hvf_{evs} + y_p wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} = \\ &= v_s \frac{H - w}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} + \frac{Hvf_{evs} + y_p wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}}. \end{aligned} \quad (D.33)$$

e

$$\begin{aligned} f_s^v &= v_s \frac{H - w}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} - 1 + \frac{Hvf_{evs} + y_p wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \frac{H - w}{Hv + y_p w} = \\ &= v_s \frac{\Delta z_s + wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} + \frac{Hvf_{evs} + y_p wf_{ews}}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \frac{H - w}{Hv + y_p w} = \\ &= \frac{1}{H - \Delta z_s - w - wf_{ews}} \left\{ \Delta z_s + \frac{H[vf_{evs}(H - w) + wf_{ews}(v + y_p)]}{Hv + y_p w} \right\}. \end{aligned} \quad (D.34)$$

Per la telecamera destra si giunge ad un'espressione identica alla (D.34), ossia:

$$f_d^v = \frac{1}{H - \Delta z_d - w - wf_{ewd}} \left\{ \Delta z_d + \frac{H[vf_{evd}(H - w) + wf_{ewd}(v + y_p)]}{Hv + y_p w} \right\}. \quad (D.35)$$

D.5. Coefficienti correttivi per un campo di moto rotatorio

Di seguito è ricavata l'espressione dei coefficienti correttivi nel caso particolare in cui il campo di moto sia rotatorio, analizzando singolarmente le rotazioni attorno ad ogni asse. Allo scopo è

sufficiente esprimere i coefficienti in funzione dell'angolo di rotazione α e della distanza Δz del punto P' dal piano di calibrazione.

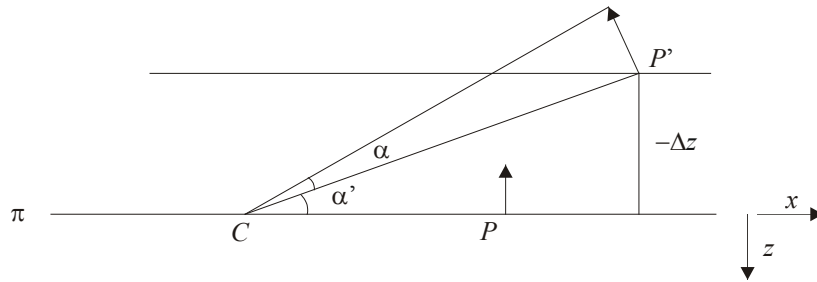


Figura D.1 Rotazione rigida di un angolo α attorno ad un asse parallelo all'asse y con centro in C .

Per calcolare i coefficienti correttivi in presenza di una rotazione rigida con centro di rotazione C nel piano xz , si assuma che sia nota la posizione del piano di misura e si indichi con α' l'angolo che la retta $P'C$ forma con la traccia del piano di calibrazione π (vedi Figura D.1). Indicando con x_P e x_C le ascisse del punto di misura e del centro di rotazione rispettivamente, le componenti dello spostamento del punto P in seguito alla rotazione α nel piano xz sono date da:

$$u = (x_C - x_P)(1 - \cos \alpha) \quad (D.36)$$

$$w = (x_C - x_P) \sin \alpha. \quad (D.37)$$

Per calcolare i coefficienti di correzione è sufficiente calcolare le corrispondenti componenti dello spostamento del punto P' . Con riferimento alla Figura D.1, è immediato verificare che:

$$\begin{aligned} u' &= P'C [\cos(\alpha + \alpha') - \cos \alpha'] = \frac{-\Delta z}{\sin \alpha'} [\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' - \cos \alpha'] = \\ &= \frac{-\Delta z}{\tan \alpha'} (\cos \alpha - 1) + \Delta z \sin \alpha = (x_{P'} - x_C)(\cos \alpha - 1) + \Delta z \sin \alpha \end{aligned} \quad (D.38)$$

e

$$\begin{aligned} w' &= -\Delta z - P'C \sin(\alpha + \alpha') = -\Delta z - \frac{-\Delta z}{\sin \alpha'} (\sin \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha) = \\ &= -\Delta z + \frac{\Delta z \sin \alpha}{\tan \alpha'} + \Delta z \cos \alpha = -\Delta z(1 - \cos \alpha) - (x_{P'} - x_C) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (D.39)$$

Ricordando l'espressione dell'ascissa del punto P' per la telecamera di sinistra, le (D.38)-(D.39) diventano:

$$\begin{aligned} u' &= \left[x_P - \Delta z_s \frac{(B + x_P)}{H} - x_C \right] (\cos \alpha - 1) + \Delta z_s \sin \alpha = \\ &= (x_P - x_C)(\cos \alpha - 1) + \frac{\Delta z_s}{H} [(B + x_P)(1 - \cos \alpha) + H \sin \alpha] \end{aligned} \quad (D.40)$$

$$\begin{aligned} w' &= -\Delta z_s (1 - \cos \alpha) - \left[x_P - \Delta z_s \frac{(B + x_P)}{H} - x_C \right] \sin \alpha = \\ &= (x_C - x_P) \sin \alpha + \frac{\Delta z_s}{H} [(B + x_P) \sin \alpha - H(1 - \cos \alpha)], \end{aligned} \quad (D.41)$$

da cui:

$$f_{eus} = \Delta z_s \frac{(B + x_P)(1 - \cos \alpha) + H \sin \alpha}{H(x_C - x_P)(1 - \cos \alpha)} \quad (D.42)$$

$$f_{ews} = \Delta z_s \frac{(B + x_P) \sin \alpha - H(1 - \cos \alpha)}{H(x_C - x_P) \sin \alpha}. \quad (D.43)$$

Analogamente, per la telecamera destra si ottengono i seguenti coefficienti correttivi:

$$f_{eud} = \Delta z_d \frac{(x_P - B)(1 - \cos \alpha) + H \sin \alpha}{H(x_C - x_P)(1 - \cos \alpha)} \quad (D.44)$$

$$f_{ewd} = \Delta z_d \frac{(x_P - B) \sin \alpha - H(1 - \cos \alpha)}{H(x_C - x_P) \sin \alpha}. \quad (D.45)$$

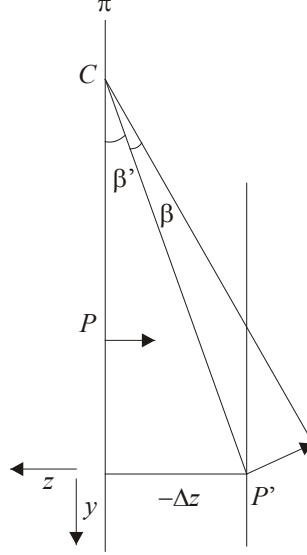


Figura D.2 Rotazione rigida di un angolo β attorno ad un asse parallelo all'asse x con centro in C .

Per calcolare i coefficienti correttivi in presenza di un campo di moto rotatorio nel piano yz con centro di rotazione C , si procede in maniera simile a quanto fatto per la rotazione nel piano xz . Si cominci con l'osservare che in questo caso è la componente u ad essere nulla, avendosi per le altre componenti:

$$v = (y_C - y_P)(1 - \cos \beta) \quad (D.46)$$

$$w = (y_C - y_P) \sin \beta. \quad (D.47)$$

Dalla Figura D.2 si ha che le componenti dello spostamento nel punto P' sono date da:

$$\begin{aligned} v' &= P'C [\cos(\beta + \beta') - \cos \beta'] = \frac{-\Delta z}{\sin \beta'} [\cos \beta \cos \beta' - \sin \beta \sin \beta' - \cos \beta'] = \\ &= (y_{P'} - y_C)(\cos \beta - 1) + \Delta z \sin \beta \end{aligned} \quad (D.48)$$

$$\begin{aligned} w' &= -\Delta z - P'C \sin(\beta + \beta') = -\Delta z - \frac{-\Delta z}{\sin \beta'} (\sin \beta \cos \beta' + \sin \beta' \cos \beta) = \\ &= -\Delta z(1 - \cos \beta) - (y_{P'} - y_C) \sin \beta. \end{aligned} \quad (D.49)$$

Per le proiezioni della telecamera sinistra, le (D.48)-(D.49) forniscono:

$$\begin{aligned} v' &= \left[y_P - \frac{\Delta z_s}{H} y_P - y_C \right] (\cos \beta - 1) + \Delta z_s \sin \beta = \\ &= (y_P - y_C)(\cos \beta - 1) + \frac{\Delta z_s}{H} [y_P(1 - \cos \beta) + H \sin \beta] \end{aligned} \quad (D.50)$$

$$\begin{aligned} w' &= -\Delta z_s(1 - \cos \beta) - \left(y_P - \frac{\Delta z_s}{H} y_P - y_C \right) \sin \beta = \\ &= (y_C - y_P) \sin \beta + \frac{\Delta z_s}{H} [y_P \sin \beta - H(1 - \cos \beta)], \end{aligned} \quad (D.51)$$

da cui:

$$f_{evs} = \Delta z_s \frac{y_P(1 - \cos \beta) + H \sin \beta}{H(y_C - y_P)(1 - \cos \beta)} \quad (D.52)$$

$$f_{evd} = \Delta z_d \frac{y_P(1 - \cos \beta) + H \sin \beta}{H(y_C - y_P)(1 - \cos \beta)} \quad (D.53)$$

$$f_{ews} = \Delta z_s \frac{y_P \sin \beta - H(1 - \cos \beta)}{H(y_C - y_P) \sin \beta} \quad (D.54)$$

$$f_{ewd} = \Delta z_d \frac{y_P \sin \beta - H(1 - \cos \beta)}{H(y_C - y_P) \sin \beta}. \quad (D.55)$$

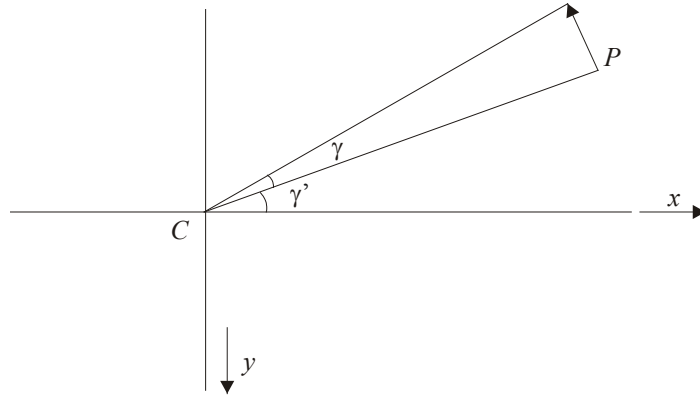


Figura D.3 Rotazione rigida di un angolo γ attorno ad un asse parallelo all'asse z con centro in C .

In ultimo è analizzato l'effetto della rotazione γ nel piano xy con centro in C rappresentata in Figura D.3. Per il generico punto P del piano le componenti dello spostamento in funzione dell'angolo di rotazione γ e delle coordinate dei punti P e C sono date da:

$$\begin{aligned} u &= PC \cos(\gamma + \gamma') - PC \cos \gamma' = PC(\cos \gamma \cos \gamma' - \sin \gamma \sin \gamma' - \cos \gamma') = \\ &= \frac{y_P - y_C}{\sin \gamma'} (\cos \gamma \cos \gamma' - \sin \gamma \sin \gamma' - \cos \gamma') = \frac{y_P - y_C}{\tan \gamma'} (\cos \gamma - 1) - (y_P - y_C) \sin \gamma = \\ &= (x_P - x_C)(\cos \gamma - 1) - (y_P - y_C) \sin \gamma \end{aligned} \quad (D.56)$$

e

$$\begin{aligned} v &= PC \sin(\gamma + \gamma') - PC \sin \gamma = PC(\sin \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma' \cos \gamma - \sin \gamma') = \\ &= \frac{y_P - y_C}{\sin \gamma'} (\sin \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma' \cos \gamma - \sin \gamma') = (y_P - y_C)(\cos \gamma - 1) + (x_P - x_C) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (D.57)$$

A causa del non allineamento tra il piano di misura e quello di calibrazione, le componenti nel punto P' per la telecamera destra assumono l'espressione:

$$\begin{aligned} u' &= (x_{P'_s} - x_C)(\cos \gamma - 1) - (y_{P'_s} - y_C) \sin \gamma = \\ &= (x_P - x_C)(\cos \gamma - 1) - (y_P - y_C) \sin \gamma - \frac{\Delta z_s}{H} [(B + x_P)(\cos \gamma - 1) - y_P \sin \gamma] \end{aligned} \quad (D.58)$$

$$\begin{aligned} v' &= (y_{P'_s} - y_C)(\cos \gamma - 1) + (x_{P'_s} - x_C) \sin \gamma = \\ &= (y_P - y_C)(\cos \gamma - 1) + (x_P - x_C) \sin \gamma - \frac{\Delta z_s}{H} [y_P(\cos \gamma - 1) + (B + x_P) \sin \gamma] \end{aligned} \quad (D.59)$$

da cui si ricavano le espressioni dei corrispondenti coefficienti di correzione:

$$f_{eus} = \frac{\Delta z_s}{H} \frac{y_P \sin \gamma - (B + x_P)(\cos \gamma - 1)}{(x_P - x_C)(\cos \gamma - 1) - (y_P - y_C) \sin \gamma} \quad (D.60)$$

$$f_{evs} = -\frac{\Delta z_s}{H} \frac{y_P(\cos \gamma - 1) + (B + x_P) \sin \gamma}{(y_P - y_C)(\cos \gamma - 1) + (x_P - x_C) \sin \gamma}. \quad (D.61)$$

Analogamente per la telecamera destra si ricava:

$$f_{eud} = \frac{\Delta z_d}{H} \frac{y_P \sin \gamma - (x_P - B)(\cos \gamma - 1)}{(x_P - x_C)(\cos \gamma - 1) - (y_P - y_C) \sin \gamma} \quad (\text{D.62})$$

$$f_{evd} = -\frac{\Delta z_d}{H} \frac{y_P (\cos \gamma - 1) + (x_P - B) \sin \gamma}{(y_P - y_C)(\cos \gamma - 1) + (x_P - x_C) \sin \gamma} . \quad (\text{D.63})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1]. ADRIAN, R. J. 1984 *Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurement of fluid flow: speckle velocimetry vs particle image velocimetry*. Appl. Opt. 23, p. 1690.
- [2]. ADRIAN, R. J. & YAO, C. S. 1984 *Development of pulsed laser velocimetry (PLV) for measurement of turbulent flow*. Proc. Symp. Turbul. (ed. X. Reed et al.) University of Missouri, Rolla.
- [3]. ADRIAN, R. J. 1986 *An image shifting technique to resolve directional ambiguity in double-pulsed velocimetry*. Appl. Opt. 25, pp. 3855-3858.
- [4]. ADRIAN, R. J. 1988 *Statistical properties of particle image velocimetry measurements in turbulent flow*. Laser Anemometry in Fluid Mechanics – III (ed. R. J. Adrian et al.) LA-DOAN Instituto Superior Tecnico, Lisboa, pp. 115-129.
- [5]. ADRIAN, R. J. 1995 *Limiting resolution of particle image velocimetry for turbulent flow*. Advances in Turbulent Research, pp. 1-19.
- [6]. ADRIAN, R. J. 1997 *Dynamic ranges of velocity and spatial resolution of particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1393-1398.
- [7]. ALEXANDER, B. F. & NG, K. C. 1991 Opt. Eng. 30, p. 1320.
- [8]. ANDREOPOULOS, J. & RODI, W. 1984 *Experimental investigation of jets in a cross flow*. J. Fluid Mech. 138, pp. 93-127.
- [9]. ASTARITA, T. & CARDONE, G. 2000 *Thermofluiddynamic Analysis of the Flow in a sharp 180° Turn Channel*. Exp. Thermal Fluid Sci. 20, pp. 188-200.
- [10]. ASTARITA, T. & CARDONE, G. 2004 *Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV*. Accettato ed in attesa di stampa su Exp. Fluids
- [11]. ASTARITA, T., CARDONE, G. & CARLOMAGNO, G. M. 2001 *On the Cooling of Gas Turbines*. J. Flow Visualization and Image Processing 8, pp. 287-302.
- [12]. BERGLES, G., GOSMAN, A. D. & LAUNDER, B. E. 1976 *The near field character of a jet discharged normal to a main stream*. Trans. ASME C: J. Heat Transfer. 98, pp. 373-378.
- [13]. CAMUSSI, R., GUY, G. & STELLA, A. 2002 *Experimental study of a jet in a crossflow at a very low Reynolds number*. J. Fluid Mech. 454, pp. 113-144.
- [14]. CARLOMAGNO, G. M. & DE LUCA, L. 1989 *Infrared Thermography in Heat Transfer*. Handbook of flow visualization, W. J. Yang ed. Hemisphere, pp. 531-553.
- [15]. CHASSAING, P., GEORGE, J., CLARIA, A. & SANNES, F. 1974 *Physical characteristics of subsonic jets in a cross-stream*. J. Fluid Mech. 62, pp. 41-64.
- [16]. CHO, H. H. & GOLDSTEIN, R. J. 1995a *Heat (Mass) Transfer and Film Cooling Effectiveness with Injection through Discrete Holes: Part i-Within Holes and on the Back Surface*. ASME J. Turbomach. 117, pp. 440-450.
- [17]. CHO, H. H. & GOLDSTEIN, R. J. 1995b *Heat (Mass) Transfer and Film Cooling Effectiveness with Injection through Discrete Holes: Part ii-On the Exposed Surface*. ASME J. Turbomach. 117, pp. 451-460.
- [18]. COELHO, S. R. M. & HUNT, J. C. R. 1989 *The dynamics of the near field of strong jets in cross-flow*. J. Fluid Mech. 200, pp. 95-120.
- [19]. CONTE, E. 1996 *Lezioni di teoria dei segnali*. Ed. Liguori, Napoli.
- [20]. COOPER, T. E., FIELD R. J. & MEYER, J. F. 1975 *Liquid Crystal Thermography and its Applications to the Study of Convective Heat Transfer*. J. Heat Transfer 97, pp. 442-450.
- [21]. CORTELEZZI, L. & KARAGOZIAN, A. R. 2001 *On the formation of the counter-rotating vor-*

- tex pair in transverse jets*. J. Fluid Mech. 446, pp. 347-373.
- [22]. CRABB, D., DURÃO, D. F. G. & WHITELAW, J. H. 1981 *A round jet normal to a cross flow*. J. Fluids Eng. 103, pp. 142-153.
- [23]. ECKERT, E. R. G. 1984 *Analyses of Film Cooling and Full Coverage Film Cooling of Gas Turbine Blades*. ASME J. Eng. Gas Turbine Power 26, n. 1 pp. 206-213.
- [24]. EIFF, O. S. & KEFFER, J. S. 1997 *On the structures in the near-wake of an elevated turbulent jet in a crossflow*. J. Fluid Mech. 333, pp. 161-195.
- [25]. FOSS, J. 1980 *Interaction region phenomena for the jet in a cross flow problem*. Rep. SFB 80/E7161, univ. Karlsruhe.
- [26]. FRIC, T. F. & ROSHKO, A. 1994 *Vortical structures in the wake of a transverse jet*. J. Fluid Mech. 279, pp. 1-47.
- [27]. GOLDSTEIN, R. J. & TAYLOR, J. R. 1982 *Mass Transfer in the Neighborhood of Jets Entering a Cross-flow*. J. Heat Transfer. 104, pp. 715-721.
- [28]. GOLDSTEIN, R. J. & STONE, L. D. 1997 *Row of holes film cooling of curved walls at low injection angles*. ASME J. Turbomach. 119, pp. 574-579.
- [29]. GOODMAN, J. W. 1996 *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill Book Company, San Francisco.
- [30]. GUSTAFSSON, K. M. B. & JOHANSSON, T. G. 2001 *An Experimental Study of Surface Temperature Distribution on Effusion-Cooled Plates*. ASME J. of Eng. for Gas Turbine and Power 123, pp. 308-316.
- [31]. HART, D. P. 2000 *PIV error correction*. Exp. Fluids 29, pp. 13-22.
- [32]. HAVEN, B. A. & KUROSAKA, M. 1997 *Kidney and anti-kidney in crossflow jets*. J. Fluid Mech. 352, pp. 27-64.
- [33]. HECHT, E. & ZAJAC, A. 1974 *Optics*. Addison-Wesley Pub. Company, Massachusetts.
- [34]. HUANG, H., DABIRI D. & GHARIB, M. 1997 *On errors of digital particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1427-1440.
- [35]. HUANG, H. T., FIELDER, H. F. & WANG, J. J. 1993 *Limitation and improvement of PIV, part II. Particle image distortion, a novel technique*. Exp. Fluids 15, pp. 263-273.
- [36]. JAMBUNATHAN, K., JU, X. Y., DOBBINS, B. N. & ASHFORT-FROST, S. 1995 *An improved cross correlation technique for particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 6, pp. 507-514.
- [37]. KEANE, R. D. & ADRIAN, R. J. 1990 *Optimisation of particle image velocimeters. Part I: Double-pulsed systems*. Meas. Sci. Technol. 1, pp. 1202-1215.
- [38]. KEANE, R. D. & ADRIAN, R. J. 1991 *Optimisation of particle image velocimeters. Part II: Multiple-pulsed systems*. Meas. Sci. Technol. 2, pp. 963-974.
- [39]. KEANE, R. D. & ADRIAN, R. J. 1993 *Theory of cross-correlation of PIV images*. Flow Visualization and Image Analysis. (ed. F.T.M. Nieuwstadt) Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 1-25.
- [40]. KEANE, R. D., ADRIAN, R. J. & ZHANG, Y. 1995 *Super-resolution particle imaging velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 6, pp. 754-768.
- [41]. KEFFER, J. F. & BAINS, W. D. 1963 *The round turbulent jet in a cross wind*. J. Fluid Mech. 15, pp. 481-496.
- [42]. KELSO, R. M., LIM, T. T. & PERRY, A. E. 1996 *An experimental study of round jets in cross-flow*. J. Fluid Mech. 306, pp. 111-144.
- [43]. KREITH, F. 1973 *Principles of Heat Transfer*. Intext Educational Publishers.
- [44]. LANDRETH, C. C. & ADRIAN, R. J. 1990 *Measurement and refinement of velocity data using*

- high image density analysis in particle image velocimetry*. Application of Laser Anemometry to Fluid Mechanics. (ed. R. J. Adrian *et al.*) Springer, Berlin, pp. 484-497.
- [45]. LAWSON, N. J. & WU, J. 1997 *Three-dimensional particle image velocimetry: error analysis of stereoscopic techniques*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 894-900.
 - [46]. LAWSON, N. J. & WU, J. 1997 *Three-dimensional particle image velocimetry: experimental error analysis of a digital angular stereoscopic system*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1455-1464.
 - [47]. LECUONA, A., NOGUEIRA, J., RODRÍGUES, P. A. & SANTANA, D. 2002 *Accuracy and time performance of different schemes of the local field correction PIV technique*. Exp. Fluids 33, pp. 743-751.
 - [48]. LEONTIEV, A. I. 1999 *Heat and Mass Transfer Problems for Film Cooling*. ASME J. Heat Transfer 121, pp. 509-527.
 - [49]. LIM, T. T., NEW, T. H. & LUO, S. C. 2001 *On the development of large scale structures of a jet normal to a cross-flow*. Physics of Fluids 13, n.3, pp. 770-775.
 - [50]. MELLING, A. 1997 *Tracer particles and seeding for particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1406-1416.
 - [51]. MEUNIER, P. & LEWEKE, T. 2003 *Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry*. Exp. Fluids 35, pp. 408-421.
 - [52]. MEYER, K. E., ÖZCAN, O. & WESTERGAARD, C. H. 2001 *Flow mapping of a jet in cross-flow with stereoscopic PIV*. 4th Int. Symp. on Particle Image Velocimetry, September 17-19, Göttingen, Germany.
 - [53]. MOUSSA, Z. M., TRISCHKA, J. W. & ESKINAZI, A. 1977 *The near field in the mixing of a round jet with a cross-stream*. J. Fluid Mech. 80, pp. 49-80.
 - [54]. NOGUEIRA, J., LECUONA, A. & RODRÍGUES, P. A. 1999 *Local field correction PIV: on the increase of accuracy of digital PIV systems*. Exp. Fluids 27, pp. 107-116.
 - [55]. NOGUEIRA, J., LECUONA, A. & RODRÍGUES, P. A. 2001 *Local field correction PIV, implemented by means of simple algorithms, and multigrid versions*. Meas. Sci. Technol. 12, pp. 1911-1921.
 - [56]. NOGUEIRA, J., LECUONA, A., RUIZ-RIVAS, U. & RODRÍGUES, P. A. 2002 *Analysis and alternatives in two-dimensional multigrid particle image velocimetry methods: application of a dedicated weighting function and symmetric direct correlation*. Meas. Sci. Technol. 13, pp. 963-974.
 - [57]. OORD, J. VAN 1997 *The design of a stereoscopic DPIV system*. MEAH Report 161, Delft University of Technology.
 - [58]. PARZEN, E. 1957 *On choosing an estimate of the spectral density function of a stationary time series*. Ann. Math. Statist. 28, 921-932.
 - [59]. PRASAD, A. K. & JENSEN, K. 1995 *Scheimpflug stereocamera for particle image velocimetry in liquid flows*. Appl. Optics 34, pp. 7092-7099.
 - [60]. PRATTE, B. D. & BAINES, W. D. 1967 *Profiles of the round turbulent jet in a cross flow*. J. Hydraul. Div. ASCE 92 (HY6), pp. 53-64.
 - [61]. PRIESTLEY, M. B. 1992 *Spectral Analysis and Time Series*. (7th Ed.) Academic, San Diego (CA).
 - [62]. RAFFEL, M., WILLERT, C. & KOMPENHANS, J. 1998 *Particle Image Velocimetry*. Ed. Springer, Berlin.
 - [63]. RAMSEY, J. W. & GOLDSTEIN, R. J. 1971 *Interaction of a Heated Jet with a Deflecting Stream*. J. Heat Transfer 93, pp. 365-373.
 - [64]. RIVERO, A., FERRÉ, J. A. & GIRALT, F. 2001 *Organized motions in a jet in crossflow*. J.

- Fluid Mech. 444, pp. 117-149.
- [65]. SCARANO, F. & RIETHMULLER, M. L. 1999 *Iterative multigrid approach in PIV image processing*. Exp. Fluids 26, pp. 513-523.
 - [66]. SCARANO, F. & RIETHMULLER, M. L. 2000 *Advances in iterative multigrid PIV image processing*. Exp. Fluids 29, pp. S51-60.
 - [67]. SCARANO, F. 2002 *Iterative image deformation methods in PIV*. Meas. Sci. Technol. 13, pp. R1-R19.
 - [68]. SMITH, S. H. & MUNGAL, M. G. 1998 *Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow*. J. Fluid Mech. 357, pp. 83-122.
 - [69]. SOLOFF, S. M., ADRIAN, R. J. & LIU, Z. C. 1997 *Distortion compensation for generalized stereoscopic particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1441-1454.
 - [70]. STANISLAS, M. & MONNIER, J. C. 1997 *Practical aspects of image recording in particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1417-1426.
 - [71]. SYKES, R. I., LEWELLEN, W. S. & PARKER, S. F. 1986 *On the vorticity dynamics of a turbulent jet in a cross flow*. J. Fluid Mech. 168, pp. 393-413.
 - [72]. VAN DE HULST, H. C. 1957 *Light scattering by small particles*. John Wiley & Sons, Inc., New York (riedito nel 1981 da Dover Publications, New York).
 - [73]. WERELEY, S. T. & MEINHART, C. D. 2001 *Second-order accurate particle image velocimetry*. Exp. Fluids 31, pp. 258-268.
 - [74]. WESTERWEEL, J. 1993 *Digital Particle Image Velocimetry – Theory and Application*. Phd Thesis, Delft: Delft University Press.
 - [75]. WESTERWEEL, J. 1997 *Fundamentals of digital particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1379-1392.
 - [76]. WESTERWEEL, J., DABIRI, D. & GHARIB, M. 1997 *The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital PIV recordings*. Exp. Fluids 23, pp. 20-28.
 - [77]. WESTERWEEL, J., DRAAD, A. A., VAN DER HOEVEN, J. G. TH & VAN OORD, J. 1996 Exp. Fluids 20, p. 165.
 - [78]. WILLERT, C. 1997 *Stereoscopic digital particle image velocimetry for application in wind tunnel flows*. Meas. Sci. Technol. 8, pp. 1465-1479.
 - [79]. YUAN, L. L. & STREET, R. L. 1998 *Trajectory and entrainment of a round jet in crossflow*. Physics of Fluids. 10, pp. 2323-2335.
 - [80]. YUAN, L. L., STREET, R. L. & FERZIGER, J. H. 1999 *Large-eddy simulations of a round jet in crossflow*. J. Fluid Mech. 379, pp. 71-104.
 - [81]. ZAMAN, K. B. M. & FOSS, J. K. 1997 *The effect of vortex generators on a jet in a cross-flow*. Physics of Fluids 9, n.1 pp. 106-114.

LISTA DEI SIMBOLI

Caratteri romani maiuscoli

A	ampiezza della risposta in frequenza del segnale in esame
A	coefficiente nella legge di potenza della traiettoria del getto
B	distanza delle lenti delle telecamere dal piano di simmetria
B	larghezza della banda dell'immagine
$B(k; n, p)$	funzione di distribuzione binomiale di parametri n e p
B_p	larghezza della banda di Parzen
B, F, R	costanti di calibrazione del termografo
C	concentrazione delle particelle traccianti
C	costante di proporzionalità tra radiazione e livello misurato dal termografo
C^*	mutua covarianza dell'immagine quantizzata
C_1	fattore di peso del rischio di prima specie
C_2	fattore di peso del rischio di seconda specie
C_1, C_2	termini dell'espressione degli errori di allineamento per un piano generico
C_1, C_2	costanti della legge di Planck
C_G	autocovarianza di insieme del campione tracciante
$C_{G'G''}$	mutua covarianza di insieme del campione tracciante
$C_{g'g''}$	mutua covarianza di insieme del campione tracciante sull'immagine
$C_I(\underline{s})$	funzione di autocovarianza di insieme dell'immagine
$C_{IT}(\underline{s})$	funzione di mutua covarianza di insieme dell'immagine
$C_{IT}[r, s]$	funzione di mutua covarianza discreta delle immagini
$C_{II}(x, y)$	funzione di mutua covarianza discreta
D	diametro del condotto di uscita del getto
D_1, D_2	termini dell'espressione degli errori di allineamento per rotazioni nel piano xz
$\underline{D}(\underline{X}; t', t'')$	campo di spostamento tra gli istanti di tempo t' e t''
D_a, D	diametro di apertura della lente
D_I	area nel piano dell'immagine corrispondente al dominio di interrogazione
D_X, D_Y, D_Z	componenti dello spostamento \underline{D}
E_1	rischio di prima specie
E_2	rischio di seconda specie
E_g	salto di energia proibito in un materiale semiconduttore
E_i	livello energetico i -esimo di un atomo
E_n	potenza termica per unità di superficie irradiata dal corpo nero
$E_{n\lambda}$	densità spettrale di emissione del corpo nero
E_λ	densità spettrale di emissione di un corpo
$\underline{F}(\underline{x})$	matrice di ingrandimento
$F_I(\underline{s})$	perdita di correlazione dovuto allo spostamento delle particelle nel piano
$F_I[r, s]$	perdita di correlazione discreta nel piano
F_m	$F_I[m_O + m, 0]$
$F_O(\Delta Z)$	perdita di correlazione dovuta al moto delle particelle fuori dal piano
$F_I(x, y)$	autocorrelazione dell'immagine della particella
$G(\underline{X}, t)$	campione tracciante
$G'(\underline{X})$	realizzazione del campione tracciante all'istante t'
$G''(\underline{X})$	realizzazione del campione tracciante all'istante t''
H	distanza delle lenti delle telecamere dal piano oggetto
$H(\underline{X}', \underline{X}'')$	risposta all'impulso del campione tracciante
H_0	ipotesi nulla
H_1	ipotesi alternativa

Lista dei simboli

H_d, B_d	B ed H relative alla telecamera destra
H_s, B_s	B ed H relative alla telecamera sinistra
I	campione estratto dall'immagine della prima esposizione
I	generico livello misurato dal termografo
I'	livello misurato dal termografo
I'	campione estratto dall'immagine della seconda esposizione
\bar{I}	valore medio dell'intensità dell'immagine
\hat{I}	trasformata di Fourier di I
\hat{I}'	trasformata di Fourier di I'
I_a	livello corrispondente alla radiazione emessa dall'ambiente
I_{atm}	livello corrispondente alla radiazione emessa dall'atmosfera
I_o	livello corrispondente alla radiazione emessa dall'oggetto
$I(x)$	profilo di intensità della luce nella figura di diffrazione di Airy
$I(x,y)$	campo di intensità dell'immagine
$I[i,j]$	intensità dell'immagine discreta
$I'(x,y)$	realizzazione di $I(x,y)$ all'istante t'
$I''(x,y)$	realizzazione di $I(x,y)$ all'istante t''
I^*	intensità dell'immagine quantizzata
$I_0(X, Y, Z)$	intensità del fascio di luce laser
$I_0(Z)$	profilo di intensità del fascio di luce laser
$I_{i,j}$	$I[i,j]$
I_{max}	intensità massima della luce nella figura di diffrazione di Airy o sull'immagine
I_{min}	intensità minima sull'immagine
I_Z	valore massimo di $I_0(Z)$
$\Delta I'$ e $\Delta I''$	fluttuazione dell'intensità delle immagini I' e I''
K	funzione di costo
L	lunghezza della cavità risonante del laser
L	scala integrale della lunghezza della covarianza
L	lunghezza di riferimento per la definizione di Nu
L	spessore del sensore
$L_d \equiv (x_d, y_d, z_d)$	coordinate del punto con cui si schematizza la telecamera destra
$L_s \equiv (x_s, y_s, z_s)$	coordinate del punto con cui si schematizza la telecamera sinistra
L_x, L_y	dimensioni del mezzo di registrazione
M	fattore di ingrandimento dell'immagine
M_{cal}, N_{cal}	dimensioni della griglia per il calcolo dei coefficienti di calibrazione
M_g, N_g	numero di righe e colonne della griglia di punti
M_n	fattore di ingrandimento nominale
Mod	rapporto di modulazione dell'immagine
M_{opt}	fattore di ingrandimento ottimale
N	numero di particelle del campione
N	potenza totale dell'errore
$N(m,n)$	funzione di rumore sull'immagine
N, M	dimensioni della finestra di interrogazione
N'	numero effettivo di campioni indipendenti nel blocco di dati
N_C	numero di punti della griglia
N_{eff}	numero effettivo di campioni indipendenti per la mediana
N_i	numero di atomi al livello i -esimo
N_I	densità dell'immagine PIV
N_M	numero di elementi utilizzati per i test statistici
$N_{n\lambda}$	fotoni emessi dal corpo nero per unità di superficie e tempo alla lunghezza λ
N_n	numero totale di fotoni emessi dal corpo nero per unità di superficie e tempo

N_s	densità della sorgente in un immagine PIV
P	lunghezza del filtro per la riduzione del rumore nei dati
$P(T)$	segnale rilevato da un thermal detector
Q	energia associata ad un singolo fotone
R	rapporto di iniezione o rapporto di velocità
$R(\underline{s})$	funzione di mutua correlazione spaziale delle immagini
R^*	stimatore corretto della mutua covarianza di immagine
$R'(\underline{s})$	fluttuazione della mutua correlazione spaziale rispetto a quella di insieme
$R_C(\underline{s})$	correlazione media di fondo
$R_c(\xi, \eta)$	funzione di mutua correlazione per le immagini della telecamera c
$R_D(\underline{s})$	picco della correlazione dovuto allo spostamento delle particelle
$R_D[r, s]$	mutua covarianza discreta dell'immagine
$\hat{R}_D[r, s]$	stimatore della mutua covarianza discreta
$R_F(\underline{s})$	rumore dovuto alla correlazione casuale tra le particelle
$R_{II}(x, y)$	funzione di mutua correlazione discreta
R_m	$R_D[m_O + m, 0]$
\hat{R}_m	$\hat{R}_D[m_O + m, 0]$
$R(\lambda)$	risposta del thermal detector
S	potenza totale del segnale
S_a	radiazione emessa dall'ambiente
S_{atm}	radiazione emessa dall'atmosfera
S_o	radiazione emessa dall'oggetto
$S(\chi, \psi)$	densità spettrale dell'immagine
T	temperatura termodinamica assoluta
T_1, T_2	temperature delle superfici del sensore
T^*	temperatura dimensionale
T_a	temperatura dell'ambiente
T_0	temperatura della corrente libera
T_j^*	temperatura di iniezione del getto
y	ordinata adimensionale
\underline{U}	velocità effettiva della corrente
$\underline{U}(\underline{L}, t)$	campo di velocità del campione tracciante
\underline{U}_g	velocità del flusso indotta da effetti gravitazionali
$\underline{U}_{i,j}$	posizione del picco di correlazione massimo
\underline{U}_p	velocità delle particelle traccianti
\underline{U}_s	velocità di scorrimento delle particelle
V	volume occupato dal campione tracciante
\underline{V}	modulo della velocità
$\underline{\bar{V}}(\underline{x})$	campo di velocità medio
\underline{V}_{ij}	media locale del campo di spostamento nel punto di interrogazione (i, j)
\underline{V}'_{ij}	risultato della misura PIV nel punto di interrogazione (i, j)
$\underline{V}(\underline{x}, t)$	campo di velocità istantaneo
$\underline{V}_c(\underline{x}, t)$	campo di velocità coerente
$\underline{V}_r(\underline{x}, t)$	errore casuale nel campo di velocità istantaneo
V_y	componente della velocità parallela al piano xz
$\delta V(\underline{X}')$	volume di misura finito nell'intorno di \underline{X}'
$\langle \underline{V}' \rangle_{ij}$	media locale di \underline{V}'_{ij}
$\langle \underline{V}' \rangle$	media globale di \underline{V}'_{ij}
$[\underline{V}']_{ij}$	mediana locale di \underline{V}'_{ij}
$W'(x, y)$	funzione finestra relativa all'immagine I'

Lista dei simboli

$W''(x, y)$	funzione finestra relativa all'immagine I''
W_{ij}	funzione di peso discreta
X, Y, Z	sistema di coordinate nella regione di misura
\underline{X}	vettore posizione
\underline{X}'	vettore posizione all'istante t'
\underline{X}''	vettore posizione all'istante t''
$\underline{X} = \underline{F}(x)$	funzione di mappatura tridimensionale delle coordinate nello spazio fisico
X_c^i, Y_c^j	coordinate del punto di griglia i, j sull'immagine ripresa dalla telecamera c
$\underline{X}_i(t)$	vettore posizione relativo alla particella i -esima all'istante t
$\underline{X}_k = (X_k, Y_k, Z_k)$	vettore posizione della k -esima particella nello spazio
\underline{X}_I	coordinate del centro della finestra di interrogazione
X_I, Y_I	coordinate di un punto del piano immagine
X_O, Y_O	coordinate di un punto del piano oggetto
$\overline{\Delta \underline{X}}^{(c)}$	campo di spostamento medio misurato dalla telecamere c
$\overline{\Delta \underline{X}}$	campo di spostamento medio sull'immagine
$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$	spostamento delle particelle nel volume di controllo nello spazio fisico
$\Delta X_c, \Delta Y_c$	componenti dello spostamento sul piano immagine per la telecamera c
$\{\underline{X}_g^{(c)}\}$	griglia di punti sull'immagine corrispondente della griglia $\{\underline{x}_g\}$
$\{\underline{X}_I^{(c)}\}$	griglia di punti su cui sono calcolati gli spostamenti con la telecamera c
Z_0	distanza tra la lente ed il piano oggetto
ΔZ_0	spessore del fascio di luce laser
$\Delta Z'$	spessore del fascio di luce basato sul momento del primo ordine di $I_0(Z)$
$\Delta Z''$	spessore del fascio di luce basato sul momento del secondo ordine di $I_0(Z)$

Caratteri romani minuscoli

\underline{a}	accelerazione del flusso
a	parametro di modello proporzionale al volume sotteso dal picco di correlazione
a, b, c	coefficienti dell'equazione di un piano non parallelo all'asse z
$a_0 \dots a_5, b_0 \dots b_5$	coefficienti del polinomio interpolante del secondo ordine in x e y
$a_0 \dots a_5, b_0 \dots b_5$	coefficienti delle equazioni della posizione del piano effettivo in x_P e y_P
a_1	parametro di modello proporzionale all'ampiezza del picco di correlazione
a_c, b_c, c_c	coefficienti di calibrazione della telecamera c per gli spostamenti lungo x, y e z
\underline{a}_j	vettore dei coefficienti della funzione di mappatura
a_{ij}	generica costante delle equazioni della proiezione prospettica
c	parametro di modello della varianza condizionale
c	velocità della luce
$c_{II}(x, y)$	fattore di correlazione dell'immagine discreta
c_{max}	massimo spostamento misurabile in pixel
c_τ	costante di proporzionalità tra $\sigma_{\Delta X}$ e d_τ
$d(m, n)$	funzione dello spostamento sulla finestra di interrogazione
d_I	distanza della lente dal piano immagine
d_I	dimensione della finestra di interrogazione nel fluido
d_I^*	proiezione di d_I sull'asse ottico della lente
d_O	distanza della lente dal piano oggetto
d_O^*	proiezione di d_O sull'asse ottico della lente
d_p	diametro di una particella tracciante
d_R	diametro del picco di correlazione corrispondente allo spostamento
d_r	dimensione di un pixel
d_s	diametro minimo dell'immagine della particella affetta da diffrazione
d_t	diametro di una particella nel piano dell'immagine

d_τ	diametro dell'immagine registrata della particella
e_r	rapporto tra gli errori
e_u	errore di misura sulla componente u
e_v	errore di misura sulla componente v
e_w	errore di misura sulla componente w
$f(r^2 H_0)$	pdf di r^2_{ij} condizionata a H_0
$f(r^2 H_1)$	pdf di r^2_{ij} condizionata a H_1
f	distanza focale della lente
f_s	coefficiente correttivo delle componenti misurate dalla telecamera sinistra
f_d	coefficiente correttivo delle componenti misurate dalla telecamera destra
f_{eus}	coefficiente correttivo per la componente effettiva u vista da sinistra
f_{eud}	coefficiente correttivo per la componente effettiva u vista da destra
f_{evs}	coefficiente correttivo per la componente effettiva v vista da sinistra
f_{evd}	coefficiente correttivo per la componente effettiva v vista da destra
f_{ews}	coefficiente correttivo per la componente effettiva w vista da sinistra
f_{ewd}	coefficiente correttivo per la componente effettiva w vista da destra
f_s^u	coefficiente correttivo della componente u misurata dalla telecamera sinistra
f_s^v	coefficiente correttivo della componente v misurata dalla telecamera sinistra
f_d^u	coefficiente correttivo della componente u misurata dalla telecamera destra
f_d^v	coefficiente correttivo della componente v misurata dalla telecamera destra
$f_\#$	numero f della lente
$f_{\#opt}$	numero f ottimale
\underline{g}	accelerazione gravitazionale
$g(x, y)$	campione tracciante sull'immagine PIV
g'	realizzazione del campione g all'istante t'
g''	realizzazione del campione g all'istante t''
h	costante di Planck
h	distanza h_j nel caso di disposizione simmetrica delle telecamere
h_j	distanza dell'asse ottico della telecamera j dall'origine
h_c, h	coefficiente di scambio termico convettivo
h_n	coefficiente di scambio termico dovuto alla convezione naturale
(i, j)	posizione generica sull'immagine
k	costante di Boltzmann
k	conducibilità termica del fluido
k	energia cinetica turbolenta
\underline{k}	tensore della conducibilità termica
k_r	conducibilità delle piste in rame
k_v	conducibilità del supporto in vetronite
k_x	conducibilità lungo la direzione x
k_y	conducibilità lungo la direzione y
k_y	somma delle componenti di turbolenza lungo l'asse x e lungo l'asse z
k_z	somma delle componenti di turbolenza lungo l'asse x e lungo l'asse y
l_x, l_y	campo di vista nel fluido
$[m_O, n_O]$	posizione del picco di correlazione in multipli di pixel
m	numero intero
n	indice di rifrazione del mezzo
n	esponente nella legge di potenza della traiettoria del getto
$p(x, y)$	funzione di campionamento dell'immagine
q	diametro adimensionale di riferimento per la teoria di Mie
q	differenza tra due livelli di quantizzazione successivi
\underline{q}	vettore dei termini noti nel sistema di equazioni per la correzione degli errori

Lista dei simboli

q_1, q_2	flussi termici sulle superfici del sensore
q_j	potenza termica per unità di superficie dissipata per effetto Joule
q_k	potenza termica per unità di superficie dissipata per conduzione tangenziale
q_n	potenza termica per unità di superficie dissipata per convezione naturale
q_r	potenza termica per unità di superficie dissipata per irraggiamento
q_w	flusso termico alla parete
\underline{M}	matrice associata al sistema di equazioni per la correzione degli errori
r	generica frequenza spaziale
r'	frequenza spaziale in cui si valuta la MTF
r_c	ordinata fornita dalla formula del coseno per il profilo del convergente
r_C^2	valore critico di soglia
r_D, s_D	componenti dello spostamento delle particelle sull'immagine
$\underline{r}_{i,j}$	vettore spostamento residuo
r_w	ordinata fornita dalla formula di Witoshinsky per il profilo del convergente
r_x	frequenza spaziale in direzione x
r_y	frequenza spaziale in direzione y
r_1	ordinata nella sezione di ingresso della galleria del vento
r_2	ordinata nella sezione di gola della galleria del vento
s	spessore della lamina
\underline{s}	spostamento sull'immagine
\underline{s}_D	spostamento delle particelle nel volume di controllo sull'immagine
s_n	spostamento con correzione calcolato al passo n -esimo
s_r	spessore delle piste in rame del circuito
s_v	spessore del supporto in vetronite
t	generico istante di tempo
t'	istante di tempo iniziale
t''	istante di tempo finale
$t(x, y)$	immagine di una particella per unità di luce incidente
t_0	integrale dell'intensità $t(x, y)$
t_{ij}	intervallo di tempo necessario alla transizione dal livello i al livello j
Δt	intervallo di tempo tra gli impulsi
T_{aw}	temperatura di parete adiabatica
T_w	temperatura di parete
T_R	temperatura di riferimento
u, v	componenti della velocità nel piano
(u, v, w)	componenti effettive del vettore spostamento
(u', v', w')	componenti effettive del vettore spostamento quando i piani non sono allineati
(u'', v'', w'')	fluttuazioni istantanee delle componenti del vettore velocità
$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$	elementi sulla diagonale del tensore degli sforzi apparenti di Reynolds
$\overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$	sforzi apparenti di Reynolds
(u_d, v_d)	componenti dello spostamento misurate dalla telecamera destra
(u_{es}, v_{es}, w_{es})	componenti dello spostamento nel punto P'_s
(u_{ed}, v_{ed}, w_{ed})	componenti dello spostamento nel punto P'_d
(u_s, v_s)	componenti dello spostamento misurate dalla telecamera sinistra
(u_s^d, v_s^d)	componenti dello spostamento u utilizzate per le correzioni da destra
(u_s^s, v_s^s)	componenti dello spostamento u utilizzate per le correzioni da sinistra
(u'_s, v'_s)	componenti misurate dalla telecamera sinistra nel piano di misura effettivo
(u'_d, v'_d)	componenti misurate dalla telecamera destra nel piano di misura effettivo
(u''_s, v''_s)	componenti misurate dalla telecamera sinistra quando i piani non sono allineati
(u''_d, v''_d)	componenti misurate dalla telecamera destra quando i piani non sono allineati

$\underline{u}[X(t)]$	campo di velocità del fluido
u_{max}	massima velocità misurabile
u_{∞}	velocità del flusso trasversale
$\Delta \underline{u}$	variazione locale della velocità
$\underline{v}[X(t)]$	campo di velocità delle particelle traccianti
$v^2(\xi, \eta)$	funzione di peso utilizzata per la LFCPIV
$\text{var}\{\varepsilon u\}$	varianza condizionale dell'errore
(v_s^d, v_d^d)	componenti dello spostamento v utilizzate per le correzioni da destra
v_j	velocità di uscita del getto
(v_s^s, v_d^s)	componenti dello spostamento v utilizzate per le correzioni da sinistra
v^x, v^y	componenti lungo x ed y di \underline{V}
w_{ij}	funzione di peso
w_r	larghezza delle piste in rame
w_i	larghezza dello spazio tra le piste
x, y, z	sistema di coordinate nel piano dell'immagine
\underline{x}	vettore dei parametri del piano
(x_C, y_C)	coordinate del centro di rotazione
x'_j, y'_j, z'_j	sistema di coordinate in un piano parallelo al piano dell'immagine
x_0	coordinate di riferimento per la figura di diffrazione di Airy
\underline{x}_I	coordinate del punto mediano del volume di interrogazione
$\Delta \underline{x}$	campo di spostamento medio sul volume di interrogazione
$\Delta x, \Delta y$	passo della griglia lungo x ed y
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	componenti dello spostamento nello spazio fisico
$\Delta x_{cal}, \Delta y_{cal}, \Delta z_{cal}$	spostamenti di riferimento del blocco di prova per la calibrazione
Δx_{pmax}	massimo spostamento misurabile
(x_P, y_P)	coordinate del punto P del piano oggetto
(x'_{Ps}, y'_{Ps})	coordinate della proiezione di P sul piano effettivo vista da sinistra
(x'_{Pd}, y'_{Pd})	coordinate della proiezione di P sul piano effettivo vista da destra
$\{\underline{x}_C\}$	insieme dei punti della griglia
$\{\underline{x}_g\}$	griglia di punti nello spazio fisico su cui sono calcolati i vettori spostamento
z_0	distanza tra il piano dell'immagine e la lente
Δz	traslazione del piano di misura rispetto a quello di calibrazione
Δz_s	distanza di P' dal piano di calibrazione per la proiezione da sinistra
Δz_d	distanza di P' dal piano di calibrazione per la proiezione da destra

Caratteri greci

α	angolo di rotazione tra il piano della lente ed il piano immagine
α	angolo di rotazione intorno all'asse y del piano di misura effettivo
α	angolo α_j nel caso di disposizione simmetrica delle telecamere
α	diffusività termica
α_d, β_d	angoli di vista della telecamera destra
α_j	angolo di rotazione dell'asse ottico rispetto all'asse z
β	angolo di rotazione intorno all'asse x del piano di misura effettivo
β	angolo tra la normale alla superficie che emette e l'asse di vista
α_s, β_s	angoli di vista della telecamera sinistra
$\delta\alpha$ e $\delta\beta$	variazione degli angoli di vista lungo il vettore spostamento
Γ	probabilità di trovare più di quattro coppie di particelle
$\underline{\Gamma}(t)$	stato del campione tracciante all'istante t
γ_{ij}	variabile aleatoria binaria
γ	angolo di rotazione intorno all'asse z del piano di misura
δ_z	profondità di campo dell'immagine

Lista dei simboli

ε	errore
ε	emissività della superficie o remissività emisferica totale
ε	norma quadratica Euclidea del residuo
$\hat{\varepsilon}_b$	errore di tracciamento
ε_{bias}	errore di bias o polarizzazione
ε_{brms}	scarto quadratico medio dell'errore di tracciamento
$\varepsilon_{i,j}$	errore di misura nel punto di interrogazione (i, j)
ε_n	errore al passo n -esimo
ε_{resid}	errore residuo nella misura dello spostamento
ε_{rms}	errore di misura casuale
ε_s	errore di scorrimento
ε_{sys}	errore di misura sistematico
ε_{tot}	errore complessivo nella misura dello spostamento
ε_u	errore relativo sulla componente u
ε_v	errore relativo sulla componente v
ε_w	errore relativo sulla componente w
ε_V	incertezza sulla velocità
ε_λ	emissività emisferica monocromatica
ζ	rumore di quantizzazione
η	fattore di correlazione locale del campo di velocità
η	efficienza del film cooling
θ	angolo di vista della lente
λ	lunghezza d'onda della luce laser
λ	lunghezza d'onda della radiazione
λ_c	limite inferiore della banda di sensibilità del thermal detector
λ_{max}	lunghezza d'onda a cui è massimo il potere di emissione
λ_x, λ_y	lunghezze d'onda del segnale lungo le direzioni x ed y
$\Delta\lambda$	ampiezza della banda di sensibilità del thermal detector
μ	coefficiente di viscosità dinamica del fluido
μ	numero medio di coppie di particelle nella distribuzione di Poisson
$\underline{\mu}$	spostamento medio
μ_I	valore medio dell'immagine discreta
$\mu_{i,j}$	parametro di modello della funzione di peso
ν	frequenza caratteristica di un fotone
ν_{ij}	frequenza di emissione di un atomo nella transizione dallo stato i allo stato j
$\Delta\nu$	ampiezza della banda di emissione del laser
ρ	densità del fluido
ρ	coefficiente di riflessione di un corpo opaco
$\rho(\underline{s}-\underline{s}_D)$	funzione di distribuzione dello spostamento
ρ_j	densità del getto
$\rho(k, l)$	funzione di autocorrelazione spaziale di $\underline{V}_{i,j}$
$\rho(\underline{l})$	funzione densità di probabilità di \underline{l}
$\rho[t, u]$	coefficiente di correlazione dello stimatore di covarianza
ρ_p	densità delle particelle traccianti
ρ_s	risoluzione limite dell'immagine
ρ_∞	densità del flusso trasversale
σ	deviazione standard
σ	costante di Stefan-Boltzmann
σ^2	varianza
σ_U^2	varianza della posizione del picco di correlazione massimo
σ_V^2	varianza della velocità fluttuante

σ_ε^2	varianza dell'errore di misura
σ_I	sommatoria degli scarti quadratici dell'immagine $I(x,y)$
$\sigma_{I'}$	sommatoria degli scarti quadratici dell'immagine $I'(x,y)$
σ_I^2	varianza dell'immagine
σ_u	scarto quadratico medio dell'errore sulla misura della velocità
$\sigma_{\Delta x}$	scarto quadratico medio dell'errore sullo spostamento nello spazio fisico
$\sigma_{\Delta X}$	scarto quadratico medio dell'errore sullo spostamento sull'immagine
τ	coefficiente di trasmittanza dell'aria
τ_s	tempo di rilassamento per la risposta al gradino della velocità della particella
φ, γ e η	angoli con cui le telecamere misurano il vettore spostamento
ϕ	frequenza della sollecitazione termica
Φ_{pp}	autocorrelazione della funzione di campionamento dell'immagine
ϕ_x, ϕ_y	frequenze spaziali lungo x ed y
ϕ_y	involuppo della funzione di correlazione
ϕ'_y	involuppo del prodotto di funzioni di correlazione
χ, ψ	frequenze spaziali
$\underline{\Omega}$	vorticità

Simboli speciali

$\text{cov}\{\dots\}$	operatore di covarianza statistica
$E\{\dots\}$	operatore di media statistica
Ec	numero di Eckert
Gr	numero di Grashof
$Im\{\dots\}$	parte immaginaria di un numero complesso
M	numero di Mach
Nu	numero di Nusselt
Nu_0	numero di Nusselt di riferimento
Pr	numero di Prandtl
Re	numero di Reynolds
$Re\{\dots\}$	parte reale di un numero complesso
Sh	numero di Sherwood
$\text{var}\{\dots\}$	operatore di varianza statistica
$\delta(\)$	errore relativo alla grandezza in parentesi
δ_{ij}	simbolo di Kronecker
$\delta(\underline{X})$	impulso di Dirac
$\hat{\epsilon}$	stimatore dello spostamento frazionario
$\hat{\epsilon}_C$	stimatore frazionario baricentrico
$\hat{\epsilon}_G$	stimatore frazionario Gaussiano
$\hat{\epsilon}_P$	stimatore frazionario parabolico
$\epsilon_m, \epsilon_n, \epsilon$	spostamenti frazionari
$ \dots $	modulo di una grandezza vettoriale
$\underline{\underline{1}}$	matrice unità
$*$	convoluzione
$\langle \dots \rangle$	media di insieme
∇^2	operatore Laplaciano
∇	operatore gradiente

LISTA DELLE ABBREVIAZIONI

3C-PIV	Three Components Particle Image Velocimetry
CBC	Correlation Based Correction
CCD	Charge Coupled Device
CDI	Central Difference Interrogation
CVP	Counter-rotating Vortex Pair
DFT	Discrete Fourier Transform
DSR	Dynamic Spatial Range
DVR	Dynamic Velocity Range
FDI	Forward Difference Interrogation
FFT	Fast Fourier Transform
FOV	Field Of View
IFOV	Instantaneous Field Of View
IRSR	InfraRed Scanning Radiometer
JCF	Jet in Cross Flow
LASER	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
LC-SLM	Liquid Crystal Spatial Light Modulator
LES	Large Eddy Simulation
LFCPIV	Local Field Correction Particle Image Velocimetry
LSV	Laser Speckle Velocimetry
MA	Moving Average
MTF	Modulation Transfer Function
Nd:YAG	Neodimium Yttrium Aluminum Garnet
NETD	Noise Equivalent Temperature difference
NR	Noise Reduction
OFT	Optical Fourier Transform
PDF	Probability Density Function
PIV	Particle Image Velocimetry
PLIF	Planar Laser-Induced Fluorescence
PTV	Particle Tracking Velocimetry
QE	Quantization Efficiency
rms	root-mean-square
RTD	Resistance Temperature Detector
SLM	Spatial Light Modulator
SNR	Signal to Noise Ratio
SRF	Slit Response Function
TEM	Transverse Electronic Mode
V/STOL	Vertical/Short TakeOff and Landing
WIDIM	Window Deformation Iterative Multigrid